Phys. sp. 4° Ohm, G. S.,
183 2t

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

BEITRÄGE

ZUR

MOLECULAR-PHYSIK

VON

DR. G. S. OHM,

Rector der polytechnischen Schule in Nürnberg, Professor der Physik und Mathematik an der gleichen Anstalt, auswärtigem Mitgliede der königl. bayerischen Academie der Wissenschaften; Inhaber der Copley-Medaille und auswärtigem Mitgliede der Londoner Royal-Society; Correspondenten der königl. Academien der Wissenschaften zu Berlin und zu Turin; etc. etc.

Erster Band,

enthaltend einen

Grundriss der analytischen Geometrie im Raume am schiefwinkligen Coordinatensysteme.

Nürnberg.

Verlag von Johann Leonhard Schrag.

1849.

13. D.

ELEMENTE

der

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

im Raume am

schiefwinkligen Coordinatensysteme

von

Dr. G. S. Ohm,

Rector der polytechnischen Schule in Nürnberg, Professor der Physik und Mathematik an der gleichen Anstalt, auswärtigem Mitgliede der königl. bayerischen Academie der Wissenschaften; Inhaber der Copley-Medaille und auswärtigem Mitgliede der Londoner Royal-Society; Correspondenten der königl. Academien der Wissenschaften zu Berlin und zu Turin; etc. etc.

Nürnberg.

Verlag von Johann Leonhard Schrag.

1849.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Der

ROYAL SOCIETY

zu

LONDON,

die

durch Ihren Beifallsruf zu fortgesetztem Kampfe

im Felde des Wissens

seinen

durch vorangegangene abschreckende Begegnung

erweichten Muth

von Neuem stählte,

aus

DANKBARKEIT

und

weil Sie grossen Antheil hat

an dem,

was diese Forschungen Gutes bringen mögen,

verehrungsvoll gewidmet

von

dem Verfasser.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorwort.

Das Werk, welches sich hiermit in's Publicum einführt, kann schon desswegen nicht ohne Vorrede bleiben, damit durch diese Rechenschaft gegeben werde, wie der seinen ersten Theil einnehmende rein mathematische Bewohner zu einem physicalischen Aushängeschild gelange; um aber den Grund davon recht anschaulich machen zu können, sehe ich mich bewogen, etwas weiter auszuholen. —

Zu jener Zeit, wo ich den Anhang zu der 1827 in Berlin von mir herausgegebenen „galvanischen Kette" schrieb, trat mir der Gedanke mächtig entgegen, es müsse sich der Bau des physischen Körpers in solcher Weise auffassen lassen, dass mit jenen Eigenschaften des materiellen Raumerfüllenden, die wir vorzugsweise als ihm angehörige in's Auge zu fassen gewohnt sind, zugleich und nothwendigerweise auch alle die gegeben seien, welche wir uns bis dahin mehr wie seine Gäste, die ihn von Zeit zu Zeit heimsuchen, vorzustellen pflegten, und wofür man, wenn nicht ausser doch neben dem Körper liegende Ursachen erdacht hat, die als massenlose und doch selbstständige Naturdinge unter den Namen Licht, Wärme, Electricität, u. s. w. in der Physik, wiewohl nicht ohne Widerspruch von einzelnen Stimmberechtigten, das Bürgerrecht erlangt haben. Die hohe Bedeutung des Gedankens, alle diese, eigentlich blos aus uns selber, um wahrgenommene Erscheinungen begreifen zu können, in die Aussenwelt hineingetragenen Verstandeserzeugnisse als solche darzustellen, die in der Wesenheit des Körpers ihre objective Wurzel finden, und sie eben dadurch in ihrer Verbindung und gegenseitigen Abhängigkeit kennen zu lernen, oder auch nur den Weg zu dieser Kenntniss anzubahnen, liess ihn zwar nie in mir zur völligen Ruhe kommen; allein die nichts weniger als aufmunternden Erfahrungen, welche ich gleich bei meinem ersten Versuche, das Gängelband der Schule zu verlassen und frei Geschaffenes ihr zuzuführen, von Ephoren der Wissenschaft zu machen Gelegenheit genug erhalten hatte, — Erfahrungen, in Folge der ich jahrelang ein lebhaftes Gefühl von den verschiedenartigsten, mit dem Gebären verbundenen Wehen überall mit mir herumtrug, welches jeglichen sich annähernden geistigen Erzeugungstrieb scheu von sich abzuweisen ganz geeignet war, — so wie die bald nachher erfolgte gänzliche Umänderung meiner vorigen Lebensverhältnisse hatten ihn sehr in den Hintergrund gedrängt, und meine Thätigkeit auf blose Nachweisungen über die nicht eben, wie es scheinen

mochte, grosse Gehaltlosigkeit des bereits in die Welt Gesetzten, und auf dessen Reinerhaltung in seiner ursprünglichen höchst einfachen, und schon darum allein mit grosser Wahrscheinlichkeit der Natur abgeborgten, Gestalt beschränkt.

Zehn Jahre später gab das auf dem Zueignungsblatte berührte Ereigniss meinem anfänglichen Wissensdurste, dessen Glut in Berührung mit dem, bekanntlich jegliche Hitze verzehrenden, Eise des conventionellen Lebens schier bis auf Null gesunken war, seine anfängliche Stärke wieder, und mit ihm trat jener halbbegrabene Gedanke zum zweiten Male in den Vordergrund. Sein seitdem in meiner Seele stattgehabtes Hegen und Pflegen liess, was bis dahin blos Hoffnung war, zur Ueberzeugung anwachsen, dass er kein leerer Traum gewesen sei. Hier nun, auf dem Wege zu seiner Entwickelung eifrig vorwärts schreitend, gerieth ich an die Stelle, wo ich annehmen zu dürfen glaubte, dass zuvor, will man nicht noch weit entfernt vom Ziele stehen bleiben, der Zweig der Mathematik, — welcher in den Stand setzt, räumliche und dynamische Beziehungen am schiefwinkligen Coordinatensysteme mit der gleichen Leichtigkeit und Allgemeinheit zu verfolgen, wie am rechtwinkligen, — vollständig ausgebildet werden müsse, in welcher Beziehung mir neben dem, was mein Bruder für das ebene System gethan hat, nur noch die verdienstlichen Anfänge bekannt waren, welche im ersten Supplementbande zu „Klügel's mathematischem Wörterbuche" unter dem Artikel Coordinatensystem gefunden werden. Aus dem Bestreben, diese Lücke auszufüllen, giengen Früchte von vorzugsweise mathematischer Art hervor, deren einen Theil der vorliegende Band zu Tage fördert. Indessen, da diese Resultate ganz allein im Grübeln über den innern Bau des natürlichen Körpers ihre Veranlassung fanden, und deren Veröffentlichung wieder nur aus dem Grunde geschieht, um in der Folge zur Förderung des gleichen Zweckes Dienste thun zu können, sie sonach mit dem physicalischen Objecte die Glieder eines Leibes ausmachen, so hielt ich es für angemessen, diesen Umstand dadurch kund zu geben, dass ich den Hauptzweck, den physicalischen, im Haupttitel „Beiträge zur Molecular-Physik" ausspreche, und den besondern Inhalt des Bandes jedesmal nur im Nebentitel anzeige. Mit diesem ersten Bande auf gleicher Linie steht der kommende zweite, welcher die Dynamik am schiefwinkligen Coordinatensysteme im Grundrisse liefern wird, worauf erst später die eigentlich physicalischen Untersuchungen in dem gleichen Gewande folgen werden. Da der zweite Band die Dynamik des physischen Körpers auf den bisher üblichen Grundlagen aufbaut, und nur das Mittel, an welches sich der Bau anlehnt, das Coordinatensystem nämlich, ein anderes ist, so wird sich hierdurch der Unterschied zwischen diesen Grundlagen und den später einzuführenden um so deutlicher und schon von selber herausstellen.

Ein Durchgehen dieses ersten Bandes wird zu der Ueberzeugung führen, dass die in ihm gegebenen Gesetze der Ortsbestimmungen im schiefwinkligen Coordinatensysteme ein eben so vollständiges und abgerundetes Ganzes bilden, wie die im rechtwinkligen, dass es also nicht aus einer Art von Schamgefühl geschah, wesshalb sich

jene in einiger Entfernung von diesen, ihren Schwestern, aufgestellt haben. Im Gegentheile gesellt sich bei jenen zu ihrem durchweg ebenmässigen Körperbaue noch ein ganz eigenthümlicher Reiz, der aus der ungleich grössern Mannigfaltigkeit ihrer Formen hervorgeht. — Die zum sichern Arbeiten im rechtwinkligen Systeme erforderlichen Mittel verhalten sich zu denen im schiefwinkligen Systeme wie der Hausrath eines schlichten und unbegüterten Mannes zu dem eines opulenten und prachtliebenden. So wie im häuslichen Leben die einfachere Einrichtung für alltägliche Zwecke die natürlichere ist, und darum ein Anrecht hat, der zusammengesetzteren nicht eher als bei aussergewöhnlichen Vorgängen aus dem Weg gehen zu müssen; gleichwohl aber der, welcher an die letztere einmal gewöhnt worden ist, diese nicht gern mehr von sich lässt: eben so ist in den meisten Fällen das Arbeiten im rechtwinkligen Coordinatensysteme das empfehlenswerthere, und erst da, wo die besonderen Daten einer Aufgabe zum Gebrauche des schiefwinkligen gleichsam nöthigen, macht sich dessen Ueberlegenheit recht fühlbar; demungeachtet aber wird sich der mit dem letzteren vertraut gewordene Analyst auch da noch zu dessen Benützung hingezogen fühlen, wo es Vortheile zu gewähren nicht mehr im Stande ist.

Den Hauptbestandtheil des vorliegenden Bandes macht dessen erster Abschnitt aus, der vom Puncte und von der Richtung handelt, auf welchen auch verhältnissmässig der grösste Fleiss gerichtet worden ist. Anfänglich schien derselbe lange Zeit hindurch meinen Bemühungen unübersteigliche Hindernisse in den Weg legen zu wollen, bis mich endlich die vielen misslungenen Versuche selber dahin brachten, mit dem schiefwinkligen Coordinatensysteme gleichzeitig immer noch ein zweites, von dem ersten in bestimmter Weise abhängiges, in die Betrachtungen aufzunehmen *), dem ich den Namen Polarsystem gegeben habe, weil es sich zu dem ursprünglichen genau so verhält, wie das Polardreieck zu demjenigen andern sphärischen Dreieck, auf welches es sich bezieht. Von da ab, und nachdem noch die keineswegs geringe Schwierigkeit der vielfachen Bezeichnungen beseitigt war, entfaltete sich der Inhalt dieses ersten Abschnitts mit Leichtigkeit in seiner ganzen Fülle; er ist viel reicher als der entsprechende Abschnitt beim rechtwinkligen Coordinatensysteme, und verlangt daher auch einen grössern Raum, was indessen von allem nach ihm Kommenden bei Weitem nicht mehr in dem gleichen Maasse gilt. Obwohl nämlich dieser Abschnitt ungleich mehr Relationen in sich aufnimmt, als das rechtwinklige System geben kann, so werden die aus ihnen hervorgehenden Resultate im Allgemeinen doch keineswegs zusammengesetzter, wohl aber sind die hier auftretenden mehrerlei Formen im Stande auf einige Stellen der bisherigen analytischen Geometrie ein unverhofftes Licht zu werfen.

*) Den reichhaltigen Aufsatz des Herrn Dr. Haedenkamp in Grunert's Archiv (Theil 3. XII.), der mich schneller auf die Fährte hätte bringen können, habe ich erst am Ende des Druckes dieses Bandes zu Gesicht bekommen.

Die auf den ersten noch folgenden Abschnitte haben zum Zwecke, einestheils die Gebrauchsweise von jenem an Beispielen zu erläutern, und anderntheils den spätern Bänden vorzuarbeiten, wobei solche Betrachtungen übergangen worden sind, welche an allen Parallel-Coordinatensystemen völlig die gleichen bleiben, und daher von denen am rechtwinkligen Systeme bekannt gewordenen in Nichts sich unterscheiden. Man wird schon im zweiten und noch mehr im dritten Abschnitte mit Vergnügen bemerken, wie sich Fragen über Flächen und Linien, auch wenn es schon entlegenere sind, am schiefwinkligen Systeme fast mit derselben Leichtigkeit und Kürze wie im rechtwinkligen beantworten lassen, was schon ein bloser Vergleich des Inhalts mit dem geringen dazu verbrauchten Raume an die Hand geben kann, zumal wenn man bedenkt, dass hier alles in doppelten, zuweilen sogar in vierfachen Formen gegeben ist, und dass eine erste Bearbeitung ohne Zweifel nicht gleich überall den besten Weg getroffen haben wird. Dabei wird ein näheres Eingehen in die Sache den Beweis liefern können, dass meine Absicht nirgends die war, den Gegenstand in möglichster Kürze abzumachen, da meiner Meinung nach grösste Kürze nicht immer mit grösster, dem Neulinge vor Allem Noth thuender, Einsicht in den Gegenstand Hand in Hand geht, und ich nicht ausschliesslich einen schon völlig ausgebildeten Leser vor Augen hatte. Darum wird man auch jede einzelne Aufgabe immer nur auf die directeste und ungesuchteste Weise angegriffen finden, so wie ich mir allerwärts eine möglichst gleichartige Behandlung verwandter Gegenstände zum Ziele setzte; auch habe ich es nicht versäumt, die verschiedenen Gleichungsformen einzeln aufzustellen, obgleich diess vielfach zu vermeiden gewesen wäre, wiewohl nach meinem Dafürhalten nicht ohne Beeinträchtigung der Deutlichkeit, wenigstens bei dieser ersten Vorführung des Gegenstandes. Ich habe überhaupt mehr auf die umständliche Anzeige der verschiedenen Mittel und Wege als auf Kürze der Darstellung mein Augenmerk gerichtet, indem ich den Leser in die Mitte der Sache hinein, nicht aussen herum führen wollte. Auf diese Weise aber glaube ich selbst für den ersten Anfänger in der analytischen Geometrie verständlich genug geworden zu sein, ja ich gebe mich der Hoffnung hin, dadurch, dass ich ihm die Gegenstände überall nur in ihrer natürlichsten Beleuchtung vorführe, selbst solche Stellen ihn im guten Lichte sehen zu lassen, die ihm anderwärts vielleicht noch von einer Seite her dunkel geblieben sind, vorausgesetzt jedoch, dass er sich durch die Mehrheit der Dinge nicht irre machen lasse. Was in dieser Beziehung mir eigenthümlich angehört, mag der Kundige sich selber sagen; es ist nicht meine Absicht auf dergleichen Nebensachen irgend einen Anspruch zu begründen. Strenge in der Darstellung wird man, denk ich, nicht vermissen, obgleich ich nach dem Vorgange meines Bruders den von Lagrange geebneten Weg, den man gegenwärtig im Verdachte der Unbrauchbarkeit zu erhalten sich Mühe zu gehen scheint, betreten habe; und hierauf ein Gewicht zu legen, werde ich, ungeachtet so vieler und, in so weit sie von Uebersetzern herrühren, äusserlich sehr starker Widersprüche, durch eine innere, laute Stimme angetrieben. Dieser na-

türlichste Weg macht allerdings bei Ausnahmen von der Regel besondere Maassnahmen erforderlich; es will mich jedoch bedünken, als ob auch jeder andere, erkünsteltere Weg am Ende immer doch auch auf die gleiche Anforderung, die in der Natur der Sache ihren Grund zu haben scheint, zurückkommen müsste; deren zerbröckelte Einstreuung an einzelnen Stellen der Hauptstrasse aber ist jedenfalls dem Ueberblick nicht günstig. Die Convergenz der Reihen bei allgemeinen Betrachtungen im Auge behalten zu wollen, ist, auch wenn es überhaupt nöthig wäre, hier schon darum überflüssig, weil die Veränderlichen, nach deren Potenzen die Reihen fortschreiten, stets nur unendlich kleine Werthe anzunehmen brauchen, die Reihen also, so lange nicht jene Ausnahmen eintreten, nothwendigerweise convergiren, und zwar im höchsten Grade, so dass sie aufhören Reihen zu sein.

In Fällen, wo die analytische Geometrie am schiefwinkligen Coordinatensysteme doppelte Formen in sich aufzunehmen aus irgend einem Grunde abgehalten wird, und doch der Richtungsgleichungen, — wie ich die Bedingungsgleichungen zwischen den Projectionszahlen einer Richtung an drei beliebigen Axen genannt habe, — sich nicht entschlagen kann, werden ihre Rechnungsergebnisse zuletzt verwickelter als am rechtwinkligen Systeme. Um Beispiele dieser Art nicht zu übergehen, habe ich noch den vierten Abschnitt beigefügt, welcher der am wenigsten ausgearbeitete ist, und von den Linien und Flächen der zweiten Ordnung handelt, in so weit man blos die Umformung ihrer Gleichungen in's Auge fasst; um aber sicher die hier aufsteigenden Unbequemlichkeiten nicht zu verdecken, habe ich die Erleichterungen, welche solche Betrachtungen aus der Natur der berührenden Geraden und Ebenen schöpfen können, zu benützen unterlassen, wodurch der Vortheil eines stärkern Hervortretens der neuen Formen erreicht werden konnte. In diesem Abschnitte hat sich eine, meines Wissens bisher noch unbehandelt gebliebene und doch sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung geltend gemacht, deren Durchführung in dem letzten Paragraphen und von einem andern Gesichtspuncte aus schon früher theils in Nr. 224. bis Nr. 227. theils in Nr. 230. versucht worden ist. Diese Durchführung ist zwar noch ziemlich ungelenk, allein ich glaube nicht, dass die analytische Geometrie im rechtwinkligen Systeme sie ohne Weiteres in viel geschmeidigerer Weise wird geben können; vielmehr vermuthe ich, dass zu einem leichtern Gange derselben im rechtwinkligen wie im schiefwinkligen Systeme noch einige Zwischenglieder nöthig sind, deren Mangel wohl Schuld gewesen sein mag, warum die fragliche Eigenschaft bisher noch nicht zur Sprache gekommen ist. Die Resultate der Aufgabe, von welcher hier die Rede ist, sind von sehr eigenthümlicher Art und namentlich in ihren Restrictionen so unerwartet, dass man an einigen Stellen vorgefallene Rechnungsfehler zu vermuthen geneigt sein dürfte. Obgleich die von mir gegebene Lösung ihr Ziel schier bis an's Ende verfolgt, so deutet doch schon die unvollständige und ungleichförmige Art der Einsammlung ihrer verschiedenen Ergebnisse darauf hin, dass hier noch eine ergiebige Nachlese zu erwarten steht; ich habe Anstand genommen, auf einen Gegenstand, der

neben meinem eigentlichen Ziele lag, noch mehr Zeit zu verwenden. Den Theil dieser Untersuchung, welcher sich mit den Diametralgleichungen befasst, und der im letzten Paragraph unter dem Buchstaben A) gegeben worden ist, habe ich noch etwas weiter fortgeführt, als der eigentliche Zweck der Aufgabe es verlangte, um auf den Punct zu kommen, wo die grösseren Verwickelungen am schiefwinkligen Systeme in Vergleich zum rechtwinkligen, da wo einseitige Formen gebraucht werden, sich erst recht augenfällig zeigen.

Der zweite Band, dessen einzelne Abschnitte fast alle bereits überarbeitet vorliegen und der, obgleich er am schiefwinkligen Coordinatensysteme sich fortbildet, von der bisherigen Mechanik im rechtwinkligen Coordinatensysteme nur wenig abweicht, wird diesem bald nachfolgen können. Zu einer ähnlichen Vorherbestimmung der Zeit kann ich mich hinsichtlich des dritten Bandes nicht verbinden, weil gehäufte Berufsgeschäfte mir ein gleichmässiges Fortarbeiten unmöglich, und Schriften seiner Art jede Uebereilung doch unräthlich machen. Daraus kann indessen dem Publikum kein Nachtheil erwachsen, indem er, der dritte Band, und, wenn mir Gott das Leben dazu schenkt, auch noch ein vierter, eben so wie schon jeder der zwei ersten, stets einen in sich abgeschlossenen Inhalt bekommen wird.

Schliesslich darf ich den Dank nicht verschweigen, welchen wir beide, mein Leser und ich, dem vom mathematischen Publikum aus mehrern gewichtigen Abhandlungen bereits vortheilhaft gekannten Professor Ullherr, einem Schüler unserer Anstalt, auf den sie stolz sein darf, meinem jetzigen Collegen und Freunde, für die grosse Mühe und Sorgfalt schulden, womit derselbe den Druck des vorliegenden Bandes überwachte, und mit wissenschaftlichem Ueberblicke eine Correctheit in ihm zu Stande brachte, die bei einem Werke dieser Art so schwierig zu erreichen und doch so wünschenswerth ist.

Nürnberg, im Juli 1849.

Der Verfasser.

Grundriss der analytischen Geometrie im beliebigen Coordinatensysteme.

Erster Abschnitt.

Darstellung der Puncte und Richtungen im beliebigen Coordinatensysteme.

§. 1.

Begriff des Projectionssystems und zunächst liegende Eigenschaften der Projectionen und Projectionszahlen.

1) **D**enkt man sich durch einen mit dem Raume fest verknüpften Punkt A, dem wir den Namen der Projectionsspitze geben, in unabänderlicher Weise eine Ebene, die wir die Projectionsebene nennen, und gleichzeitig eine diese Ebene schneidende Gerade, welche die Projectionsaxe oder auch, wo es zu keinem Missverständnisse Anlass geben kann, schlechtweg die Axe heissen soll, gelegt, so kann man diese mit dem Raume fest verbundenen Elemente dazu benützen, um mittelst derselben die gegenseitige Lage aller im Raume befindlichen Puncte festzustellen. Wir nennen die Verknüpfung der durch die Projectionsspitze A gelegten Projectionsaxe mit der durch denselben Punct gelegten Projectionsebene ein Projectionssystem, und zwar ein schiefes oder senkrechtes, je nachdem die Projectionsaxe auf der Projectionsebene schief oder senkrecht steht.

2) Fassen wir einen irgendwo im Raume liegenden Punct O ins Auge und legen wir durch ihn eine mit der Projectionsebene parallele Ebene, welche die projicirende Ebene heissen mag, so wird diese die Projectionsaxe in einem Puncte P schneiden, den wir die schiefe oder die senkrechte Projection des Punctes O auf die Projectionsaxe nennen werden, je nachdem das Projectionssystem ein schiefes oder ein senkrechtes ist. Das Stück AP der Axe, welches zwischen der Projectionsspitze A und der Projection P des Punctes O liegt, soll die zur Projectionsaxe gehörige Ordinate des Punctes O genannt werden; die zur Projectionsaxe gehörige Ordinate eines Punctes ist demnach nichts anderes als dessen Entfernung von der Projectionsebene in der Richtung der Projectionsaxe gemessen. Je nachdem die Ordinate eines Punctes einem schiefen oder einem senkrechten Projectionssysteme angehört, nennen wir sie eine schiefe oder senkrechte.

Weil indessen eben sowohl auf der einen wie auf der andern Seite der Projectionsebene Puncte im Raume sich vorfinden können, und die Projection eines Punctes mit diesem Puncte stets auf einer und derselben Seite von der Projectionsebene sich bildet, so werden die in der Projectionsaxe entstehenden Projectionen der verschiedenen Puncte bald auf der einen, und bald

auf der andern Seite der Projectionsebene zu liegen kommen. Deshalb wird eine Unterscheidung dieser beiden Seiten der Projectionsebene nöthig, und wir machen sie in der Weise, dass wir die eine Seite die **positive**, und die andere die **negative** Seite der Projectionsebene nennen. Eben so wollen wir diejenige Richtung der Projectionsaxe, welche von A aus in die positive Seite der Projectionsebene hineinführt, die **positive** nennen, und **negative** die, welche von A aus auf der **Projectionsaxe** in die negative Seite der Projectionsebene hinein zeigt, wobei wir da, wo schlechtweg von der Richtung der Projectionsaxe gesprochen wird, immer nur deren positive verstanden wissen wollen. Die Stelle der Projectionsaxe, wo die Projection eines Punctes hinfällt, wird durch die Ordinate dieses Punctes nur dann völlig bestimmt angezeigt, wenn man ausser der Länge der Ordinate noch die Seite der Projectionsebene kennt, auf der sie liegt, welchen Umstand man einfach dadurch zu bezeichnen pflegt, dass dem die Länge der Ordinate darstellenden Werthe das Vorzeichen + oder — beigegeben wird, je nachdem die Ordinate auf der positiven oder negativen Seite der Projectionsebene liegt. Wir verstehen demnach unter der Ordinate eines Punctes von jetzt an immer seine in der Richtung der Axe gemessene Entfernung von der Projectionsebene in Verbindung mit dem Vorzeichen, wodurch die Seite der Projectionsebene bestimmt wird, auf welcher der Punct liegt, zu dem sie gehört, und nennen dem gemäss die Ordinate eine **positive** oder **negative**, je nachdem sie das Vorzeichen + oder — hat.

Wir sagen von einem Puncte, dass er im **Sinne der Projectionsaxe weiter vorwärts oder weiter rückwärts im Raume liege als ein anderer O**, je nachdem man längs der Projectionsaxe in ihrer positiven oder negativen Richtung sich fortbewegen muss, um von der Projection des Punctes O zu der des Punctes O_1 zu gelangen. In Folge dieser Ausdrucksweise nun gehen aus der so eben gegebenen Definition der Ordinate unmittelbar folgende zwei sich einander gegenseitig ausschliessende Sätze hervor:

a) Ein Punct O_1 liegt im Sinne der Projectionsaxe weiter vorwärts im Raume als ein Punct O,
 - α) wenn die zu O und O_1 gehörigen Ordinaten beide positiv sind, erstere aber kleiner als letztere ist;
 - β) wenn die zu O und O_1 gehörigen Ordinaten beide negativ sind, der absolute Werth der erstern aber grösser als der der andern ist;
 - γ) wenn die zu O gehörige Ordinate negativ und die zu O_1 gehörige positiv ist.

b) Ein Punct O_1 liegt im Sinne der Projectionsaxe weiter rückwärts im Raume als ein Punct O,
 - α) wenn die zu O und O_1 gehörigen Ordinaten beide positiv sind, erstere aber grösser als letztere ist;
 - β) wenn die zu O und O_1 gehörigen Ordinaten beide negativ sind, der absolute Werth der erstern aber kleiner als der der andern ist;
 - γ) wenn die zu O gehörige Ordinate positiv und die zu O_1 gehörige negativ ist.

3) Fassen wir eine irgendwo im Raume liegende Gerade ins Auge, deren Endpuncte O und O_1 sind, weshalb wir die Gerade durch OO_1 vorstellen können, und bezeichnen wir durch P und P_1 die Projectionen der Puncte O und O_1 auf die Axe, so heisst das Stück PP_1 der Axe, welches zwischen P und P_1 liegt, die **Projection der Geraden OO_1 auf die Axe**, und wir nennen die Projection PP_1 eine **schiefe** oder eine **senkrechte**, je nachdem P und P_1 schiefe oder senkrechte Projectionen der Puncte O und O_1 sind. Es stellt sonach die Projection einer Geraden auf die Axe nichts anders vor, als den in der Richtung dieser Axe gemessenen Abstand der beiden Endpuncte dieser Geraden von einander.

Werden die Ordinaten der beiden Endpuncte O und O_1 der Geraden OO_1, falls sie schiefe sind, durch x und x_1, falls sie senkrechte sind, durch u und u_1 bezeichnet, so wird die Projection dieser Geraden im ersten Falle durch $x_1 - x$, im andern Falle durch $u_1 - u$ dargestellt, und zwar trägt dieser Ausdruck das Vorzeichen + oder — in sich, je nachdem der Punct O_1 weiter vorwärts oder weiter rückwärts im Raume als der Punkt O in Bezug zu der Projectionsaxe liegt. Man überzeugt sich nämlich auf der Stelle, dass der Ausdruck $x_1 - x$ oder $u_1 - u$ positiv wird in allen den in voriger Nummer unter a) aufgeführten Fällen, also wenn der Punct O_1 weiter vorwärts als der Punct O im Sinne der Projectionsaxe liegt; und eben so, dass der Ausdruck $x_1 - x$ oder $u_1 - u$ negativ wird in allen den in voriger Nummer unter b) aufgeführten Fällen, also wenn der Punct O_1 im Sinne der Projectionsaxe weiter rückwärts als der Punct O liegt. Ferner sieht man ohne Mühe ein, dass $x_1 - x$ oder $u_1 - u$, abgesehen vom Vorzeichen, die Differenz der in x_1 und x oder u_1 und u enthaltenen absoluten Werthe liefere, wenn x_1 und x oder u_1 und u einerlei Vorzeichen in sich tragen, und dass dann O_1 und O auf der gleichen Seite der Projectionsebene liegen, also der Abstand von O_1 zu O die Differenz der Abstände von O_1 und O zur Projectionsebene in der Richtung der Axe gemessen sei; und eben so, das $x_1 - x$ oder $u_1 - u$, abgesehen vom Vorzeichen, die Summe der in x_1 und x oder u_1 und u enthaltenen absoluten Werthe liefere, so oft x_1 und x oder u_1 und u entgegengesetzte Vorzeichen in sich tragen, und dass in diesem Falle O_1 und O auf entgegengesetzten Seiten der Projectionsebene liegen, also der Abstand von O_1 zu O die Summe der Abstände von O_1 und O zur Projectionsebene in der Richtung der Axe gemessen sei.

Weil $x_1 - x$ und $x - x_1$ oder $u_1 - u$ und $u - u_1$ zwar dieselben absoluten Werthe, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen in sich tragen, so werden wir, um alle Zweideutigkeit zu vermeiden, unter $x_1 - x$ oder unter $u_1 - u$ die Projection der Länge OO_1 in der Richtung von O nach O_1 genommen verstehen und unter $x - x_1$ oder unter $u - u_1$ die Projection derselben Länge in der Richtung von O_1 nach O genommen. Es folgt hieraus, dass die Projectionen von einer und derselben Länge in ihren beiden einander entgegengesetzten Richtungen genommen gleiche und entgegengesetzte Grössen sind, deren Summe Null beträgt. Deswegen muss bei Angaben der Projectionen von Längen durch die Ordinaten ihrer Endpuncte immer auf die Richtung Acht gegeben werden, die dabei zu Grunde liegt, und um diese Richtung in vielen Fällen leichter bezeichnen zu können, werden wir diejenigen Richtungen paralleler gerader Linien, welche nach derselben Seite des Raumes hinzielen, gleichläufige nennen, und gegenläufige diejenigen, welche nach entgegengesetzten Seiten des Raumes hinzielen, welche Benennung wir auch auf solche Gerade übertragen wollen, die wir gleichzeitig mit der einen von ihren beiden Richtungen ins Auge fassen.

4) Führt man neben dem bisherigen ein neues Projectionssystem ein, dessen Spitze nicht mehr der Punct A ist, sondern irgend ein anderer Punct O, durch welchen eine der vorigen parallele Projectionsebene und eine der vorigen parallele und dabei gleichläufige Projectionsaxe gelegt wird, und bezeichnet ξ die schiefe, η die senkrechte Ordinate des Punktes O zur alten Projectionsaxe, stellt ferner O_1 einen zweiten beliebigen Punct vor, dessen Ordinate zur alten Axe durch x oder u und zur neuen Axe durch x_0 oder u_0 bezeichnet werden soll, je nachdem die Projectionssysteme schief oder senkrecht sind, so hat man stets, was auch die Stellung der Puncte A, O und O_1 zu einander sein mag

$$x_0 = x - \xi \text{ oder } u_0 = u - \eta, \tag{1}$$

wovon man sich auf folgende Weise Ueberzeugung verschaffen kann.

Erstlich ist der Nr. 3. zufolge $x-\xi$ oder $u-\eta$ die Projection der von O bis O_1 reichenden Geraden auf die alte Projectionsaxe, und zwar mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem der Punct O_1 weiter vorwärts oder weiter rückwärts als der Punct O im Sinne der alten Axe liegt, und x_0 oder u_0 ist die Ordinate des Punctes O_1 an der neuen Axe, welche das Vorzeichen + oder — hat, je nachdem die Projection des Punctes O_1 auf die positive oder negative Seite der neuen Projectionsebene fällt, d. h. je nachdem der Punct O_1 weiter vorwärts oder weiter rückwärts im Raume als der Punct O im Sinne der neuen Projectionsaxe liegt. Weil aber die projicirenden Ebenen in beiden Projectionssystemen einander parallel laufen und die Axen beider Systeme gleichläufig sind, so liegt jeder Punct im Sinne der einen Projectionsaxe weiter vorwärts oder weiter rückwärts, als ein anderer in denselben Fällen, wo es im Sinne der andern Projectionsaxe geschieht; es tragen mithin x_0 oder u_0 und $x-\xi$ oder $u-\eta$ stets dasselbe Vorzeichen in sich.

Sodann tragen aber auch die Grössen x_0 und $x-\xi$ oder u_0 und $u-\eta$ stets dieselben absoluten Werthe in sich, denn die den Punct O_1 auf die neue Axe projicirende Ebene fällt, wegen des Parallelismus der Projectionsebenen in beiden Systemen, mit der denselben Punct auf die alte Axe projicirenden Ebene zusammen, und da die den Punct O auf die alte Axe projicirende Ebene durch die Spitze des neuen Projectionssystems geht, so werden die Ordinaten x_0 oder u_0 und die Projectionen $x-\xi$ oder $u-\eta$ durch dieselben beiden parallelen Ebenen begrenzt, und haben dieserwegen und weil sie Theile von parallelen Linien sind, einerlei Länge.

5) Sind O und O_1 zwei Puncte, deren Ordinaten durch x und x_1, wenn es schiefe sind, und durch u und u_1, wenn es senkrechte sind, bezeichnet werden, und stellt r die Länge des durch O und O_1 begrenzten Stücks der geraden Linie $O\,O_1$ vor, so nennen wir den Quotienten

$$\frac{x_1-x}{r} \text{ oder } \frac{u_1-u}{r}$$

das Projectionsverhältniss der von O nach O_1 zielenden Richtung der Geraden $O\,O_1$, oder auch kurzweg die Projectionszahl der Richtung $O\,O_1$, wobei die so bezeichnete Richtung immer von dem zuerst gesetzten Puncte nach dem auf ihn folgenden hin zu nehmen ist, und wir nennen die Projectionszahl eine schiefe oder eine senkrechte, je nachdem sie aus schiefen oder senkrechten Ordinaten hervorgegangen ist. Machen wir es uns zur Regel, die Entfernung zweier Puncte, wie O und O_1, von einander immer nur in absoluter Bedeutung zu nehmen, so dass r stets nur eine positive Zahl vorstellt, so trägt die Projectionszahl $\frac{x_1-x}{r}$ oder $\frac{u_1-u}{r}$ jedesmal dasselbe Vorzeichen in sich, welches der Projection x_1-x oder u_1-u angehört, und ist mithin eine positive oder negative Grösse, je nachdem der Punct O_1, nach welchem die Richtung von O aus hinstrebt, im Sinne der Projectionsaxe weiter vorwärts oder weiter rückwärts liegt als der Punct O, von welchem die Richtung ausgeht. Unter dieser Voraussetzung haben also die zu den Richtungen $O\,O_1$ und $O_1\,O$ gehörigen Projectionszahlen zwar einerlei absolute Werthe, aber entgegengesetzte Vorzeichen. In dem besondern Falle, wo der Punct O mit der Projectionsspitze zusammenfällt und dem zur Folge $x=o$ wird, nimmt die Projectionszahl der Richtung $O\,O_1$ die Gestalt

$$\frac{x_1}{r} \text{ oder } \frac{u_1}{r},$$

und die der Richtung O_1O die Gestalt

$$-\frac{x_1}{r} \text{ oder } -\frac{u_1}{r}$$

an. Bezeichnet also x die schiefe oder u die senkrechte Ordinate eines Punctes O im schiefen oder senkrechten Projectionssysteme und r dessen Entfernung von der Projectionsspitze A, so ist $\frac{x}{r}$ oder $\frac{u}{r}$ stets die schiefe oder senkrechte Projectionszahl der durch A und O gelegten Geraden, in der Richtung von A nach O genommen, und $-\frac{x}{r}$ oder $-\frac{u}{r}$ die derselben Geraden, in der Richtung von O nach A genommen.

Macht man den Punct O, dessen Ordinate an der Axe eines ursprünglich zu Grund gelegten Projectionssystems ξ oder η ist, zur Spitze eines neuen Projectionssystems, dessen Projectionsebene der des alten Systems parallel und dessen Projectionsaxe mit der des alten Systems parallel und gleichläufig ist, und bezeichnet man durch x_0 die schiefe oder durch u_0 die senkrechte Ordinate des Punctes O_1 an dieser neuen Axe, während x oder u die Ordinate des Punctes O_1 an der ursprünglichen Axe vorstellt, so stellt, wenn r den Abstand der Puncte O und O_1 bezeichnet, $\frac{x-\xi}{r}$ oder $\frac{u-\eta}{r}$ den so eben gegebenen Definitionen gemäss die Projectionszahl der Richtung OO_1 an der ursprünglichen Axe vor, so wie $\frac{x_0}{r}$ oder $\frac{u_0}{r}$ die Projectionszahl derselben Richtung an der neuen Axe ausspricht, und es ist der Gleichung (1.) zufolge $\frac{x-\xi}{r}=\frac{x_0}{r}$ oder $\frac{u-\eta}{r}=\frac{u_0}{r}$, woraus folgt, dass dieselbe Richtung an allen Projectionssystemen, deren Projectionsebenen parallel und deren Projectionsaxen parallel und gleichläufig sind, eine und dieselbe Projectionszahl liefert.

Hebt man in der durch O und O_1 gelegten Geraden neben dem Puncte O_1 noch irgend einen andern O_2 heraus, welcher auf derselben Seite von O als der O_1 liegt, und bezeichnet man durch $\mathfrak{x}_0$ die schiefe oder durch $\mathfrak{u}_0$ die senkrechte Ordinate des Punctes O_2 zur neuen Projectionsaxe, so wie durch $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{u}$ die schiefe oder senkrechte Ordinate an der ursprünglichen Projectionsaxe, so ist, wenn $\mathfrak{r}$ den absoluten Werth der Entfernung, in welcher die Puncte O und O_2 zu einander stehen, bezeichnet, in gleicher Weise

$$\frac{\mathfrak{x}-\xi}{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{r}} \text{ oder } \frac{\mathfrak{u}-\xi}{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{u}_0}{\mathfrak{r}}$$

die Projectionszahl der Richtung OO_2 an der neuen sowohl wie an der ursprünglichen Axe und es hat diese Projectionszahl mit der vorigen einerlei Vorzeichen, wenn der Punct O_2 auf derselben Seite von O als der O_1 liegt, wie vorausgesetzt worden ist. Es haben aber auch die im Zähler und Nenner der beiderlei Quotienten dargestellten Längen, nämlich $x-\xi$ und $\mathfrak{x}-\xi$, x_0 und $\mathfrak{x}_0$, r und $\mathfrak{r}$ oder $u-\eta$ und $\mathfrak{u}-\eta$, u_0 und $\mathfrak{u}_0$, r und $\mathfrak{r}$, einerlei Verhältniss zu einander, weil diese Längen, da die Puncte O, O_1 und O_2 alle drei in einer und derselben Geraden liegen, durch parallele Ebenen von denselben zwei geraden Linien abgeschnitten werden, folglich sind die Projectionszahlen $\frac{x-\xi}{r}=\frac{x_0}{r}$ und $\frac{\mathfrak{x}-\xi}{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{r}}$ oder $\frac{u-\eta}{r}=\frac{u_0}{r}$ und $\frac{\mathfrak{u}-\eta}{\mathfrak{r}}=\frac{\mathfrak{u}_0}{\mathfrak{r}}$ stets eine und dieselbe Zahl. Wäre der Punct O_2 in der durch O und O_1 gelegten Geraden auf der Seite von O gewählt worden, die der entgegengesetzt ist, auf welcher O_1 liegt, so hätte $\mathfrak{x}_0$ oder $\mathfrak{u}_0$

das entgegengesetzte Vorzeichen von dem erhalten, welches x_0 oder u_0 in sich trägt, es hätten sonach die beiden Projectionsverhältnisse $\frac{x_0}{r} = \frac{x - \xi}{r}$ und $\frac{\mathfrak{x}_0}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{x} - \xi}{\mathfrak{r}}$ oder $\frac{u_0}{r} = \frac{u - \eta}{r}$ und $\frac{u_0}{\mathfrak{r}} = \frac{u - \eta}{\mathfrak{r}}$ jetzt entgegengesetzte Vorzeichen angenommen, aber doch immer noch dieselben absoluten Werthe behalten, weil die in $\mathfrak{x}_0$ oder u_0 und $\mathfrak{r}$, sowie die in x_0 oder u_0 und r enthaltenen Längen immer noch durch parallele Ebenen von denselben zwei geraden Linien abgeschnitten werden. Es geht hieraus die Folgerung hervor, *dass es für die Bestimmung der zu einer bestimmten Richtung $O O_1$ gehörigen Projectionszahl ganz gleichgültig bleibt, in welcher Entfernung von dem Punct O man den Punct O_1 in der durch O und O_1 gehenden Geraden auch wählen mag, wenn derselbe nur auf derselben Seite von O liegt, nach welcher die von O ausgehend gedachte Richtung hinweist, und dass jeder auf der entgegengesetzten Seite in derselben Geraden für O_1 genommene Punct zwar eine Projectionszahl von dem gleichen absoluten Werthe, jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen liefert.*

Zieht man durch die Projectionsspitze A des alten ursprünglichen Projectionssystems eine Gerade parallel mit der durch O und O_1 gelegten, und stellt A_1 einen Punct dieser Geraden vor, welcher, mit A verglichen, so liegt, dass die beiden Richtungen $A A_1$ und $O O_1$ parallel und gleichläufig sind, so liefert die Richtung $A A_1$ an der alten Projectionsaxe vollkommen dieselbe Projectionszahl wie die Richtung $O O_1$ an der neuen Axe, weil die Gestalten in den beiden Fällen einander völlig ähnlich werden und von der Entfernung der Puncte A und A_1 oder der O und O_1 von einander bei der Bestimmung der Projectionszahl nichts abhängt. Da aber schon vorhin gezeigt worden ist, dass die Richtung $O O_1$ an den neuen Axen das gleiche Projectionsverhältniss liefert, wie an den alten Axen, so folgt, *dass die parallelen und gleichläufigen Geraden $A A_1$ und $O O_1$ an dem Projectionssystem, dessen Spitze A ist, ein und dasselbe Projectionsverhältniss geben.* Es ist demnach das Projectionsverhältniss der Richtung $O O_1$ auch von der Stelle O, von welcher wir uns bisher die Richtung ausgehend gedacht haben, völlig unabhängig, so dass man anstatt des Punctes O jeden andern nehmen kann, wenn nur die von diesem andern Puncte ausgehende Richtung mit der $O O_1$ parallel und nach derselben Seite des Raums hingekehrt ist. Diesen Betrachtungen entsprechend werden wir von jetzt an solche Richtungen als gleiche ansehen, welche parallelen und gleichläufigen Geraden angehören.

6) Die bisher entwickelten Eigenschaften der Projectionszahl finden statt, wie immer auch das Projectionssystem beschaffen sein mag; das rechtwinklige Projectionssystem giebt aber noch zu einigen besondern Betrachtungen Anlass. Stellen wir uns nämlich in dem Projectionssystem, dessen Spitze A ist, Projectionsebene und Axe senkrecht auf einander stehend vor und zwei im Raume liegende Puncte O und O_1, deren zur Axe dieses Systems gehörige Ordinaten u und u_1 sind, und deren gegenseitige Entfernung r ist, so ist die Projectionszahl der Richtung $O O_1$ in diesem rechtwinkligen Systeme wieder

$$\frac{u_1 - u}{r}$$

und man findet völlig die gleiche Projectionszahl, wenn man anstatt der Richtung $O O_1$ die $A A_1$ nimmt, welche durch die Spitze A mit der $O O_1$ parallel und gleichläufig gehend gedacht wird.

Stellt nun u_1 die Ordinate des Punctes A_1 vor und r die absolute Entfernung der beiden Puncte A und A_1 von einander, so ist

$$\frac{u_1}{r}$$

die Projectionszahl der Richtung $A A_1$ und also der $\frac{u_1 - u}{r}$ völlig gleich. Es fällt aber die Projection des Punctes A_1 auf die positive oder negative Seite der Projectionsebene dieses rechtwinkligen Systems und gleichzeitig damit wird die Ordinate u_1, somit auch das Projectionsverhältniss $\frac{u_1}{r}$ selbst positiv oder negativ, je nachdem die Richtung $A A_1$ mit der positiven Richtung der Projectionsaxe einen spitzen oder stumpfen hohlen Winkel bildet. Erwägt man nun noch, dass die projicirenden Ebenen im rechtwinkligen Projectionssysteme senkrecht auf der Projectionsaxe stehen, dass also die Ordinate, deren Länge $\pm u_1$ ist, mit der Geraden $A A_1$, deren absolute Länge r ist, ein rechtwinkliges Dreieck bildet, dessen Hypotenuse die Gerade $A A_1$ ist, und dessen von der Ordinate und $A A_1$ eingeschlossener Winkel entweder der von der Richtung $A A_1$ und der positiven Axenrichtung gebildete hohle Winkel, oder dessen stumpfer Nebenwinkel ist, je nachdem A_1 auf der positiven oder negativen Seite der Projectionsebene liegt, d. h., je nachdem u_1 eine positive oder negative Zahl ist, so überzeugt man sich, dass $\frac{u_1}{r}$ in jedem Falle der Kosinus des hohlen Winkels ist, den die Richtung $A A_1$ mit der positiven Axenrichtung bildet. Folglich ist die Projectionszahl einer Richtung $O O_1$ im rechtwinkligen Systeme d. h. die senkrechte Projectionszahl dieser Richtung unter allen Umständen der Kosinus des hohlen Winkels, den eine mit der $O O_1$ parallele und gleichläufige, durch die Projectionsspitze A gelegte Richtung mit der positiven Axenrichtung bildet. Aus dieser Eigenthümlichkeit der Projectionszahl im rechtwinkligen Projectionssysteme folgt nun von selbst die zweite, dass die Projectionszahl, welche eine Richtung $O O_1$ im rechtwinkligen Projectionssysteme liefert, die gleiche ist wie die, welche die positive Axenrichtung dieses Systems in einem andern rechtwinkligen Projectionssystem liefert, dessen positive Axenrichtung die Richtung $O O_1$ ist.

7) Denkt man sich eine Reihe von Puncten

$$O_1, O_2, O_3 \ldots\ldots O_r, O_{r+1} \ldots\ldots O_{n-1}, O_n,$$

deren zu einem beliebigen schiefen oder senkrechten Projectionssysteme gehörige Ordinaten in derselben Aufeinanderfolge

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_r, x_{r+1}, \ldots\ldots x_{n-1}, x_n \text{ oder}$$
$$u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_r, u_{r+1}, \ldots\ldots u_{n-1}, u_n$$

sind, so ist

$x_2 - x_1$ oder $u_2 - u_1$ die Projection der Geraden $O_1 O_2$ in der Richtung von O_1 nach O_2 genommen
$x_3 - x_2$ „ $u_3 - u_2$ „ „ „ „ $O_2 O_3$ „ „ „ „ O_2 „ O_3 „
.
.
.
$x_{r+1} - x_r$ „ $u_{r+1} - u_r$ „ „ „ „ $O_r O_{r+1}$ „ „ „ „ O_r „ O_{r+1} „
.
.
$x_n - x_{n-1}$ „ $u_n - u_{n-1}$ „ „ „ „ $O_{n-1} O_n$ „ „ „ „ O_{n-1} „ O_n „

Der Minuend einer jeden von den vorstehenden Differenzen ist dem Subtrahenden der unmittelbar unter ihr stehenden Differenz gleich, deswegen ist die Summe aller der einen $x_n - x_1$ oder $u_n - u_1$ gleich, welche selbst nichts anders als die schiefe oder senkrechte Projection der in der Richtung von O_1 nach O_n genommenen Geraden $O_1 O_n$ ist. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Verbindet man Puncte in beliebiger Anzahl, von jedem zuletzt in die Verbindung eingegangenen zu einem noch ausserhalb der Verbindung gebliebenen Puncte in einer irgendwie bestimmten Aufeinanderfolge übergehend, durch gerade Linien, deren Richtungen in dem Sinne genommen werden, in welchem man bei der Verbindung vom vorhergehenden zum folgenden Punct übergegangen ist, so ist die Summe der Projectionen aller dieser so gerichteten Geraden in jedem beliebigen Projectionssysteme gleich der Projection der einen Geraden, welche den ersten und letzten Punct mit einander verbindet, diese in der Richtung aufgefasst, wie man in ihr vom ersten zum letzten Punct gelangt.

8) Legen wir in irgend einem Projectionssysteme, dessen Spitze A ist, durch den beliebigen Punct O eine Gerade, die wir die projicirende Linie nennen werden, parallel mit der Projectionsaxe, so wird die Projectionsebene von dieser Geraden in einem Puncte Q geschnitten werden, den wir die Projection des Punctes O auf die Projectionsebene nennen wollen. Zieht man von der Projectionsspitze A aus in der Projectionsebene eine Gerade, welche durch die Projection Q des Punctes O auf die Projectionsebene hindurch geht, so heisst das zwischen A und Q liegende Stück AQ dieser Geraden, die zur Projectionsebene gehörige Speiche des Punctes O. Die zur Projectionsebene gehörige Speiche eines Punctes ist sonach nichts anders, als der in der Richtung der Projectionsebene gemessene Abstand dieses Punctes von der Projectionsaxe.

9) Denken wir uns eine irgendwo im Raume liegende Gerade, deren Endpuncte O_1 und O_2 sind, weshalb wir sie durch $O_1 O_2$ vorstellen werden, und bezeichnen wir durch Q_1 und Q_2 die Projectionen der Puncte O_1 und O_2 auf die Projectionsebene, so nennen wir das zwischen Q_1 und Q_2 enthaltene Stück $Q_1 Q_2$ der durch diese Puncte gelegten Geraden die Projection der Geraden $O_1 O_2$ auf die Projectionsebene. Es stellt somit die Projection einer Geraden auf die Projectionsebene nichts anders vor, als den Abstand der beiden Endpuncte dieser Geraden in der Richtung der Projectionsebene gemessen. Aus der hier für die Projection einer Geraden auf die Projectionsebene gegebenen Definition geht hervor, dass die zur Projectionsebene gehörige Speiche eines Punctes nichts anders ist, als die Projection der von diesem Puncte bis zu irgend einem Puncte der Projectionsaxe hingezogenen Geraden auf die Projectionsebene. Nennen wir die von der Projectionsspitze A bis zu irgend einen Punct O gezogene Gerade AO den zum Puncte O gehörigen Strahl, so ist die zu demselben Puncte O gehörige Speiche die Projection des Strahles AO auf die Projectionsebene.

10) Stellen $O_1, O_2, O_3 \ldots . O_{n-1}, O_n$ die auf einander folgenden Eckpuncte einer durch die geraden Linien $O_1 O_2, O_2 O_3, \ldots . O_{n-1} O_n, O_n O_1$ ringsum eingeschlossenen ebenen Figur vor, und $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots . Q_{n-1}, Q_n$ die Projectionen jener Puncte auf die Projectionsebene in derselben Aufeinanderfolge, so heisst die in der Projectionsebene liegende Figur, welche von den Geraden $Q_1 Q_2, Q_2 Q_3, \ldots . Q_{n-1} Q_n, Q_n Q_1$ eingeschlossen wird, die Projection der durch die Geraden $O_1 O_2, O_2 O_3 \ldots . O_{n-1} O_n, O_n O_1$ eingeschlossenen Figur. Der Flächeninhalt einer ebenen Figur steht zu dem ihrer Projection in einem sehr einfachen Verhältnisse, das wir jetzt kennen lernen wollen.

Um zu diesem Verhältnisse in möglichst klarer Weise zu gelangen, nehmen wir zuvörderst an, die projicirte ebene Figur sei ein Dreieck, dessen Eckpuncte durch O_1, O_2 und O_3 vorgestellt werden, und das Projectionssystem, an welchem unsere Betrachtungen geschehen, sei ein rechtwinkliges. Nun ist entweder die Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ der Projectionsebene parallel, dann ist die Projection dieses Dreiecks mit dem projicirten Dreieck congruent und daher der Flächeninhalt der Projection dem des projicirten Dreiecks gleich; oder die Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ ist der Projectionsebene nicht parallel, dann schneiden sich diese beiden Ebenen in einer Geraden, die wir durch das Wort Durchschnitt bezeichnen wollen, und es können folgende zwei Fälle eintreten:

a) Entweder es läuft eine von den Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$, wir wollen setzen die O_1O_2, mit dem Durchschnitt parallel, dann ist auch die ihr entsprechende Seite Q_1Q_2 von der Projection $Q_1Q_2Q_3$ des Dreiecks $O_1O_2O_3$ mit diesem Durchschnitt parallel, was zur Folge hat, dass die Geraden O_1O_2 und Q_1Q_2 gleich und parallel sind; denkt man sich daher durch Q_1Q_2 eine Ebene parallel mit der Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ gelegt, welche die projicirende Linie O_3Q_3 im Puncte R trifft, so ist das Dreieck Q_1Q_2R dem $O_1O_2O_3$ congruent und die Gerade RQ_3 steht senkrecht auf der Ebene des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$, weil unserer Voraussetzung gemäss das Projectionssystem ein rechtwinkliges ist, und deswegen die projicirende Linie O_3Q_3 senkrecht auf der Projectionsebene, also auch senkrecht auf der Projection $Q_1Q_2Q_3$ steht. Zieht man nun von Q_3 aus eine Gerade senkrecht auf Q_1Q_2, welche diese im S schneidet, und verbindet man R und S durch die Gerade RS, so steht auch diese senkrecht auf Q_1Q_2, weswegen RSQ_3 der spitze Neigungswinkel zwischen den Ebenen $Q_1Q_2Q_3$ und Q_1Q_2R, oder zwischen der Projectionsebene und der mit der Q_1Q_2R parallelen Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ ist, welchen spitzen Neigungswinkel wir durch λ bezeichnen wollen. Weil aber RQ_3 senkrecht auf der Ebene $Q_1Q_2Q_3$ steht, also das Dreieck RSQ_3 bei Q_3 rechtwinklig ist, so hat man $SQ_3 = RS.\cos\lambda$, und weil SQ_3 und RS die Höhen der beiden zur gemeinschaftlichen Grundlinie Q_1Q_2 gehörigen Dreiecke $Q_1Q_2Q_3$ und Q_1Q_2R sind, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ gleich $\frac{Q_1Q_2.SQ_3}{2}$ oder gleich $\frac{Q_1Q_2.RS}{2}.\cos\lambda$, und der des Dreiecks Q_1Q_2R oder des ihm congruenten $O_1O_2O_3$ gleich $\frac{Q_1Q_2.RS}{2}$; bezeichnet man daher diesen Flächeninhalt durch M und jenen durch N, so hat man

$$N = M.\cos\lambda,$$

oder mit Worten: der Flächeninhalt von der Projection des Dreiecks $O_1O_2O_3$ ist gleich dem Producte aus dem Flächeninhalt dieses Dreiecks selbst und dem Kosinus des spitzen Neigungswinkels zwischen der Projectionsebene und der Ebene dieses Dreiecks, welches Resultat selbst in dem Falle noch wahr bleibt, wo die Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ mit der Projectionsebene parallel läuft.

b) Oder es läuft keine Seite des Dreiecks $O_1O_2O_3$ mit dem Durchschnitt parallel, dann lässt sich aber durch eine der Ecken dieses Dreiecks eine mit dem Durchschnitt parallele Linie ziehen, welche das Dreieck $O_1O_2O_3$ in zwei andere zerlegt, von denen jedes in dem so eben abgehandelten Falle sich befindet, und deren Summe das Dreieck $O_1O_2O_3$ ausmacht. Diese beiden Theildreiecke liefern zwei Projectionen, deren Summe die Projection des Dreiecks $O_1O_2O_3$ wiedergiebt; bezeichnet man daher durch M_1 und M_2 die Flächeninhalte

jener beiden Theile des Dreiecks $O_1O_2O_3$, und durch N_1 und N_2 die Flächeninhalte ihrer Projectionen, so ist

$$N_1 = M_1 . \cos\lambda \text{ und } N_2 = M_2 . \cos\lambda,$$

wenn λ wieder den spitzen Neigungswinkel zwischen der Projectionsebene und der Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ vorstellt. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen erhält man aber

$$N_1 + N_2 = (M_1 + M_2) . \cos\lambda$$

oder

(2. a.) $$N = M . \cos\lambda,$$

wenn wieder M den Flächeninhalt des Dreiecks $O_1O_2O_3$ und N den seiner Projection bezeichnet, so dass der sub a für ein besonderes Dreieck erwiesene Satz am rechtwinkligen Projectionssysteme jetzt für jedes Dreieck erwiesen ist.

Nachdem das Verhältniss des Flächeninhalts eines Dreiecks zu dem seiner Projection im rechtwinkligen Projectionssysteme aufgefunden worden ist, lässt sich dasselbe leicht auch auf jedes beliebige Projectionssystem ausdehnen. Ist nämlich $O_1O_2O_3$ das beliebig wo im Raume liegende Dreieck, dessen Projection auf die beliebig gegen die Axe geneigte Projectionsebene durch $Q_1Q_2Q_3$ vorgestellt wird, und denkt man sich durch einen beliebigen Punct der Projectionsaxe senkrecht auf dieselbe eine Ebene gelegt, welche von den projicirenden Linien O_1Q_1, O_2Q_2, O_3Q_3 in drei Puncten geschnitten wird, die wir durch R_1, R_2, R_3 bezeichnen wollen, so ist $R_1R_2R_3$ die Projection sowohl von $O_1O_2O_3$ als von $Q_1Q_2Q_3$ auf diese senkrecht zur Axe gelegte Ebene, wenn man sich diese Ebene in Verbindung mit der Axe als ein Projectionssystem vorstellt, das seiner Natur nach ein senkrechtes ist; bezeichnet daher λ_1 den spitzen Neigungswinkel zwischen der Ebene des Dreiecks $O_1O_2O_3$ und der senkrecht zur Axe gelegten, in welcher sich die Puncte $R_1R_2R_3$ befinden, ferner λ_2 den spitzen Neigungswinkel zwischen dieser senkrechten Ebene und der zum schiefwinkligen Systeme gehörigen Projectionsebene, endlich M, N, N′ die Flächeninhalte der Dreiecke $O_1O_2O_3$, $Q_1Q_2Q_3$, $R_1R_2R_3$, so hat man zufolge der beim senkrechten Projectionssystem erhaltenen Gleichung (2. a.) sowohl

$$N' = M\cos\lambda_1, \quad \text{als} \quad N' = N\cos\lambda_2,$$

woraus folgt

(2. b.) $$N\cos\lambda_2 = M\cos\lambda_1,$$

oder mit Worten: Der Flächeninhalt eines Dreiecks multiplizirt mit dem Kosinus des spitzen Neigungswinkels zwischen der Ebene des Dreiecks und der senkrecht zur Axe gelegten ist gleich dem Flächeninhalt der Projection des Dreiecks auf eine beliebig gegen die Axe geneigte Projectionsebene multiplizirt mit dem Kosinus des spitzen Neigungswinkels zwischen dieser und der zur Axe senkrechten Ebene.

Dieser für ein ebenes Dreieck aufgestellte Satz gilt unverändert auch für jede ebene Figur, wie man sogleich gewahr wird, wenn man erwägt, dass jede ebene Figur als aus lauter ebenen Dreiecken zusammengesetzt angesehen werden kann, für welche alle λ oder λ_1 und λ_2 die gleichen Werthe behalten, und dass die zur Summe vereinigten Projectionen dieser Dreiecke die Projection der ebenen Figur wiedergeben; stellt daher M_0 den Flächeninhalt von irgend einer ebenen Figur vor, und N_0 den von der Projection dieser Figur in irgend einem Projectionssysteme, und bedeuten λ_1 und λ_2 die Neigungswinkel, welche die zu M_0 und N_0 gehörigen Ebenen mit der auf der Projectionsaxe senkrechten Ebene bilden, so hat man stets:

(2. c.) $$N_0 . \cos\lambda_2 = M_0\cos\lambda_1,$$

und es sind in dieser Gleichung die (2. a. und b.) schon als specielle Fälle enthalten.

11) Da die zu verschiedenen Puncten gehörigen Speichen in der Projectionsebene rings um die Projectionsspitze herum liegen können, so ist zur genauen Bestimmung der auf die Projectionsebene geworfenen Projectionen von Puncten nicht nur die Länge der zu dieser Projectionsebene gehörigen Speichen, sondern noch ausserdem die Lage dieser Speichen in der Projectionsebene in völlig unzweideutiger Weise erforderlich. Zur Feststellung dieser Lage nun hat man das folgende Mittel in Anwendung gebracht. Man denkt sich in der Projectionsebene eine beliebige, aber mit dieser Ebene fest verbundene und von der Projectionsspitze A ausgehende Richtung, die die feste Richtung heissen mag, und fasst auch bei den Speichen stets nur diejenigen ihrer beiden Richtungen auf, welche von der Projectionsspitze aus nach der Projection des Punctes, zu dem sie gehören, hinstrebt, dann ist die Lage einer Speiche in der Projectionsebene offenbar durch den Winkel gegeben, den die Richtung der Speiche mit der festen Richtung macht, wenn noch die Seite bestimmt wird, nach welcher von der festen Richtung ab die Ebene des Winkels sich in die Projectionsebene hineinlegt. Deswegen unterscheiden wir die beiden Seiten, nach denen hin sich eine von der Projectionsspitze auslaufende Richtung aus der festen Richtung in der Projectionsebene fortbewegen kann, von einander dadurch, dass wir die eine die positive und die andere die negative nennen, und der Zahl, wodurch die Grösse des Winkels, den die feste Richtung mit der Richtung einer Speiche bildet, und den wir den Speichenwinkel nennen wollen, angezeigt wird, das Vorzeichen + oder — beilegen, und sie als positive oder negative Zahl behandeln, je nachdem sich die Ebene dieses Winkels von der festen Richtung ab nach der positiven oder negativen Seite in die Projectionsebene hineinlegt. Bezeichnen w_1 und w_2 die mit dem rechten Vorzeichen versehenen Grössen der Winkel, welche die Richtungen der zu zwei Puncten O_1 und O_2 gehörigen Speichen mit der festen Richtung bilden, so giebt unter allen Umständen $w_2 - w_1$ die Grösse des Winkels zu erkennen, den die beiden Speichenrichtungen mit einander machen; man hat jedoch dabei, um jeder Zweideutigkeit zu entgehen, folgende einzelne Fälle zu unterscheiden:

a) Der Ausdruck $w_2 - w_1$ giebt sich als positive Grösse zu erkennen

α) wenn w_2 und w_1 beide positiv sind und w_2 grösser als w_1 ist, dann hat man als Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in welcher die feste Richtung nicht liegt;

β) wenn w_2 und w_1 beide negativ sind und der absolute Werth von w_2 kleiner als der von w_1 ist, dann hat man wieder als Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in welcher die feste Richtung nicht liegt;

γ) wenn w_2 positiv und w_1 negativ ist, dann aber hat man zur Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in der die feste Richtung liegt;

b) der Ausdruck $w_2 - w_1$ giebt sich als negative Grösse zu erkennen

α) wenn w_2 und w_1 beide positiv sind, und w_2 kleiner als w_1 ist, dann hat man zur Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in welcher die feste Richtung nicht liegt;

β) wenn w_2 und w_1 beide negativ sind, und der absolute Werth von w_2 grösser als der von w_1 ist, dann hat man wieder zur Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in welcher die feste Richtung nicht liegt;

γ) wenn w_2 negativ und w_1 positiv ist, dann aber hat man als Ebene des Speichenwinkels die zu nehmen, in welcher die feste Richtung liegt.

Man kann für Speichenwinkel, die zu Puncten gehören, welche man sich in einer bestimmten dabei aber beliebigen Aufeinanderfolge durch gerade Linien an einander gereiht vorstellt, einen Satz angeben, der den in Nr. 7. aufgestellten völlig ähnlich ist, den wir jedoch, als aus-

ser unserm Wege liegend, nicht weiter berücksichtigen werden. Es genügt hier, darauf aufmerksam gemacht zu haben, wie die Stellung von Puncten im Raume durch die Angabe der Projectionen dieser Puncte gleichzeitig auf eine Projectionsaxe und auf eine Projectionsebene völlig sicher bestimmt werden kann, und wie sich die Stelle der letztern Projectionen durch die Grösse und Lage der Speichen festsetzen lässt. Ausser diesem Mittel zur Feststellung der Puncte im Raume giebt es aber noch ein anderes, mit dem vorigen zwar nahe verwandtes, das jedoch den Vortheil einer grössern Symmetrie für sich hat, und das wir jetzt in seiner ganzen Allgemeinheit kennen lernen wollen.

§. 2.

Begriff des allgemeinen Coordinatensystems und zunächst liegende Eigenschaften der Coordinaten- und Projectionszahlen in ihm.

12) Stellen A X, A X′, A X″ (Fig. 1.) drei von dem Puncte A auslaufende, in beliebigen Richtungen fortgeführte, jedoch nicht in einer und derselben Ebene liegende gerade Linien von unbegrenzter Länge vor, so nennen wir diese, mit dem Raume fest verknüpft gedachte Verbindung der drei Geraden ein allgemeines oder schiefwinkliges Coordinatensystem, den Punct A die Coordinatenspitze, die von A aus nach X, X′, X″ hinzielenden Richtungen A X, A X′, A X″ die Coordinatenaxen und die Ebenen der hohlen Winkel X A X′, X A X″, X′ A X″ die Coordinatenebenen, so wie diese Winkel selbst die Axenwinkel.

Denkt man sich durch einen beliebigen Punct O (Fig. 1.) drei Ebenen parallel mit den drei Coordinatenebenen gelegt, so schneiden diese die drei Coordinatenaxen in drei Puncten B, C, D und begrenzen in Verbindung mit den drei Coordinatenebenen einen parallelepipedischen Raum, dessen Ecken in der Figur durch die Puncte A, B, H, C, D, G, O, F angezeigt werden, so dass A B, D G, C H, F O, A C, B H, D F, G O, A D, C F, B G, H O dessen geradlinige Kanten, und A B H C, D G O F, A B G D, C H O F, A C F D, B H O G dessen parallelogrammförmige Seitenflächen vorstellen. Die Längen A B, A C, A D, welche durch die drei im Puncte O sich vereinigenden, mit den drei Coordinatenebenen parallelen Ebenen von den Axen oder deren Verlängerungen abgeschnitten werden, bestimmen in ihrem Vereine die Lage des Punctes O, weswegen wir sie die allgemeinen oder schiefen Coordinaten des Punctes O an den drei Axen A X, A X′, A X″ nennen. Jede dieser Längen erscheint in dem Parallelepiped, zu welchem sie gehören, viermal. So ist in dem durch die Figur 1. angezeigten Bilde $AB = CH = DG = FO$, $AC = BH = DF = GO$ und $AD = BG = CF = HO$.

Ausser den eben angeführten schiefen nehmen wir in unsere Betrachtungen noch andere Coordinaten auf, die wir zum Unterschiede von jenen die senkrechten nennen wollen. Sie entstehen dadurch, dass man durch den Punct O drei Ebenen legt, die senkrecht auf den drei Axenrichtungen A X, A X′, A X″ stehen, und entweder diese Axen selbst oder deren Verlängerungen in drei Puncten R, S, T schneiden, wir nennen nämlich dann die Stücke A R, A S, A T der Axen, welche durch diese Puncte und die Coordinatenspitze begrenzt werden, die senkrechten Coordinaten des Punctes O an den drei Axen A X, A X′, A X″.

Die Stellung des Punctes O im Raume ist völlig bestimmt, wenn man entweder die Länge seiner drei schiefen oder die Länge seiner drei senkrechten Coordinaten kennt und zugleich von jeder solchen Coordinate weiss, ob sie auf derjenigen von den Axen A X, A X′, A X″, worauf sie sich bezieht, selbst oder auf deren Verlängerung liegt. Den Umstand, ob die Coor-

dinaten eines Punctes auf den Axen selbst oder auf deren Verlängerungen liegen, giebt man einfach dadurch zu erkennen, dass man den die Länge der Coordinaten darstellenden Zahlen im erstern Falle das Vorzeichen +, im andern Falle das Vorzeichen — vorsetzt, und im erstern Falle die Coordinaten positive, im andern Falle negative nennt. Wir werden dem gemäss von jetzt an unter den Coordinaten stets nur jene Längen in Verbindung mit dem ihnen zu gebenden Vorzeichen verstehen. Erinnern wir uns, dass unter Coordinatenebenen diejenigen Ebenen verstanden werden sollen, welche den hohlen, von den Axen AX, AX′, AX″ eingeschlossenen Winkeln XAX′, XAX″, X′AX″ angehören, und nennen wir diejenige Seite der mit den Coordinatenebenen zusammen fallenden unbegrenzten Ebenen, auf welcher der Punct O sich befindet, wenn er innerhalb des von den drei Coordinatenebenen begrenzten kleinern Theil des ganzen Raumes liegt, die positive Seite, so wie die dieser entgegengesetzte die negative Seite jener Ebenen, so folgt von selbst, dass jede einzelne zu einer der drei Coordinatenaxen gehörige schiefe Coordinate eines Punctes positiv oder negativ wird, je nachdem dieser Punct auf der positiven oder negativen Seite der durch die beiden andern Coordinatenaxen gelegten Ebene liegt. Eben so leicht überzeugt man sich, dass die zu den Coordinatenaxen gehörigen senkrechten Coordinaten eines Punctes einzeln positiv oder negativ werden, je nachdem dieser Punct mit der von A auslaufenden Coordinatenaxe, auf welche sich die in Betrachtung genommene Coordinate bezieht, auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite von der unbegrenzten Ebene liegt, die man sich durch die Coordinatenspitze A senkrecht auf diese Coordinatenaxe gelegt denkt.

Noch werden wir des kürzern Ausdrucks halber die gleich Anfangs zu Grund gelegten, von A nach X, X′, X″ hinzielenden Richtungen die positiven Axenrichtungen, oder auch kurzweg die positiven Axen und die denselben Geraden angehörigen, aber von A aus nach der gerade entgegengesetzten Seite hin zielenden Richtungen die negativen Axenrichtungen, oder auch kurzweg die negativen Axen nennen. Es läuft, wie in die Augen springt, wesentlich ganz auf Eins hinaus, ob man bei der anfänglichen Feststellung des Coordinatensystems die Richtungen AX, AX′, AX″ als positive und dann die ihnen entgegengesetzten als negative Axen annimmt, oder ob man irgend drei andere von diesen sechs Richtungen zu positiven und dann die übrigen drei zu negativen Axen macht, vorausgesetzt, dass die drei zu positiven Axen gewählten Richtungen nicht in einer und derselben Ebene liegen.

13) Jedes Coordinatensystem, dessen Axen keine rechten Winkel mit einander bilden, kann angesehen werden als eine Verbindung von drei schiefwinkligen Projectionssystemen, deren Spitzen sämmtlich in der Coordinatenspitze liegen, deren Projectionsaxen die drei Coordinatenaxen und deren Projectionsebenen die drei mit den drei Coordinatenebenen zusammen fallenden unbegrenzten Ebenen sind, und es sind die drei zu diesen drei Projectionssystemen gehörigen Ordinaten eines Punctes offenbar nichts anders, als die drei schiefen Coordinaten desselben Punctes im Coordinatensysteme. Eben so sind aber auch in einem solchen Coordinatensysteme drei rechtwinklige Projectionssysteme enthalten, deren Spitzen sämmtlich in der Coordinatenspitze liegen, deren Axen die drei Coordinatenaxen und deren Projectionsebenen die drei durch die Coordinatenspitze senkrecht auf die drei Coordinatenaxen gelegten unbegrenzten Ebenen sind, und es sind die drei zu diesen drei rechtwinkligen Projectionssystemen gehörigen Ordinaten eines Punctes offenbar nichts anders, als die drei vorhin bezeichneten senkrechten Coordinaten desselben Punctes im Coordinatensysteme. Durch die Vereinigung solcher drei Projectionssysteme in ein einziges Coordinatensystem wird die Möglichkeit herbeigeführt, die Lage

der Puncte im Raume durch lauter Ordinaten, die drei Coordinaten nämlich, zu bestimmen, ohne dass dazu die Betrachtung der Speichen nöthig wäre, wodurch eine grössere Symmetrie der Vorstellungen und Rechnungsausdrücke zu Stande kommt.

Aus der vorstehenden Betrachtung folgt, dass wir den Punct A im Coordinatensystem eben so wohl Projectionsspitze, wie Coordinatenspitze, und die Richtungen AX, AX′, AX″ eben so wohl positive Projectionsaxen, wie positive Coordinatenaxen nennen können. Dieselbe Betrachtung gestattet uns aber auch, im Coordinatensysteme die mit den Coordinatenebenen zusammen fallenden unbegrenzten Ebenen die schiefen Projectionsebenen, so wie die durch den Punct A senkrecht auf die drei Coordinatenaxen gelegten unbegrenzten Ebenen die senkrechten Projectionsebenen zu nennen, und überhaupt alle früher an Projectionssystemen aufgefundenen Eigenschaften am Coordinatensysteme in ihrer doppelten Beziehung wieder geltend zu machen.

14) Um eine Gleichförmigkeit in die Bezeichnungen zu bringen, werden wir in der Folge stets die zu den Axen AX, AX′, AX″ eines beliebigen Coordinatensystems gehörigen schiefen Coordinaten eines Punctes O durch x, x′, x″, so wie die zu den gleichen Axen gehörigen senkrechten Coordinaten desselben Punctes durch u, u′, u″ bezeichnen *), wobei man sich in diese Buchstaben immer das der Lage der Coordinaten bezüglich zu ihren Axen entsprechende Vorzeichen hineingelegt zu denken hat. Wo die Coordinaten von mehreren Puncten auf dieselben Axen bezogen in Betrachtung kommen, da werden wir die zu den verschiedenen Puncten gehörigen dadurch von einander unterscheiden, dass wir den Buchstaben x und u verschiedene, auf die verschiedenen Puncte sich beziehende Indexe anhängen, oder auch an die Stelle der lateinischen Buchstaben x und u die entsprechenden deutschen 𝔵 und 𝔲, oder griechischen ξ und η setzen. Demgemäss bezeichnen wir die Coordinaten eines ersten Punctes O_1 durch x_1, x_1', x_1'', wenn es die schiefen sind, und durch u_1, u_1', u_1'', wenn es die senkrechten sind, und ähnlich werden die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines zweiten Punctes O_2 durch x_2, x_2', x_2'' oder u_2, u_2', u_2'' dargestellt, und so fort, wenn wir nicht lieber statt der lateinischen Buchstaben die analogen aus andern Sprachen nehmen. Wo hingegen neben dem aus den Axen AX, AX′, AX″ gebildeten Coordinatensysteme noch ein zweites aus den Axen A′Y, A′Y′, A′Y″ gebildetes in Betrachtung kommt, da werden wir die zu diesen neu hinzu gekommenen Axen gehörigen schiefen Coordinaten eines Punctes von den zu den ursprünglichen Axen gehörigen schiefen Coordinaten desselben Punctes dadurch unterscheiden, dass wir an die Stelle des Buchstabens x den auf ihn folgenden Buchstaben y setzen, und eben so werden wir die Bezeichnung für die senkrechten Coordinaten eines Punctes an den letztern Axen aus der Bezeichnung der senkrechten Coordinaten dieses Punctes an den erstern Axen herholen, indem wir an die Stelle des Buchstabens u den auf ihn folgenden Buchstaben v setzen, wobei auch wieder Buchstaben aus andern Sprachen genommen werden können.

Auf gleiche Weise werden wir die einer Richtung entsprechenden Projectionszahlen, welche sich auf die zu den Axen AX, AX′, AX″ gehörigen, im Coordinatensysteme gleichzeitig enthaltenen drei schiefwinkligen Projectionssysteme beziehen, durch a, a′, a″ bezeichnen, und durch c, c′, c″ die zu den gleichen Axen gehörigen Projectionszahlen derselben Richtung, wenn sich

*) Um schleppende Wiederholungen zu vermeiden, bemerken wir ein für allemal, dass da, wo mehrere Dinge auf mehrere andere bezogen werden, wir stets das erste auf das erste, das zweite auf das zweite u. s. f. bezogen wissen wollen.

dieselben auf die drei im Coordinatensysteme enthaltenen rechtwinkligen Projectionssysteme beziehen. Wo mehrere Richtungen in Betrachtung kommen, da werden wir deren Projectionszahlen, ähnlich wie bei den Coordinaten, durch dieselben Buchstaben, aber mit verschiedenen Indexen versehen, oder durch die aus einer andern Sprache genommenen analogen Buchstaben bezeichnen, und wo ein zweites Coordinatensystem zu dem alten ersten hinzugefügt wird, da werden wir die Projectionsverhältnisse an den neuen Axen von denen an den alten Axen dadurch unterscheiden, dass wir an die Stelle der Buchstaben a oder c die auf sie folgenden b oder d setzen.

Endlich wollen wir in der Folge die Axenwinkel $X A X'$, $X A X''$, $X' A X''$ einfach durch W, W', W'' bezeichnen und da, wo noch ein zweites Coordinatensystem in Betrachtung kommt, bei ihm anstatt des Buchstabens W ohne Abzeichen denselben mit einem Index versehenen Buchstaben setzen.

Da von jedem der im Coordinatensysteme enthaltenen Projectionssysteme alles das gilt, was weiter oben von einem einzelnen solchen Systeme ausgesagt worden ist, so können wir in Bezug auf das Coordinatensystem mittelst der so eben eingeführten Bezeichnungen die folgenden Relationen aufstellen. Sind nämlich O_1 und O_2 zwei Puncte, deren gegenseitige Entfernung r ist, und stellen x_1, x'_1, x''_1 und x_2, x'_2, x''_2 die schiefen, so wie u_1, u'_1, u''_1 und u_2, u'_2, u''_2 die senkrechten Coordinaten dieser beiden Puncte an den Axen AX, AX', AX'' des Coordinatensystems vor, bezeichnen ausserdem a, a', a'' die zu den Axen AX, AX', AX'' gehörigen Projectionszahlen der von O_1 nach O_2 hinzielenden Richtung in Bezug auf die drei schiefwinkligen Projectionssysteme und c, c', c'', die zu den gleichen Axen gehörigen Projectionszahlen derselben Richtung in Bezug auf die drei rechtwinkligen Projectionssysteme, so hat man der in Nr. 5. von der Projectionszahl gegebenen Definition gemäss sowohl

$$a=\frac{x_2-x_1}{r},\quad a'=\frac{x'_2-x'_1}{r},\quad a''=\frac{x''_2-x''_1}{r}$$

als . **(3)**

$$c=\frac{u_2-u_1}{r},\quad c'=\frac{u'_2-u'_1}{r},\quad c''=\frac{u''_2-u''_1}{r},$$

woraus man findet, dass stets

$$a x'_1 - a' x_1 = a x'_2 - a' x_2,\quad a x''_1 - a'' x_1 = a x''_2 - a'' x_2,\quad a' x''_1 - a'' x'_1 = a' x''_2 - a'' x'_2$$

und **(4)**

$$c u'_1 - c' u_1 = c u_2 - c' u_2,\quad c u''_1 - c'' u_1 = c u''_2 - c'' u_2,\quad c' u''_1 - c'' u'_1 = c' u''_2 - c'' u'_2$$

ist, wenn die Puncte O_1 und O_2, deren Coordinaten in diesen Gleichungen auftreten, in einer Geraden liegen, deren eine Richtung a, a', a'' und c, c', c'' zu Projectionszahlen hat.

In dem besondern Falle, wo der Punct O_1 in der Projectionsspitze A liegt und dem zufolge $x_1 = x'_1 = x''_1 = 0$ und $u_1 = u'_1 = u''_1 = 0$ wird, vereinfachen sich die vorstehenden Ausdrücke und geben, wenn man hier, wo keine Unterscheidnng der Puncte O_1 und O_2 von einander mehr nöthig wird, die den verschiedenen Buchstaben angehängten Indexe weglässt:

$$a=\frac{x}{r},\quad a'=\frac{x'}{r},\quad a''=\frac{x''}{r}$$

und . **(5)**

$$c=\frac{u}{r},\quad c'=\frac{u'}{r},\quad c''=\frac{u''}{r}$$

und als Folge dieser Gleichungen erhält man noch:

(6) $$\left\{\begin{array}{l} a x' = a' x, \quad a x'' = a'' x, \quad a' x'' = a'' x' \\ \text{und} \\ c u' = c' u, \quad c u'' = c'' u, \quad c' u'' = c'' u', \end{array}\right.$$

wo x, x′, x″ die schiefen und u, u′, u″ die senkrechten Coordinaten eines in der Entfernung r von der Projectionsspitze abliegenden Punctes O an den Axen AX, AX′, AX″ vorstellen, und a, a′, a″ die Projectionszahlen in Bezug auf die schiefen, c, c′, c″, in Bezug auf die senkrechten, im Coordinatensysteme enthaltenen Projectionssysteme bezeichnen, welche die von der Projectionsspitze A nach dem Puncte O hinzielende Richtung an den Axen AX, AX′, AX″ giebt. Zur Abkürzung wollen wir von jetzt an die in den schiefen Projectionssystemen gebildeten Projectionsverhältnisse einer Richtung deren schiefe, und die in den rechtwinkligen Projectionssystemen gebildeten deren senkrechte Projectionszahlen an den drei Axen AX, AX′, AX″ des Coordinatensystems nennen.

Eine Richtung, in dem zu Ende der Nr. 5. aufgestellten Sinn genommen, wird sowohl durch ihre drei schiefen, wie auch durch ihre drei senkrechten Projectionszahlen, die sie an den drei Axen des Coordinatensystems giebt, völlig bestimmt. Denkt man sich nämlich um die Projectionsspitze A des Coordinatensystems eine Kugel vom Radius 1 beschrieben, und trägt man auf die eine Coordinatenaxe AX die zu ihr gehörige schiefe oder senkrechte Projectionszahl einer Richtung von A aus je nach seinem Vorzeichen auf die positive oder negative Seite auf, legt sodann durch den dadurch erhaltenen Punct eine Ebene parallel mit der zu dieser Axe gehörigen schiefen oder senkrechten Projectionsebene, so wird jene Kugelfläche von dieser Ebene in einem Kreise geschnitten werden, in welchem alle Puncte enthalten sind, durch welche die zu dieser Projectionszahl gehörige Richtung von A ausgehen kann. Trägt man hierauf die zu einer andern Axe AX′ gehörige schiefe oder senkrechte Projectionszahl derselben Richtung in gleicher Weise je nach seinem Vorzeichen auf die eine oder andere Seite dieser Axe von A aus auf, und legt durch den so sich ergebenden Punct eine Ebene parallel mit der zu dieser Axe gehörigen schiefen oder senkrechten Projectionsebene, so wird jener Kreis von dieser Ebene höchstens nur noch in zwei Puncten geschnitten werden, durch welche allein die zu beiden Projectionszahlen gehörige Richtung von A aus gehen kann. Die dritte zu dieser Richtung gehörige Projectionszahl hat daher nur noch zu entscheiden, welcher von diesen beiden Puncten zu der von A ausgehenden gesuchten Richtung gehört, was schon aus seinem Vorzeichen entnommen werden kann. Dieser Umstand deutet darauf hin, dass die Grössen der drei zu einer bestimmten Richtung gehörigen schiefen oder senkrechten Projectionszahlen, welche sich an den drei Axen eines beliebigen Coordinatensystems bilden, in gewisser Weise von einander abhängig sind, und wir werden bald die Gleichungen aufzustellen im Stande sein, in denen sich diese Abhängigkeit ausspricht.

15) Führt man neben dem Coordinatensystem, dessen Axen AX, AX′, AX″ sind, ein zweites ein, dessen Spitze nicht mehr der Punct A, sondern irgend ein anderer O ist, und dessen Axen, die wir durch OX, OX,′ OX″ andeuten wollen, mit den vorigen Axen parallel und gleichläufig sind, wo dann die gleich accentuirten Axenwinkel in beiden Systemen einerlei Grösse behalten, so bilden je zwei schiefe sowohl, als je zwei senkrechte Projectionssysteme in diesen beiderlei Coordinatensystemen, welche zu parallelen Axen gehören, parallele Projectionssysteme mit gleichläufigen Axen, wie solche in Nr. 4. betrachtet worden sind, weswegen die dort aufgestellte Gleichung (1) hier auf jedes solche Paar ihre Anwendung findet, und dem zufolge in den beiden parallelen Coordinatensystemen in sechsfacher Weise aufgestellt werden kann.

Stellen nämlich ξ, ξ', ξ'' die auf die Axen AX, AX′, AX″ bezogenen schiefen Coordinaten eines Punctes O, und η, η', η'' dessen auf dieselben Axen bezogenen senkrechten Coordinaten vor, bezeichnen wir noch ausserdem die schiefen und senkrechten Coordinaten eines andern Punctes O_1 an den Axen AX, AX′, AX″ durch x, x′, x″ und u, u′, u″, so wie durch x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' die schiefen und senkrechten Coordinaten dieses letztern Punctes an den Axen OX, OX′, OX″, so liefert die Gleichung (1) in Bezug auf die drei schiefwinkligen sowohl, als in Bezug auf die drei rechtwinkligen Projectionssysteme je drei Gleichungen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x - \xi, \quad x_0' = x' - \xi', \quad x_0'' = x'' - \xi'' \\ \text{und} \\ u_0 = u - \eta, \quad u_0' = u' - \eta', \quad u_0'' = u'' - \eta''. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

16) Denken wir uns irgend einen Punct O im Raume und an denselben das, beliebigen Coordinatenaxen AX, AX′, AX″ entsprechende Coordinatenparallelepiped ABHOFD (Fig. 1.) gefügt, so nennen wir die aus den drei an einander hängenden, mit den Axen AX′, AX″, AX‴ parallelen Linien AB, BH, HO gebildete Linienfigur ABHO die **Coordinatenfigur.** Denken wir uns ferner irgend eine von der Coordinatenspitze A auslaufende Richtung AZ, die wir als die positive Axe eines neuen beliebigen Projectionssystems ansehen und projiciren wir auf diese Axe die Geraden AB, BH, HO in der Richtung von A nach B, von B nach H und von H nach O genommen, so ist dem in Nr. 7. aufgestellten Satze gemäss die Summe dieser Projectionen gleich der Projection, welche die Länge AO in der Richtung von A nach O genommen in dem gleichen beliebigen Projectionssysteme an derselben Axe AZ giebt, oder es ist, wenn man

durch p die Projection von AO in der Richtung von A nach O genommen,
durch p_1 die Projection von AB in der Richtung von A nach B genommen,
durch p_2 die Projection von BH in der Richtung von B nach H genommen,
durch p_3 die Projection von HO in der Richtung von H nach O genommen

bezeichnet,

$$p = p_1 + p_2 + p_3.$$

Bezeichnet man durch γ, γ', γ'' die Projectionszahlen, welche die positiven Axenrichtungen AX, AX′, AX″ an der Axe AZ des neuen Projectionssystems liefern, so ist

$$\pm\gamma = \frac{p_1}{AB}, \quad \pm\gamma' = \frac{p_2}{BH}, \quad \pm\gamma'' = \frac{p_3}{HO},$$

der Definition von der Projectionszahl zufolge, und es ist von den doppelten Vorzeichen in jedem einzelnen Falle entweder das obere oder untere zu nehmen, je nachdem die von A nach B, von B nach H, von H nach O genommenen Richtungen mit den ihnen parallelen Axenrichtungen AX, AX′, AX″ bezüglich gleichläufig oder gegenläufig sind, während AB, BH, HO die absoluten Längen der durch sie bezeichneten Geraden vorstellen. Man hat also mit derselben Rücksichtsnahme auf das Vorzeichen

$$p_1 = \pm\gamma . AB, \quad p_2 = \pm\gamma' . BH, \quad p_3 = \pm\gamma'' . HO.$$

Bezeichnen nun noch x, x′, x″ die schiefen Coordinaten des Punctes O an den Axen AX, AX′, AX′, so ist

$$x = \pm AB, \quad x' = \pm BH, \quad x'' = \pm HO$$

und man hat in jedem einzelnen Falle das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die von A nach B, von B nach H, von H nach O genommenen Richtungen mit den ihnen

parallelen positiven Axenrichtungen AX, AX′, AX″ bezüglich gleichläufig oder gegenläufig sind, während AB, BH, HO die absoluten Längen der durch sie bezeichneten Geraden vorstellen, weil die Ordinate in dem erstern Falle das Vorzeichen $+$, im andern Falle das Vorzeichen $-$ in sich aufnimmt. Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von AB, BH, HO in die unmittelbar zuvor für p_1, p_2, p_3 gegebenen, so findet man in jedem Falle

$$p_1 = \gamma . x, \quad p_2 = \gamma' . x', \quad p_3 = \gamma'' . x''$$

weil immer nur die beiden obern oder nur die beiden untern Vorzeichen mit einander zu vereinigen sind. Mittelst dieser Werthe von p_1, p_2, p_3 geht nun die Gleichung $p = p_1 + p_2 + p_3$ über in:

(8. a.) $$p = \gamma . x + \gamma' . x' + \gamma'' x'',$$

in welcher sich der nachstehende Satz ausspricht:

Die Projection der von der Spitze A irgend eines Coordinatensystems bis zu irgend einen Punct O hinreichenden Länge in der Richtung von A nach O genommen auf die Axe eines beliebigen ausserhalb des Coordinatensystems liegenden Projectionssystems *), ist gleich der Summe der drei Producte, welche gebildet werden aus jeder schiefen Coordinate des Punctes O und der Projectionszahl, welche die positive Coordinatenaxe, zu welcher diese Coordinate gehört, an der Projectionsaxe des neuen Projectionssystems giebt.

Ist das zu dem Coordinatensystem hinzugezogene Projectionssystem ein rechtwinkliges, so kann man, wie in der Nr. 6. gezeigt worden ist, anstatt der Projectionsverhältnisse, welche die positiven Coordinatenaxen an der neuen Projectionsaxe geben, diejenigen nehmen, welche die positive Richtung dieser Projectionsaxe an den drei Axen der in dem Coordinatensysteme enthaltenen rechtwinkligen Projectionssysteme liefert, weil man in jedem Falle immer nur auf die Kosinuse der Winkel hingeführt wird, welche die drei positiven Coordinatenaxen mit der neuen Projectionsaxe bilden. So verwandelt sich die Gleichung (8. a.) in:

(8. b.) $$p = x \cos XAZ + x' \cos X'AZ + x'' \cos X''AZ$$

in welcher p die senkrechte Projection der Länge AO auf die Axe AZ vorstellt.

17) Aus dem in der vorigen Nummer aufgefundenen Satze (8. b.) ergeben sich nun unmittelbar mehrere der wichtigsten im beliebigen Projectionssysteme statt findenden Relationen. Bezeichnet nämlich r die Entfernung des Punctes O von der Coordinatenspitze und dividirt man die Gleichung (8. b.) durch r, so wird sie:

$$\frac{p}{r} = \frac{x}{r} \cos XAZ + \frac{x'}{r} \cos X'AZ + \frac{x''}{r} \cos X''AZ.$$

Bezeichnet θ den Winkel, welchen die von A nach O hinzielende Richtung mit der AZ bildet, so ist $\frac{p}{r} = \cos\theta$, weil p die senkrechte Projection der Länge AO oder r auf die Axe AZ ist, also p und r einem rechtwinkligen Dreiecke angehören, dessen Hypothenuse r ist, und den Winkel θ einschliessen; ferner sind $\frac{x}{r}$, $\frac{x'}{r}$, $\frac{x''}{r}$ die schiefen Projectionszahlen der Richtung AO an den Axen AX, AX′, AX″, welche wir durch a, a′, a″ bezeichnen werden; endlich sind

*) Es ist überflüssig hier beizufügen, dass die Spitze dieses neuen Projectionssystems in dem Puncte A liegen soll, weil alle parallelen Projectionssysteme dieselben Projectionszahlen liefern, wie schon in Nr. 5. erwiesen worden ist.

cos X A Z, cos X′A Z, cos X″A Z die senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung A Z an den gleichen Axen giebt und die wir durch c_1, c_1', c_1'' bezeichnen wollen. Hierdurch geht die vorstehende Gleichung über in:

$$\cos\theta = a c_1 + a' c_1' + a'' c_1''. \tag{9. a.}$$

Nimmt man in der Axe A Z einen Punct O_1 an und bezeichnet man die schiefen Projectionszahlen, welche die Richtung A O_1 an den Axen A X, A X′, A X″ giebt, durch a_1, a_1', a_1'', sieht dagegen jetzt die Richtung A O als die neue Axe A Z an, auf welche die dem Puncte O_1 zugehörige Coordinatenfigur projicirt wird, und nennt c, c′, c″ die senkrechten Projectionszahlen, welche die als neue Axe angenommene Richtung an den Axen A X, A X′, A X″ liefert, so erhält man völlig auf die gleiche Weise wie zuvor:

$$\cos\theta = a_1 c + a_1' c' + a_1'' c'', \tag{9. b.}$$

und aus diesen beiden letzten Gleichungen ergiebt sich noch:

$$a c_1 + a' c_1' + a'' c_1'' = a_1 c + a_1' c' + a_1'' c''. \tag{10}$$

Der in den Gleichungen (9. a.) und (9. b.) ausgesprochene, sehr allgemeine Satz lässt sich in Worten so aussprechen: **Der Kosinus des Winkels, den zwei von der Coordinatenspitze auslaufende Richtungen mit einander bilden, ist gleich der Summe der drei Producte aus den zu jeder Axe gehörigen schiefen Projectionszahlen der einen Richtung in die senkrechten Projectionszahlen der andern Richtung an der gleichen Axe.**

Lässt man die Richtung A O_1 mit der A O zusammen fallen, so wird $\theta = 0$ und $\cos\theta = 1$, und zugleich verwandeln sich die Grössen a_1, a_1', a_1'' und c_1, c_1', c_1'' in a, a′, a″ und c, c′, c″, wodurch jede der Gleichungen (9. a.) und (9. b.) in die folgende übergeht:

$$1 = a c + a' c' + a'' c'', \tag{11}$$

worin sich eine Relation zwischen den zu einer und derselben Richtung gehörigen schiefen und senkrechten Projectionszahlen ausspricht, von der ein sehr häufiger Gebrauch gemacht werden wird, weswegen wir die Gleichung (11) mit dem Namen der **Richtungsgleichung** belegen werden.

Lässt man die Richtung A O_1 successive mit den Axen A X, A X′, A X″ zusammen fallen, so wird im ersten Falle der Winkel θ der, den die Richtung A O mit der Axe A X macht, es geht sonach $\cos\theta$ in c über und zugleich verwandeln sich c_1, c_1', c_1'' in 1, cos W, cos W′; im andern Falle ist der Winkel θ der, den die Richtung A O mit der Axe A X′ bildet, es geht sonach $\cos\theta$ in c′ über und zugleich verwandeln sich die Grössen c_1, c_1', c_1'' in cos W, 1, cos W″; im dritten Falle wird der Winkel θ der, den die Richtung A O mit der Axe A X″ einschliesst, es geht sonach $\cos\theta$ in c″ über und zugleich verwandeln sich die Grössen c_1, c_1', c_1'' in cos W′, cos W″, 1. Deshalb nimmt die Gleichung (9. a.) in diesen drei Fällen die drei folgenden Gestalten an:

$$c = a + a'\cos W + a''\cos W', \quad c' = a\cos W + a' + a''\cos W'', \quad c'' = a\cos W' + a'\cos W'' + a'' \tag{12}$$

18) Man kann den in voriger Nummer aufgestellten Gleichungen mannigfaltig abgeänderte Gestalten geben, wenn man erwägt, dass der Gleichung (5) zur Folge

$$a = \frac{x}{r}, \quad a' = \frac{x'}{r}, \quad a'' = \frac{x''}{r} \text{ und } c = \frac{u}{r}, \quad c' = \frac{u'}{r}, \quad c'' = \frac{u''}{r}$$

und

$$a_1 = \frac{x_1}{r_1}, \quad a_1' = \frac{x_1'}{r_1}, \quad a_1'' = \frac{x_1''}{r_1} \text{ und } c_1 = \frac{u_1}{r_1}, \quad c_1' = \frac{u_1'}{r_1}, \quad c_1'' = \frac{u_1''}{r_1}$$

ist, wobei x, x′, x″ die schiefen, u, u′, u″ die senkrechten Coordinaten des Punctes O, x_1, x'_1, x''_1 die schiefen, u_1, u'_1, u''_1 die senkrechten Coordinaten des Punctes O_1 vorzustellen haben, r und r_1 dagegen die Abstände der Puncte O und O_1 von der Coordinatenspitze bedeuten. Setzt man nämlich in jenen Gleichungen an die Stelle der ihre einen Factoren ausmachenden Grössen a, a′, a″ und c, c′, c″ ihre hier gegebenen Werthe, so werden die (9. a.) und (9. b.)

(13) $$\begin{cases} r\cos\theta = c_1 x + c'_1 x' + c''_1 x'' = a_1 u + a'_1 u' + a''_1 u'' \\ \text{und} \\ r_1 \cos\theta = c x_1 + c' x'_1 + c'' x''_1 = a u_1 + a' u'_1 + a'' u''_1, \end{cases}$$

die (11) hingegen nimmt die folgende Form an:

(14) $$r = c x + c' x' + c'' x'' = a u + a' u' + a'' u''$$

und die (12) gestalten sich nun um in:

(15. a.) $u = x + x'\cos W + x''\cos W'$, $u' = x\cos W + x' + x''\cos W''$, $u'' = x\cos W' + x'\cos W'' + x''$.

Nimmt man neben dem Puncte O noch einen andern O_1 an, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 sind, so ist für diesen aus den gleichen Gründen:

$u_1 = x_1 + x'_1\cos W + x''_1\cos W'$, $u'_1 = x_1\cos W + x'_1 + x''_1\cos W''$, $u''_1 = x_1\cos W' + x'_1\cos W'' + x''_1$,

und zieht man von diesen Gleichungen die drei vorigen der Reihe nach ab, so kommt:

(15. b.) $$\begin{cases} u_1 - u = x_1 - x + (x'_1 - x')\cos W + (x''_1 - x'')\cos W', \\ u'_1 - u' = (x_1 - x)\cos W + x'_1 - x' + (x''_1 - x'')\cos W'', \\ u''_1 - u'' = (x_1 - x)\cos W' + (x'_1 - x')\cos W'' + x''_1 - x''. \end{cases}$$

Setzt man in den Gleichungen (13) und (14) auch für die übrigen noch in ihnen vorkommenden Projectionszahlen ihre obigen Werthe, so erhält man aus denen (13):

(16) $$r r_1 \cos\theta = x u_1 + x' u'_1 + x'' u''_1 = u x_1 + u' x'_1 + u'' x''_1$$

und die (14) gehen in die eine über

(17) $$r^2 = x u + x' u' + x'' u''.$$

19) In den Gleichungen der vorigen Nummer stellen r und r_1 die Abstände der Puncte O und O_1 von der Coordinatenspitze vor; es hält indessen nicht schwer, an die Stelle jener solche Gleichungen zu setzen, wodurch der Abstand zweier ausserhalb der Coordinatenspitze liegender Puncte von einander dargestellt wird. Sind nämlich O und O_1 zwei solche Puncte und denkt man sich die Axen des Coordinatensystems parallel und gleichläufig durch den einen Punct O gelegt, bezeichnet durch x_0, x'_0, x''_0 die schiefen, durch u_0, u'_0, u''_0 die senkrechten Coordinaten des Punctes O_1 an diesem neuen Coordinatensysteme, sowie durch r den Abstand der Puncte O und O_1 von einander, so liefert die Gleichung (13) an diesem neuen Coordinatensysteme:

$$r\cos\theta = c x_0 + c' x'_0 + c'' x''_0 = a u_0 + a' u'_0 + a'' u''_0,$$

wenn a, a′, a″ und c, c′, c″ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen irgend einer Richtung an dem neuen Coordinatensysteme vorstellen und θ den Winkel bedeutet, den diese Richtung mit der von O nach O_1 hinzielenden bildet; ferner giebt die Gleichung (14):

$$r = c_0 x_0 + c'_0 x'_0 + c''_0 x''_0 = a_0 u_0 + a'_0 u'_0 + a''_0 u''_0,$$

wobei a_0, a'_0, a''_0 und c_0, c'_0, c''_0 die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der von O nach O_1 hinzielenden Richtung an dem neuen Coordinatensysteme vorstellen; endlich liefert die Gleichung (17) an dem neuen Systeme:

$$r^2 = x_0 u_0 + x'_0 u'_0 + x'' u''_0,$$

während in allen diesen Gleichungen r den Abstand des Punctes O_1 von der neuen Coordinatenspitze, d. h. von dem Puncte O bezeichnet. Es ist aber der in Nr. 4. gegebenen Gleichung (1) zur Folge:

$$x_0 = x_1 - x,\ x'_0 = x'_1 - x',\ x''_0 = x''_1 - x'' \text{ und } u_0 = u_1 - u,\ u'_0 = u'_1 - u',\ u''_0 = u''_1 - u'',$$

wenn x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten des Punctes O und x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die des Punctes O_1 an den ursprünglichen Axen vorstellen; setzt man daher für x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die hier gegebenen Werthe in die drei vorstehenden Gleichungen, so wird die erste derselben:

$$\left.\begin{aligned} r\cos\theta &= c(x_1 - x) + c'(x'_1 - x') + c''(x''_1 - x'') \\ &= a(u_1 - u) + a'(u'_1 - u') + a''(u''_1 - u''), \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

die zweite verwandelt sich in:

$$\left.\begin{aligned} r &= c_0(x_1 - x) + c'_0(x'_1 - x') + c''_0(x''_1 - x'') \\ &= a_0(u_1 - u) + a'_0(u'_1 - u') + a''_0(u''_1 - u'') \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

und die dritte geht über in:

$$r^2 = (x_1 - x)(u_1 - u) + (x'_1 - x')(u'_1 - u') + (x''_1 - x'')(u''_1 - u'') \quad (20)$$

und man kann alle in diesen Gleichungen auftretenden Projectionszahlen, welche sich von vorn herein auf die neuen Axen bezogen, eben so gut auch auf die alten Axen beziehen, weil nach dem in Nr. 5. Gesagten die Projectionszahlen einer Richtung an parallelen und gleichläufigen Projectionssystemen stets die gleichen bleiben; dann aber drücken die Gleichungen (18), (19) und (20) den Abstand r der beiden Puncte O und O_1 von einander durch lauter Grössen aus, die dem ursprünglichen Coordinatensysteme angehören, so dass das neue Coordinatensystem in ihnen gar nicht mehr zur Sprache kommt, dessen Einführung also nur Mittel zum Zwecke war.

Wir machen hier noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass alle Abstände in den Gleichungen der vorigen beiden Nummern, die durch r oder r_1 bezeichnet worden sind, immer absolute Längen vorzustellen haben und daher stets nur positive Zahlen in sich aufnehmen dürfen, wenn die Coordinaten und Projectionszahlen durch ihre Vorzeichen die Lage der Puncte und die Seiten der Richtungen völlig bestimmt anzeigen sollen, wie aus den Betrachtungen der Nr. 3. und Nr. 5. unmittelbar hervorgeht. Ausserdem hat man noch zu beachten, dass in allen bisherigen Gleichungen die Richtungen, welche von der Coordinatenspitze ausgehend vorausgesetzt worden sind, auch von jedem andern Puncte ausgehend gedacht werden können, weil parallele und gleichläufige Richtungen an denselben Axen immer die gleichen Projectionszahlen geben; nur muss man bei so allgemein aufgefassten Richtungen unter dem Winkel, den zwei von ihnen mit einander bilden, wenn diese nicht von einem und demselben Puncte anslaufen, den verstehen, welchen zwei mit ihnen parallele und gleichläufige, die von einem und demselben Puncte ausgehen, mit einander machen.

20) Die Gleichungen (9. a.) und (9. b.) enthalten einen besondern Fall in sich, der näher betrachtet zu werden verdient. Lässt man nämlich die Richtungen A O und A O_1, welche die Schenkel des in diesen Gleichungen vorkommenden Winkels θ bilden, auf einander senkrecht stehen, so wird $\cos\theta = 0$, und jene Gleichungen gehen über in:

$$0 = a\,c_1 + a'\,c'_1 + a''\,c''_1 = c\,a_1 + c'\,a'_1 + c''\,a''_1 \quad (21)$$

und sprechen so die Bedingungen aus, welche die Projectionszahlen zweier Richtungen erfüllen müssen, wenn beide senkrecht auf einander stehen sollen. Setzt man in dieser Gleichung anstatt der Projectionszahlen, welche der einen oder der andern von den beiden oben erwähnten Richtungen angehören, ihre zu Anfang der Nr. 18. gegebenen Werthe, so erhält man die nachstehenden Formen:

(22) $$\left\{\begin{array}{l} o = a\,u_1 + a'\,u'_1 + a''\,u''_1 = c\,x_1 + c'\,x'_1 + c''\,x''_1 \text{ oder} \\ o = c_1\,x + c'_1\,x' + c''_1\,x'' = a_1\,u + a'_1\,u' + a''_1\,u'' \text{ oder} \\ o = x\,u_1 + x'\,u'_1 + x''\,u''_1 = u\,x_1 + u'\,x'_1 + u''\,x''_1. \end{array}\right.$$

An diese Eigenschaft zweier senkrecht auf einander stehender Richtungen lässt sich eine andere knüpfen, die häufig zur Vereinfachung der Ausdrücke benützt werden kann. Sind nämlich a, a', a'' und a_1, a'_1, a''_1 die schiefen, c, c', c'' und c_1, c'_1, c''_1 die senkrechten Projectionszahlen zweier in dem Puncte A' sich schneidender Richtungen $A'O$ und $A'O_1$ an den Coordinatenaxen AX, AX', AX'' und stellt $A'P$ eine dritte von dem gleichen Puncte A' auslaufende Richtung vor, welche auf jeder der beiden vorigen senkrecht steht, und deren schiefe und senkrechte Projectionszahlen an den gleichen Axen wir durch p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ vorstellen wollen, so ist nach Anleitung der Gleichungen (21) sowohl

$$o = p\,c + p'\,c' + p''\,c'' \text{ oder } o = \mathfrak{p}\,a + \mathfrak{p}'\,a' + \mathfrak{p}''\,a''$$

als auch

$$o = p\,c_1 + p'\,c'_1 + p''\,c''_1 \text{ oder } o = \mathfrak{p}\,a_1 + \mathfrak{p}'\,a'_1 + \mathfrak{p}''\,a''_1.$$

Eliminirt man aus den vordern dieser Gleichungen successive p'' und p' oder aus den hintern $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p}'$, so erhält man im erstern Falle:

$$o = p\,(c\,c''_1 - c''\,c_1) + p'\,(c'\,c''_1 - c''\,c'_1) \text{ und } o = p\,(c\,c'_1 - c'\,c_1) + p''\,(c''\,c'_1 - c'\,c''_1),$$

im andern Falle hingegen

$$o = \mathfrak{p}\,(a\,a''_1 - a''\,a_1) + \mathfrak{p}'\,(a'\,a''_1 - a''\,a'_1) \text{ und } o = \mathfrak{p}\,(a\,a'_1 - a'\,a_1) + \mathfrak{p}''\,(a''\,a'_1 - a'\,a''_1),$$

und diese Gleichungen lassen sich auch in der Form von Proportionen so schreiben:

(23) $$\left\{\begin{array}{l} p : p' : p'' = (c'\,c''_1 - c''\,c'_1) : (c''\,c_1 - c\,c''_1) : (c\,c'_1 - c'\,c_1) \text{ und} \\ \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' = (a'\,a''_1 - a''\,a'_1) : (a''\,a_1 - a\,a''_1) : (a\,a'_1 - a'\,a_1); \end{array}\right.$$

man kann also aus den senkrechten Projectionszahlen zweier Richtungen Grössen ableiten, welche den schiefen Projectionszahlen der auf jenen beiden senkrechten Richtung proportional sind, und eben so kann man aus den schiefen Projectionszahlen jener beiden Richtungen Grössen herholen, welche den senkrechten Projectionszahlen der auf diesen beiden senkrechten Richtung proportional sind.

21) Die Richtungsgleichung (11) setzt in den Stand, die schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer beliebigen Richtung zu finden, so wie man Grössen kennt, die ihnen proportional sind. Das dabei einzuhaltende Verfahren besteht in Folgendem. Stellen a, a', a'' und c, c', c'' die zu findenden schiefen und senkrechten Projectionszahlen vor und weiss man, dass

$$a : a' : a'' = m : m' : m'' \text{ und } c : c' : c'' = n : n' : n''$$

ist, wobei m, m', m'' und n, n', n'' bekannte und gegebene Grössen vorstellen, so kann man setzen

(24) $$a = m\,\mu,\quad a' = m'\,\mu,\quad a'' = m''\,\mu \text{ und } c = n\,\nu,\quad c' = n'\,\nu,\quad c'' = n''\,\nu;$$

und es bleiben nun nur noch die beiden Grössen μ und ν zu bestimmen übrig; setzt man aber die hier für a, a', a'' und c, c', c'' gegebenen Werthe in die Richtungsgleichung (11), so findet man:

$$\mu\,\nu = \frac{1}{m\,n + m'\,n' + m''\,n''},$$

setzt man hierauf die gleichen Werthe in die Gleichungen (12) ein, so erhält man:

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{m + m'\cos W + m''\cos W'}{n} = \frac{m\cos W + m' + m''\cos W''}{n'} = \frac{m\cos W' + m'\cos W'' + m''}{n''},$$

und aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der vorigen lassen sich die Grössen μ und ν finden, es ergiebt sich nämlich:

$$\nu^2 = \frac{m + m' \cos W + m'' \cos W'}{n(mn + m'n' + m''n'')} = \frac{m \cos W + m' + m'' \cos W''}{n'(mn + m'n' + m''n'')} = \frac{m \cos W' + m' \cos W'' + m''}{n''(mn + m'n' + m''n'')}$$

und

$$\mu^2 = \frac{n(m + m' \cos W + m'' \cos W')^{-1}}{mn + m'n' + m''n''} = \frac{n'(m \cos W + m' + m'' \cos W'')^{-1}}{mn + m'n' + m''n''} = \frac{n''(m \cos W' + m' \cos W'' + m'')^{-1}}{mn + m'n' + m''n''}. \quad \textbf{(25. a.)}$$

Man ersieht hieraus, dass sich jeder der beiden Werthe μ und ν in drei verschiedenen Formen darstellen lässt, und dass man sie durch Ausziehung einer Quadratwurzel erhält, der man eben so wohl das Zeichen + wie das — vorsetzen kann. Dabei geben die zwischen (24) und (25. a.) stehenden Gleichungen zu erkennen, dass das Product oder der Quotient der beiden zu einander gehörigen Grössen μ und ν ein durch die Zahlen m, m′, m″ und n, n′, n″ gegebenes Resultat liefern müssen, wodurch das der einen von den Grössen μ und ν zu gebende Vorzeichen von dem der andern Grösse gegebenen Vorzeichen abhängig gemacht wird. Die etwas unbequemen Ausdrücke (25. a.) werden sehr einfach, wenn man nicht blos weiss, dass

$$a : a' : a'' = m : m' : m''$$

und

$$c : c' : c'' = n : n' : n''$$

jedes für sich ist, sondern auch, dass

$$a : a' : a'' : c : c' : c'' = m : m' : m'' : n : n' : n''$$

ist, d. h. wenn die Zahlen m, m′, m″ und n, n′, n″ die Eigenschaft besitzen, dass nicht blos die erstern das Verhältniss der schiefen und die letztern das Verhältniss der senkrechten Projectionszahlen unter einander hergeben, sondern auch durch m : n, m′ : n′, m″ : n″ ein und dasselbe Verhältniss der zu einerlei Axe gehörigen schiefen und senkrechten Projectionszahlen angezeigt wird. In diesem Falle wird nämlich $\mu = \nu$ und diess zieht nach sich

$$\left.\begin{array}{l} n = m + m' \cos X + m'' \cos X', \\ n' = m \cos X + m' + m'' \cos X'', \\ n'' = m \cos X' + m' \cos X'' + m'' \\ \text{und} \\ \mu = \nu = \dfrac{1}{(mn + m'n' + m''n'')^{\frac{1}{2}}}. \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{(25. b.)}$$

22) Stellen wieder O und O_1 zwei in der Entfernung r liegende Puncte einer Geraden vor, und sind x, x′, x″ und x_1, x_1', x_1'' die schiefen, u, u′, u″ und u_1, u_1', u_1'' die senkrechten Coordinaten dieser Puncte O und O_1 an den Coordinatenaxen AX, AX′, AX″; stellen ferner $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ zwei in der Entfernung $\mathfrak{r}$ liegende Puncte einer andern Geraden vor, und sind $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_1''$ die schiefen, und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_1''$ die senkrechten Coordinaten der Puncte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ an den gleichen Axen: so drücken

$$\frac{x_1 - x}{r}, \frac{x_1' - x'}{r}, \frac{x_1'' - x''}{r} \text{ und } \frac{u_1 - u}{r}, \frac{u_1' - u'}{r}, \frac{u_1'' - u''}{r}$$

die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Richtung OO_1, dagegen

$$\frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}}{\mathfrak{r}}, \frac{\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}'}{\mathfrak{r}}, \frac{\mathfrak{x}_1'' - \mathfrak{x}''}{\mathfrak{r}} \text{ und } \frac{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}}{\mathfrak{r}}, \frac{\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{r}}, \frac{\mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}''}{\mathfrak{r}}$$

die der Richtung $\mathfrak{O}\mathfrak{O}$ an den Axen AX, AX', AX'' aus. Sind nun die beiden Richtungen OO_1 und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ einander parallel, so haben ihre auf einerlei Axe bezogenen schiefen oder senkrechten Projectionszahlen, den Betrachtungen der Nr. 5. gemäss, einerlei absolute Werthe und entweder dasselbe oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die beiden parallelen Richtungen gleichläufig oder gegenläufig sind; man hat daher

$$\frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}}{\mathfrak{r}} = \frac{x_1 - x}{r}, \quad \frac{\mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}'}{\mathfrak{r}} = \frac{x'_1 - x'}{r}, \quad \frac{\mathfrak{x}''_1 - \mathfrak{x}''}{\mathfrak{r}} = \frac{x''_1 - x''}{r}$$

und

$$\frac{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}}{\mathfrak{r}} = \frac{u_1 - u}{r}, \quad \frac{\mathfrak{u}'_1 - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{r}} = \frac{u'_1 - u'}{r}, \quad \frac{\mathfrak{u}''_1 - \mathfrak{u}''}{\mathfrak{r}} = \frac{u''_1 - u''}{r}$$

wenn die parallelen Richtungen OO_1 und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ gleichläufig sind, hingegen

$$\frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}}{\mathfrak{r}} = -\frac{x_1 - x}{r}, \quad \frac{\mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}'}{\mathfrak{r}} = -\frac{x'_1 - x'}{r}, \quad \frac{\mathfrak{x}''_1 - \mathfrak{x}''}{\mathfrak{r}} = -\frac{x''_1 - x''}{r}$$

und

$$\frac{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}}{\mathfrak{r}} = -\frac{u_1 - u}{r}, \quad \frac{\mathfrak{u}'_1 - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{r}} = -\frac{u'_1 - u'}{r}, \quad \frac{\mathfrak{u}''_1 - \mathfrak{u}''}{\mathfrak{r}} = -\frac{u''_1 - u''}{r}$$

wenn die beiden parallelen Richtungen OO_1 und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ gegenläufig sind. In beiden Fällen aber ist

$$\text{(26)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} : \mathfrak{x}'_1 - \mathfrak{x}' : \mathfrak{x}''_1 - \mathfrak{x}'' = x_1 - x : x'_1 - x' : x''_1 - x'' \\ \quad \text{und} \\ \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u} : \mathfrak{u}'_1 - \mathfrak{u}' : \mathfrak{u}''_1 - \mathfrak{u}'' = u_1 - u : u'_1 - u' : u''_1 - u''; \end{array} \right.$$

daher wird durch diese letztern Gleichungen (26) eine Eigenschaft der parallelen Richtungen ausgesprochen, gleichviel, ob diese gleichläufig oder gegenläufig sind. Weiter unten wird es sich zeigen, dass auch umgekehrt die in den Gleichungen (26) ausgesprochene Eigenschaft der vier Puncte O, O_1 und $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_1$ das Parallelsein der beiden Richtungen OO_1 und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ nach sich zieht.

In dem besondern Falle, wo die beiden Puncte O und $\mathfrak{O}$ in die Spitze A des Coordinatensystems hinein fallen und deswegen die beiden parallelen Richtungen OO_1 und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1$ einer und derselben durch die Coordinatenspitze gelegten Geraden angehören, wird $x = x' = x'' = o$ und $u = u' = u'' = o$ und eben so $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}'' = o$ und $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}' = \mathfrak{u}'' = o$, daher nehmen in diesem besondern Falle die Gleichungen (26) die nachstehende Form an:

$$\mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}'_1 : \mathfrak{x}''_1 = x_1 : x'_1 : x''_1 \text{ und } \mathfrak{u}_1 : \mathfrak{u}'_1 : \mathfrak{u}''_1 = u_1 : u'_1 : u''_1,$$

und geben zu erkennen, dass die den drei Coordinatenaxen entsprechenden schiefen sowohl, als senkrechten Coordinaten zweier Puncte, die in einer durch die Coordinatenspitze gelegten Geraden liegen, unter einander einerlei Verhältniss einhalten, diese beiden Puncte mögen auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von der Coordinatenspitze liegen.

Da in diesem besondern Falle die Puncte O und $\mathfrak{O}$ in der Coordinatenspitze untergegangen sind, und daher nur noch die den Puncten O_1 und $\mathfrak{O}_1$ entsprechenden Coordinaten in die vorstehenden Gleichungen eingehen, so kann man diese beiden letztgenannten Puncte, weil sie die einzigen in das Resultat der Betrachtungen aufgenommenen sind, einfacher durch O und O_1 vorstellen und ihre Coordinaten eben so bezeichnen, wie es vorher bei den so dargestellten Puncten der Fall war; dann nehmen die vorstehenden Gleichungen die folgende, den jetzigen Umständen angemessenere Gestalt an:

$$\text{(27)} \quad x_1 : x'_1 : x''_1 = x : x' : x'' \text{ und } u_1 : u'_1 : u''_1 = u : u' : u''.$$

23) So wie uns die in Nr. 15. vorgenommene parallele Verlegung der Axen von Nutzen war, so wird in andern Fällen die Einführung eines neuen Coordinatensystems mit abgeänderten Axenrichtungen den Betrachtungen sehr förderlich; dann aber ist die Kenntniss der allgemeinen Beziehungen, die zwischen den alten und den neuen Axenrichtungen statt finden, unentbehrlich. Diese Beziehungen machen den Gegenstand der folgenden Nummern aus.

Denkt man sich durch die Coordinatenspitze A ausser den drei Axenrichtungen AX, AX′, AX″ noch drei neue AY, AY′, AY″ in völlig unbestimmter Weise gelegt und bezeichnet man

durch A, A', A'' die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY an den alten Axen AX, AX′, AX″,

durch A_1, A_1', A_1'' die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY′ an den alten Axen AX, AX′, AX″,

durch A_2, A_2', A_2'' die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY″ an den alten Axen AX, AX′, AX″

liefert, ferner

durch C, C', C'' die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY an den alten Axen AX, AX′, AX″,

durch C_1, C_1', C_1'' die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY′ an den alten Axen AX, AX′, AX″,

durch C_2, C_2', C_2'' die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die neue Axenrichtung AY″ an den alten Axen AX, AX′, AX″

giebt, so finden zwischen diesen Projectionszahlen sogleich, den frühern für jede Richtung gültigen Gleichungen gemäss, die folgenden Relationen statt:

Erstlich liefern die Gleichungen (12), wenn man sie nach und nach auf die drei Richtungen AY, AY′, AY″ in Anwendung bringt, folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
C &= A + A'\cos W + A''\cos W',\\
C' &= A\cos W + A' + A''\cos W'',\\
C'' &= A\cos W' + A'\cos W'' + A'',\\
C_1 &= A_1 + A_1'\cos W + A_1''\cos W',\\
C_1' &= A_1\cos W + A_1' + A_1''\cos W'',\\
C_1'' &= A_1\cos W' + A_1'\cos W'' + A_1'',\\
C_2 &= A_2 + A_2'\cos W + A_2''\cos W',\\
C_2' &= A_2\cos W + A_2' + A_2''\cos W'',\\
C_2'' &= A_2\cos W' + A_2'\cos W'' + A_2''.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Sodann liefert die Gleichung (11), wenn man sie nach und nach auf dieselben drei Richtungen in Anwendung bringt, die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= A\,C + A'\,C' + A''\,C'',\\
1 &= A_1 C_1 + A_1' C_1' + A_1'' C_1'',\\
1 &= A_2 C_2 + A_2' C_2' + A_2'' C_2''.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Endlich erhält man noch aus den Gleichungen (9. a. und b.), wenn man sie nach und nach auf die drei Winkel YAY′, YAY″, Y′AY″ in Anwendung bringt, welche die neuen Axenrichtungen AY, AY′, AY″ mit einander machen, und die wir, da diese drei Axenwinkel von denen des vorigen Coordinatensystems verschieden sein können, den in Nr. 14. eingeführten Bezeichnungen analog, durch W_1, W_1', W_1'' vorstellen werden, die drei nachstehenden:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos W_1 &= A\,C_1 + A'\,C'_1 + A''\,C''_1 = A_1\,C + A'_1 C' + A''_1 C'', \\ \cos W'_1 &= A\,C_2 + A'\,C'_2 + A''\,C''_2 = A_2\,C + A'_2 C' + A''_2 C'', \\ \cos W''_1 &= A_1 C_2 + A'_1 C'_2 + A''_1 C''_2 = A_2 C_1 + A'_2 C'_1 + A''_2 C''_1. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (28), (29) und (30) stellen zwischen den 18 Projectionszahlen A, A', A'', A_1, A'_1, A''_1, A_2, A'_2, A''_2 und C, C', C'', C_1, C'_1, C''_1, C_2, C'_2, C''_2 und den drei Axenwinkeln W_1, W'_1, W''_1 fünfzehn Relationen auf, und geben dadurch zu erkennen, dass sechs von jenen Grössen willkührlich gewählt werden können. Die Gleichungen (28) und (29) insbesondere zeigen, dass zwischen den schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer jeden einzelnen neuen Axenrichtung 4 Gleichungen vorhanden sind, so dass von je 6 solchen Grössen nur zwei unabhängig bleiben und als solche unter die willkührlich zu wählenden Bestimmungsstücke aufgenommen werden können. Man kann daher im Allgemeinen 6 von jenen 21 Bestimmungsstücken nach Belieben wählen, darunter aber nur zwei von den 6 auf eine und dieselbe Richtung sich beziehenden Projectionszahlen aufnehmen.

24) Dieselben Beziehungen, welche von dem beliebigen alten zu dem beliebigen neuen Coordinatensysteme statt finden, finden, wie von selbst in die Augen springt, auch rückwärts vom neuen zu dem alten statt; bezeichnet man daher

durch B, B', B'' die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX an den neuen Axen AY, AY', AY'',

durch B_1, B'_1, B''_1 die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX' an den neuen Axen AY, AY', AY'',

durch B_2, B'_2, B''_2 die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX'' an den neuen Axen AY, AY', AY''

liefert, ferner

durch D, D', D'' die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX an den neuen Axen AY, AY', AY'',

durch D_1, D'_1, D''_1 die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX' an den neuen Axen AY, AY', AY'',

durch D_2, D'_2, D''_2 die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die alte Axenrichtung AX'' an den neuen Axen AY, AY', AY''

giebt, so finden zwischen diesen Projectionszahlen und Winkeln genau dieselben Relationen statt, welche in den Gleichungen (28), (29) und (30) zwischen den vorigen aufgestellt worden sind, und man kann die hierher gehörigen aus den dortigen einfach dadurch ableiten, dass man B, D, W_1 und W anstatt A, C, W und W_1 mit denselben Accenten und Indexen versehen setzt. Aus diesem Grunde wird auch die spezielle Angabe dieser Gleichungen völlig überflüssig, und wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass die in ihnen vorkommenden senkrechten Projectionszahlen, welche nach den in Nr. 6. geschehenen Auseinandersetzungen nichts anders sind, als die Kosinuse der Winkel, welche die Richtungen, wozu die Projectionszahlen gehören, mit den Axen machen, an denen sie gebildet worden sind, von den in den vorigen Gleichungen vorkommenden senkrechten Projectionszahlen in sehr einfacher Weise abhängen, weil die Winkel, welche die Richtungen AX, AX', AX'' mit den Axen AY, AY', AY'' machen, wenn man von ihrer Reihenfolge absieht, denen gleich sind, welche die Richtungen AY, AY', AY'' mit den Axen AX, AX', AX'' bilden. Man findet so, dass

$$\left.\begin{array}{lll} C = D\,, & C_1 = D'\,, & C_2 = D''\\ C' = D_1\,, & C_1' = D_1'\,, & C_2' = D_1''\\ C'' = D_2\,, & C_1'' = D_2'\,, & C_2'' = D_2'' \end{array}\right\} \quad \text{(31)}$$

ist, und wird dadurch in den Stand gesetzt, aus den vereinigten Gleichungen dieser und der vorigen Nummer sogleich neun der in ihnen vorkommenden Grössen fortzuschaffen.

25) Unter den unzählig vielen, an ein gegebenes Coordinatensystem möglicher Weise zu knüpfenden neuen Systemen mit gemeinschaftlicher Spitze ist eines von so ausgezeichneter Beschaffenheit, dass wir uns veranlasst finden, es besonders mit all der Ausführlichkeit, die es verdient, vor Augen zu legen. Denken wir uns nämlich durch die Spitze A des ursprünglichen, aus den drei Axen A X, A X′, A X″ gebildeten Coordinatensystems drei neue Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ so gelegt, dass die $A\mathfrak{X}$ senkrecht steht auf der Ebene X′A X″ und mit A X auf derselben Seite dieser Ebene liegt, ferner dass die $A\mathfrak{X}'$ senkrecht steht auf der Ebene X A X″ und mit A X′ auf derselben Seite dieser Ebene liegt, endlich dass die $A\mathfrak{X}''$ senkrecht steht auf der Ebene X A X′ und mit A X″ auf derselben Seite dieser Ebene liegt, und bezeichnen wir

durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$ die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}$ an den Axen A X, A X′, A X″,

durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$ die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}'$ an den Axen A X, A X′, A X″,

durch $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$ die schiefen Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}''$ an den Axen A X, A X′, A X″

liefert, ferner

durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$ die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}$ an den Axen A X, A X′, A X″,

durch $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_1''$ die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}'$ an den Axen A X, A X′, A X″,

durch $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2'$, $\mathfrak{C}_2''$ die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die Richtung $A\mathfrak{X}''$ an den Axen A X, A X′, A X″

giebt, und ausserdem noch den in Nr. 14 eingeführten Bezeichnungen analog

durch $\mathfrak{W}$ den Winkel, welchen die Axe $A\mathfrak{X}$ mit der $A\mathfrak{X}'$,

durch $\mathfrak{W}'$ den Winkel, welchen die Axe $A\mathfrak{X}$ mit der $A\mathfrak{X}''$,

durch $\mathfrak{W}''$ den Winkel, welchen die Axe $A\mathfrak{X}'$ mit der $A\mathfrak{X}''$

bildet, so hat man bei diesem besondern neuen Systeme, in welchem die Richtung $A\mathfrak{X}$ mit denen A X′ und A X″, die $A\mathfrak{X}'$ mit denen A X und A X″, endlich die $A\mathfrak{X}''$ mit denen A X und A X′ rechte Winkel macht:

$$\mathfrak{C}' = o\,,\ \mathfrak{C}'' = o\,,\ \mathfrak{C}_1 = o\,,\ \mathfrak{C}_1'' = o\,,\ \mathfrak{C}_2 = o\,,\ \mathfrak{C}_2' = o\,. \quad \text{(32)}$$

Dadurch gehen die Gleichungen (28) für dieses besondere System über in:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'\cos W + \mathfrak{A}''\cos W',\\ o = \mathfrak{A}\cos W + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''\cos W'',\\ o = \mathfrak{A}\cos W' + \mathfrak{A}'\cos W'' + \mathfrak{A}'',\\[4pt] o = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1'\cos W + \mathfrak{A}_1''\cos W',\\ \mathfrak{C}_1' = \mathfrak{A}_1\cos W + \mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1''\cos W'',\\ o = \mathfrak{A}_1\cos W' + \mathfrak{A}_1'\cos W'' + \mathfrak{A}_1'',\\[4pt] o = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2'\cos W + \mathfrak{A}_2''\cos W',\\ o = \mathfrak{A}_2\cos W + \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2''\cos W'',\\ \mathfrak{C}_2'' = \mathfrak{A}_2\cos W' + \mathfrak{A}_2'\cos W'' + \mathfrak{A}_2''. \end{array}\right\} \quad \text{(33)}$$

Die Gleichungen (29) gehen hier über in

(34) $$1=\mathfrak{A}\mathfrak{E},\quad 1=\mathfrak{A}'_1\mathfrak{E}'_1,\quad 1=\mathfrak{A}''_2\mathfrak{E}''_2.$$

Endlich verwandeln sich die Gleichungen (30) hier in:

(35) $$\left\{\begin{aligned}\cos\mathfrak{W}&=\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}=\mathfrak{A}'\mathfrak{E}'_1,\\ \cos\mathfrak{W}'&=\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}=\mathfrak{A}''\mathfrak{E}''_2,\\ \cos\mathfrak{W}''&=\mathfrak{A}'_2\mathfrak{E}'_1=\mathfrak{A}''_1\mathfrak{E}''_2.\end{aligned}\right.$$

26) Die in voriger Nummer enthaltenen Gleichungen geben so einfache Relationen zwischen den in ihnen vorkommenden Grössen an die Hand, dass es nicht schwer hält, die einen durch die andern unmittelbar darzustellen, wie jetzt gezeigt werden soll. Aus den Gleichungen (34) und (35) erhält man ohne Mühe:

(36) $$\left\{\begin{aligned}&\mathfrak{A}=\frac{1}{\mathfrak{E}},\quad \mathfrak{A}'=\frac{\cos\mathfrak{W}}{\mathfrak{E}'_1},\quad \mathfrak{A}''=\frac{\cos\mathfrak{W}'}{\mathfrak{E}''_2},\\ &\mathfrak{A}_1=\frac{\cos\mathfrak{W}}{\mathfrak{E}},\quad \mathfrak{A}'_1=\frac{1}{\mathfrak{E}'_1},\quad \mathfrak{A}''_1=\frac{\cos\mathfrak{W}''}{\mathfrak{E}''_2},\\ &\mathfrak{A}_2=\frac{\cos\mathfrak{W}'}{\mathfrak{E}},\quad \mathfrak{A}'_2=\frac{\cos\mathfrak{W}''}{\mathfrak{E}'_1},\quad \mathfrak{A}''_2=\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man diese für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}''_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ gefundenen Ausdrücke in die Gleichungen (33), so verwandeln sich diese in:

(37) $$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{E}&=\frac{1}{\mathfrak{E}}+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W'\cos\mathfrak{W}',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W''\cos\mathfrak{W}',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W'+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W''\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos\mathfrak{W}',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W'\cos\mathfrak{W}'',\\ \mathfrak{E}'_1&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W''\cos\mathfrak{W}'',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W'\cos\mathfrak{W}+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W''+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos\mathfrak{W}'',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos\mathfrak{W}'+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W\cos\mathfrak{W}''+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W',\\ o&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W\cos\mathfrak{W}'+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos\mathfrak{W}''+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}\cos W'',\\ \mathfrak{E}''_2&=\frac{1}{\mathfrak{E}}\cos W'\cos\mathfrak{W}'+\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}\cos W''\cos\mathfrak{W}''+\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}.\end{aligned}\right.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen der ersten in den Gleichungen (37) enthaltenen Gruppe einmal $\frac{1}{\mathfrak{E}'_1}$ und dann $\frac{1}{\mathfrak{E}''_2}$, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}''_2}\sin^2 W''\cos\mathfrak{W}'=\cos W\cos W''-\cos W',$$

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}'_1}\sin^2 W''\cos\mathfrak{W}=\cos W'\cos W''-\cos W;$$

eliminirt man ferner aus der ersten und letzten Gleichung der zweiten in den Gleichungen (37) enthaltenen Gruppe einmal $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ und dann $\frac{1}{\mathfrak{C}_2''}$, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{C}_2''}\sin^2 W' \cos \mathfrak{W}'' = \cos W \cos W' - \cos W'',$$

$$\frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{C}}\sin^2 W' \cos \mathfrak{W} = \cos W' \cos W'' - \cos W\,;$$

eliminirt man endlich aus den beiden ersten Gleichungen der dritten in den Gleichungen (37) enthaltenen Gruppe einmal $\frac{1}{\mathfrak{C}}$ und dann $\frac{1}{\mathfrak{C}_1'}$, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{C}_2''}{\mathfrak{C}_1'}\sin^2 W \cos \mathfrak{W}'' = \cos W \cos W' - \cos W'',$$

$$\frac{\mathfrak{C}_2''}{\mathfrak{C}}\sin^2 W \cos \mathfrak{W}' = \cos W \cos W'' - \cos W'.$$

Multiplizirt man erstlich die zweite der im ersten der drei vorstehenden Gleichungspaare enthaltenen Gleichungen mit der zweiten Gleichung im zweiten Gleichungspaare, hierauf die erste der Gleichungen des ersten Paars mit der zweiten der Gleichungen des letzten Paars, zuletzt die erste der Gleichungen des zweiten Paars mit der ersten der Gleichungen des dritten Paars, und zieht man in jedem der drei Fälle aus den gewonnenen Resultaten die Quadratwurzel aus, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \sin W' \sin W'' \cos \mathfrak{W} &= \cos W' \cos W'' - \cos W \\ \sin W \sin W'' \cos \mathfrak{W}' &= \cos W \cos W'' - \cos W' \\ \sin W \sin W' \cos \mathfrak{W}'' &= \cos W \cos W' - \cos W'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

wobei das rechte Vorzeichen nach dem Ausziehen der Quadratwurzel darnach zu entscheiden ist, dass der in Nr. 25. angeordneten Stellung der Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ zur Folge $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ sämmtlich positive Grössen sind, weshalb den eben genannten Gleichungspaaren gemäss

$$\cos W' \cos W'' - \cos W \text{ und } \cos \mathfrak{W}$$
$$\cos W \cos W'' - \cos W' \text{ und } \cos \mathfrak{W}'$$
$$\cos W \cos W' - \cos W'' \text{ und } \cos \mathfrak{W}''$$

einerlei Vorzeichen in sich tragen müssen, was die den Gleichungen (38) gegebene bestimmte Form zur Folge hat. Diese Gleichungen dienen zur Aufsuchung der Winkel $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$, wenn die W, W', W'' gegeben sind.

Dividirt man dieselben Paare von Gleichungen, aus deren Multiplication die Gleichungen (38) hervorgegangen sind, in einander, und zieht aus jedem der so gewonnenen Resultate die Quadratwurzel aus, so findet man:

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_1'} = \frac{\sin W'}{\sin W''},\quad \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_2''} = \frac{\sin W}{\sin W''},\quad \frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{C}_2''} = \frac{\sin W}{\sin W'}, \quad (39)$$

von denen jede in den zwei andern enthalten ist, und wo wieder das rechte Vorzeichen in der so eben angezeigten Weise daraus sich entscheiden lässt, dass alle einzelnen in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen positiv sind.

Multiplizirt man jetzt die Gleichungen (37) in der Weise: die erste der ersten Gruppe mit $\mathfrak{C}$, die zweite der zweiten Gruppe mit $\mathfrak{C}_1'$, die dritte der dritten Gruppe mit $\mathfrak{C}_2''$, und setzt in die so umgeänderten Gleichungen anstatt der aus $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ gebildeten Quotienten ihre Werthe aus den Gleichungen (39), so entstehen die folgenden:

$$\mathfrak{C}^2 = 1 + \frac{\sin W'}{\sin W''}\cos W \cos \mathfrak{W} + \frac{\sin W}{\sin W''}\cos W' \cos \mathfrak{W}',$$

$$\mathfrak{C}_1'^2 = 1 + \frac{\sin W''}{\sin W'}\cos W \cos \mathfrak{W} + \frac{\sin W}{\sin W'}\cos W'' \cos \mathfrak{W}'',$$

$$\mathfrak{C}_2''^2 = 1 + \frac{\sin W''}{\sin W}\cos W' \cos \mathfrak{W}' + \frac{\sin W'}{\sin W}\cos W'' \cos \mathfrak{W}'',$$

welche sich auch so schreiben lassen:

$$\mathfrak{C}^2 \sin^2 W'' = \sin^2 W'' + \sin W' \sin W'' \cos W \cos \mathfrak{W} + \sin W \sin W'' \cos W' \cos \mathfrak{W}',$$

$$\mathfrak{C}_1'^2 \sin^2 W' = \sin^2 W' + \sin W' \sin W'' \cos W \cos \mathfrak{W} + \sin W \sin W' \cos W'' \cos \mathfrak{W}'',$$

$$\mathfrak{C}_2''^2 \sin^2 W = \sin^2 W + \sin W \sin W'' \cos W' \cos \mathfrak{W}' + \sin W \sin W' \cos W'' \cos \mathfrak{W}''.$$

Die auf der rechten Seite dieser letzten Gleichungen stehenden Ausdrücke sind alle drei einander gleich, nämlich gleich dem einen:

$$1 - \cos^2 W - \cos^2 W' - \cos^2 W'' + 2 \cos W \cos W' \cos W'',$$

wie man sogleich wahrnimmt, wenn man in jenen $1-\cos^2 W$, $1-\cos^2 W'$, $1-\cos^2 W''$ für $\sin^2 W$, $\sin^2 W'$, $\sin^2 W''$ setzt, und mittelst der Gleichungen (38) aus ihnen $\cos \mathfrak{W}$, $\cos \mathfrak{W}'$, $\cos \mathfrak{W}''$ wegschafft. Setzt man daher

(40) $$1 - \cos^2 W - \cos^2 W' - \cos^2 W'' + 2 \cos W \cos W' \cos W'' = h^2$$

und versteht man unter h den aus vorstehender Gleichung für h sich ergebenden positiven Wurzelwerth, so geben die drei unmittelbar vor dieser stehenden Gleichungen, wenn man aus ihnen die Quadratwurzel auszieht

(41) $$\mathfrak{C} = \frac{h}{\sin W''}, \quad \mathfrak{C}_1' = \frac{h}{\sin W'}, \quad \mathfrak{C}_2'' = \frac{h}{\sin W},$$

in welchen in der That h einen positiven Werth vorzustellen hat, da $\sin W''$, $\sin W'$, $\sin W$ positive Grössen sind, und auch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ der in Nr. 25. angeordneten Stellung der Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ zur Folge nur positive Werthe haben können.

Auf den gleichen in der Gleichung (40) durch h^2 bezeichneten Ausdruck stösst man wieder, wenn man die Gleichungen (38) quadrirt und hierauf der Reihe nach von $\sin^2 W' \sin^2 W''$, $\sin^2 W \sin^2 W''$, $\sin^2 W \sin^2 W'$ abzieht, wobei man findet:

$$\sin^2 W' \sin^2 W'' \sin^2 \mathfrak{W} = \sin^2 W' \sin^2 W'' - (\cos W' \cos W'' - \cos W)^2,$$

$$\sin^2 W \sin^2 W'' \sin^2 \mathfrak{W}' = \sin^2 W \sin^2 W'' - (\cos W \cos W'' - \cos W')^2,$$

$$\sin^2 W \sin^2 W' \sin^2 \mathfrak{W}'' = \sin^2 W \sin^2 W' - (\cos W \cos W' - \cos W'')^2.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen gehen sämmtlich in den Ausdruck über, welcher auf der linken Seite der Gleichung (40) steht, wenn man die in ihnen vorkommenden Klammern wegschafft und sodann die Quadrate der Sinuse in Quadrate von Kosinusen umwandelt; setzt man diesemnach h^2 an die Stelle der rechten Seiten in den drei vorstehenden Gleichungen, und zieht hierauf die Quadratwurzel aus, so gehen diese Gleichungen über in:

(42) $$\sin W' \sin W'' \sin \mathfrak{W} = h, \quad \sin W \sin W'' \sin \mathfrak{W}' = h, \quad \sin W \sin W' \sin \mathfrak{W}'' = h,$$

wo wieder das der Quadratwurzel beizugebende Vorzeichen auf die so eben angegebene Weise entschieden wird. Die vorstehenden Gleichungen ziehen aber sogleich noch die folgenden nach sich:

(43) $$\frac{\sin \mathfrak{W}}{\sin W} = \frac{\sin \mathfrak{W}'}{\sin W'} = \frac{\sin \mathfrak{W}''}{\sin W''} = \frac{h}{\sin W \sin W' \sin W''}.$$

Die Ausdrücke, welche die rechten Seiten der drei, denen (42) vorangehenden Gleichungen bilden, von welchen wir gesehen haben, dass jeder von ihnen dem Ausdrucke gleich ist, der mittelst der Gleichung (40) gleich h^2 gesetzt worden ist, lassen sich auf eine Form bringen, die zur logarithmischen Berechnung des positiven Werthes h sehr bequem ist. Wandelt man nämlich die Differenzen der Quadrate, welche sie darstellen, in Producte, und dann nach vollbrachter, sogleich in die Augen springender Reduction die entstandenen Summen und Differenzen von Kosinusen in Producte von Sinusen um, so giebt jede derselben:

$$\sin\frac{W+W'+W''}{2}\,.\,\sin\frac{-W+W'+W''}{2}\,.\,\sin\frac{W-W'+W''}{2}\,.\,\sin\frac{W+W'-W''}{2}=h^2. \qquad (44)$$

Der Werth h ist nichts anders, als der Rauminhalt eines Parallelepipeds, dessen drei zusammenstossende Kanten die von der Projectionsspitze A aus auf die drei Coordinatenaxen AX, AX′, AX″ aufgetragenen Längeneinheiten sind; denn der Rauminhalt dieses Parallelepipeds wird gefunden, wenn man eine seiner Seitenflächen, z. B. die zwischen den Axen AX und AX′ liegende, deren Inhalt sin W ist, mit der zu ihr gehörigen Höhe multiplizirt, welche letztere der Sinus des Winkels ist, den die Axe AX″ mit der Ebene XAX′ bildet, oder der Kosinus des Winkels, den die Axe AX″ mit der Polaraxe A$\mathfrak{X}''$ einschliesst, und also durch $\mathfrak{C}''_2$ gegeben wird. Es ist sonach der Rauminhalt des gedachten Parallelepipeds $\mathfrak{C}''_2$ sin W, oder, der dritten Gleichung (41) zur Folge, h. Dieser Eigenschaft wegen werden wir der Grösse h den Namen I n h a l t d e s C o o r d i n a t e n s y s t e m s geben.

Ein grosser Theil der vorstehenden Gleichungen schliesst sich an jene Formeln an, die in der sphärischen Trigonometrie zu Tage gefördert werden, so wie denn überhaupt auch alle übrigen Formeln dieses Theils der Mathematik leicht aus den hier gegebenen Gleichungen abgeleitet werden können. Diess kommt daher, dass das aus den Radien A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ hervorgehende sphärische Dreieck das Polardreieck von dem aus den Radien AX, AX′, AX″ hervorgehenden ist. Aus diesem Grunde werden wir von jetzt an das aus den Axen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ gebildete Coordinatensystem das P o l a r s y s t e m zu dem aus den Axen AX, AX′, AX″ gebildeten Coordinatensysteme nennen, so wie letzteres dem Polarsystem gegenüber das G r u n d s y s t e m heissen soll. Auch wollen wir die Axen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ die P o l a r a x e n und die AX, AX′, AX″ im Gegensatze die G r u n d a x e n nennen, wobei die Paare A$\mathfrak{X}$ und AX, A$\mathfrak{X}'$ und AX′, A$\mathfrak{X}''$ und AX″, von denen jedes die beiden gleich accentuirten Axen in sich begreift, z u s a m m e n g e h ö r i g e Grund- und Polaraxen heissen sollen. Eben so werden wir des leichtern Ausdrucks halber die dem Grundsysteme zugehörigen Coordinatenebenen XAX′, XAX″, X′AX″ die G r u n d - C o o r d i n a t e n e b e n e n, so wie die dem Polarsysteme angehörigen $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}'$A$\mathfrak{X}''$ die P o l a r - C o o r d i n a t e n e b e n e n nennen, wobei wir die XAX′ und $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}'$ noch insbesondere dadurch bezeichnen wollen, dass wir sagen, sie liegen der Grundaxe AX″, oder auch sie liegen der Polaraxe A$\mathfrak{X}''$ gegenüber, und eben so sagen wir, die XAX″ und $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}''$ liegen der Grundaxe AX′ oder auch der Polaraxe A$\mathfrak{X}'$ gegenüber, so wie die X′AX″ und $\mathfrak{X}'$A$\mathfrak{X}''$ als der Grundaxe AX oder der Polaraxe A$\mathfrak{X}$ gegenüber liegende Grund- oder Polar-Coordinatenebenen bezeichnet werden sollen. Die Vereinigung des Grundsystems mit seinem Polarsystem werden wir in der Folge ein v o l l s t ä n d i g e s oder ein D o p p e l s y s t e m nennen.

27) Durch die Formeln der vorigen Nummer ist man nun in den Stand gesetzt, alle auf das Polarsystem sich beziehenden Bestimmungsstücke aus den zum Grundsysteme gehörigen

Axenwinkeln W, W', W'' herzuholen. Vor Allem hat man nämlich mittelst der Gleichung (40) oder der (44) den Werth h aufzusuchen, dann lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (42) die Axenwinkel $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ des Polarsystems, und vermittelst der Gleichungen (41) die Grössen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2''$, d. h. die Winkel, welche ein Paar zusammengehöriger Grund- und Polaraxen mit einander machen, finden, zuletzt aber ergeben sich aus den Gleichungen (36), wenn man in dieselben für $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}_1'$, $\mathfrak{G}_2''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (41) einsetzt, die schiefen Projectionszahlen, welche die Richtungen der Polaraxen an den Grundaxen geben. Man findet so:

(45. a.) $$\begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{\sin W''}{h}, & \mathfrak{A}' = \dfrac{\sin W' \cos \mathfrak{W}}{h}, & \mathfrak{A}'' = \dfrac{\sin W \cos \mathfrak{W}'}{h}, \\[2ex] \mathfrak{A}_1 = \dfrac{\sin W'' \cos \mathfrak{W}}{h}, & \mathfrak{A}_1' = \dfrac{\sin W'}{h}, & \mathfrak{A}_1'' = \dfrac{\sin W \cos \mathfrak{W}''}{h}, \\[2ex] \mathfrak{A}_2 = \dfrac{\sin W'' \cos \mathfrak{W}'}{h}, & \mathfrak{A}_2' = \dfrac{\sin W' \cos \mathfrak{W}''}{h}, & \mathfrak{A}_2'' = \dfrac{\sin W}{h}, \end{cases}$$

oder auch, wenn man für h seine durch die Gleichungen (42) gegebenen Werthe einsetzt:

(45. b.) $$\begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{1}{\sin W \sin \mathfrak{W}'} = \dfrac{1}{\sin W' \sin \mathfrak{W}}, & \mathfrak{A}' = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}}{\sin W''}, & \mathfrak{A}'' = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}'}{\sin W''}, \\[2ex] \mathfrak{A}_1 = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}}{\sin W'}, & \mathfrak{A}_1' = \dfrac{1}{\sin W'' \sin \mathfrak{W}} = \dfrac{1}{\sin W \sin \mathfrak{W}''}, & \mathfrak{A}_1'' = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}''}{\sin W'}, \\[2ex] \mathfrak{A}_2 = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}'}{\sin W}, & \mathfrak{A}_2' = \dfrac{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}''}{\sin W}, & \mathfrak{A}_2'' = \dfrac{1}{\sin W' \sin \mathfrak{W}''} = \dfrac{1}{\sin W'' \sin \mathfrak{W}'}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (45. a.) lassen sich unmittelbar folgende Relationen ableiten:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1 = \frac{\sin W'' \sin W' \sin^2 \mathfrak{W}}{h^2}, \quad \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'' = \frac{\sin W'' \sin W (\cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}' - \cos \mathfrak{W}'')}{h^2}$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1' = \frac{\sin W \sin W' (\cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W}')}{h^2};$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2' = \frac{\sin W'' \sin W' (\cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}' - \cos \mathfrak{W}'')}{h^2}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}_2'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2 = \frac{\sin W'' \sin W \sin^2 \mathfrak{W}'}{h^2}$$

$$\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2'' = \frac{\sin W \sin W' (\cos \mathfrak{W}' \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W})}{h^2};$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2' - \mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2 = \frac{\sin W'' \sin W' (\cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W}')}{h^2},$$

$$\mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2'' = \frac{\sin W'' \sin W (\cos \mathfrak{W}' \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W})}{h^2}, \quad \mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'' - \mathfrak{A}_1''\mathfrak{A}_2' = \frac{\sin W' \sin W \sin^2 \mathfrak{W}''}{h^2};$$

trägt man aber die Gleichungen (38) durch wechselseitige Vertauschung der Buchstaben W und $\mathfrak{W}$ mit einander unter Beibehaltung der ihnen angehängten Accente und Indexe in das Polarsystem über, wodurch sie werden:

$$\sin \mathfrak{W}' \sin \mathfrak{W}'' \cos W = \cos \mathfrak{W}' \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W}, \quad \sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}'' \cos W' = \cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}'' - \cos \mathfrak{W}',$$
$$\sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}' \cos W'' = \cos \mathfrak{W} \cos \mathfrak{W}' - \cos \mathfrak{W}'',$$

so nehmen durch diese die vorigen folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1 = \frac{1}{h^2} \sin W'' \sin W' \sin^2 \mathfrak{W}, \quad \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'' = \frac{1}{h^2} \sin W'' \sin W \sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}' \cos W'',$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1' = \frac{1}{h^2} \sin W' \sin W \sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}'' \cos W';$$

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}'_2 = \frac{1}{h^2}\sin W''\sin W'\sin\mathfrak{W}\sin\mathfrak{W}'\cos W'',\quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{h^2}\sin W''\sin W\sin^2\mathfrak{W}',$$

$$\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''_2 = \frac{1}{h^2}\sin W'\sin W\sin\mathfrak{W}'\sin\mathfrak{W}''\cos W;$$

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}_2 = \frac{1}{h^2}\sin W''\sin W'\sin\mathfrak{W}\sin\mathfrak{W}''\cos W',$$

$$\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}''_2 = \frac{1}{h^2}\sin W''\sin W\sin\mathfrak{W}'\sin\mathfrak{W}''\cos W,\quad \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}'_2 = \frac{1}{h^2}\sin W'\sin W\sin^2\mathfrak{W}'',$$

und gehen nun mit Zuziehung derer (42) in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{A}\mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1 = \frac{\sin\mathfrak{W}}{h}, && \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}''_1 = \frac{\sin\mathfrak{W}}{h}\cos W'', && \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''_1 - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'_1 = \frac{\sin\mathfrak{W}}{h}\cos W',\\
&\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}'_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}'}{h}\cos W'', && \mathfrak{A}\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}'}{h}, && \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}'}{h}\cos W,\\
&\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}''}{h}\cos W', && \mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}''_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}''}{h}\cos W, && \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}'_2 = \frac{\sin\mathfrak{W}''}{h}.
\end{aligned}\right\}\quad (45.\ c.)$$

Auch zeigen die Gleichungen (45. a.) in Verbindung mit denen (41), dass

$$\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}'_1},\quad \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}''_2},\quad \frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}'_1} = \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{E}''_2} \qquad (45.\ d.)$$

ist.

28) Ueberhaupt aber, so wie die Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ das Polarsystem zu dem aus den Axen AX, AX', AX'' hervorgegangenen Grundsysteme bilden, so geben auch umgekehrt die Axen AX, AX', AX'' das Polarsystem her, wenn man sich unter dem Grundsystem das aus den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ gebildete Coordinatensystem vorstellt; daher lässt sich jede der in den beiden vorigen Nummern aufgestellten Relationen noch auf eine andere dieser zweiten Beziehung entsprechende Weise wiedergeben.

Bezeichnet man nämlich die auf das Polarsystem sich beziehenden Grössen durch dieselben Zeichen wie die eben so auf das Grundsystem sich beziehenden, mit dem Unterschiede jedoch, dass die jetzigen Zeichen mit Klammern umgeben werden, so dass

$(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{A}'')$ die schiefen Projectionszahlen, welche die Richtung AX an den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$,

$(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}'_1)$, $(\mathfrak{A}''_1)$ die schiefen Projectionszahlen, welche die Richtung AX' an den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$,

$(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}'_2)$, $(\mathfrak{A}''_2)$ die schiefen Projectionszahlen, welche die Richtung AX'' an den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$

liefert, vorstellen, und bedenkt man, dass die Grössen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'_1$, $\mathfrak{E}''_2$ in den beiderlei Beziehungen völlig einerlei Bedeutung haben, und dass alle übrigen senkrechten Projectionszahlen, welche die Axen AX, AX', AX'' an den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ geben, hier wie dort sämmtlich null sind, so ergiebt sich aus jeder in den vorigen Nummern aufgestellten Gleichung die ihr entsprechende hierher gehörige einfach dadurch, dass man die Buchstaben W und $\mathfrak{W}$ gegenseitig mit einander vertauscht und zugleich an die Stelle der schiefen Projectionszahlen die gleichen mit Klammern umgebenen Zeichen setzt, ohne an den Accenten und Indexen irgend etwas abzuändern. Wo in jenen Gleichungen der Werth h auftritt, da muss hier der gesetzt werden, welcher sich aus jenem durch die eben angezeigte Veränderung ergiebt; wir werden ihn, da wo er zum Vorschein kommt, durch denselben aber mit Klammern umgebenen Buchstaben also durch (h) bezeichnen. So verwandeln sich z. B. die Gleichungen (45. b.) hier in:

$$\text{(46. a.)} \quad \begin{cases} (\mathfrak{A}) = \dfrac{1}{\sin W \sin \mathfrak{W}'} = \dfrac{1}{\sin W' \sin \mathfrak{W}}, \quad (\mathfrak{A}') = \dfrac{\operatorname{cotg} W}{\sin \mathfrak{W}''}, \quad (\mathfrak{A}'') = \dfrac{\operatorname{cotg} W'}{\sin \mathfrak{W}''}, \\ (\mathfrak{A}_1) = \dfrac{\operatorname{cotg} W}{\sin \mathfrak{W}'}, \quad (\mathfrak{A}'_1) = \dfrac{1}{\sin W \sin \mathfrak{W}''} = \dfrac{1}{\sin W'' \sin \mathfrak{W}}, \quad (\mathfrak{A}''_1) = \dfrac{\operatorname{cotg} W''}{\sin \mathfrak{W}'}, \\ (\mathfrak{A}_2) = \dfrac{\operatorname{cotg} W'}{\sin \mathfrak{W}}, \quad (\mathfrak{A}'_2) = \dfrac{\operatorname{cotg} W''}{\sin \mathfrak{W}}, \quad (\mathfrak{A}''_2) = \dfrac{1}{\sin W' \sin \mathfrak{W}''} = \dfrac{1}{\sin W'' \sin \mathfrak{W}'}, \end{cases}$$

welche, verglichen mit denen, woraus sie hervorgegangen sind, folgende sehr einfache Relationen an die Hand geben:

$$\text{(46. b.)} \quad \begin{cases} (\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}, \quad (\mathfrak{A}') \cos \mathfrak{W} = \mathfrak{A}' \cos W, \quad (\mathfrak{A}'') \cos \mathfrak{W}' = \mathfrak{A}'' \cos W', \\ (\mathfrak{A}_1) \cos \mathfrak{W} = \mathfrak{A}_1 \cos W, \quad (\mathfrak{A}'_1) = \mathfrak{A}'_1, \quad (\mathfrak{A}''_1) \cos \mathfrak{W}'' = \mathfrak{A}''_1 \cos W'', \\ (\mathfrak{A}_2) \cos \mathfrak{W}' = \mathfrak{A}_2 \cos W', \quad (\mathfrak{A}'_2) \cos \mathfrak{W}'' = \mathfrak{A}'_2 \cos W'', \quad (\mathfrak{A}''_2) = \mathfrak{A}''_2. \end{cases}$$

29) Nachdem in den vorigen Nummern die Abhängigkeit des Polarsystems von dem Grundsystem ermittelt worden ist, sind wir im Stande die Gleichungen (12) und (15), wodurch die senkrechten Projectionszahlen und Coordinaten durch schiefe dargestellt werden, mit einer Leichtigkeit und Kürze aufzulösen, die nichts zu wünschen übrig lässt, um so zu den Gleichungen zu gelangen, durch welche die schiefen Projectionszahlen und Coordinaten in senkrechten ausgedrückt werden. Multiplicirt man nämlich die erste der Gleichungen (12) mit $\mathfrak{A}$, die zweite mit $\mathfrak{A}'$, die dritte mit $\mathfrak{A}''$ und addirt die drei so gewonnenen neuen Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$c\mathfrak{A} + c'\mathfrak{A}' + c''\mathfrak{A}'' = a(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \cos W + \mathfrak{A}'' \cos W') + a'(\mathfrak{A} \cos W + \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}'' \cos W'') \\ + a''(\mathfrak{A} \cos W' + \mathfrak{A}' \cos W'' + \mathfrak{A}'')$$

und diese Gleichung geht mit Zuziehung derer (33) auf der Stelle über in:

$$\text{(47. a.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{C}\, a = \mathfrak{A}\, c + \mathfrak{A}'\, c' + \mathfrak{A}''\, c''. \quad \text{Eben so erhält man noch} \\ \mathfrak{C}'_1\, a' = \mathfrak{A}_1\, c + \mathfrak{A}'_1\, c' + \mathfrak{A}''_1\, c'' \quad \text{und} \\ \mathfrak{C}''_2\, a'' = \mathfrak{A}_2\, c + \mathfrak{A}'_2\, c' + \mathfrak{A}''_2\, c'', \end{cases}$$

wenn man dieselben Gleichungen (12) der Reihe nach einmal mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}''_1$, ein anderes Mal mit $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ multiplizirt, jedesmal die drei erhaltenen Resultate addirt und dabei die Gleichungen (33) zu Rathe zieht. Setzt man in diese drei letzten Gleichungen anstatt der auf das Polarsystem sich beziehenden Grössen ihre Werthe aus den Gleichungen (41) und (45. a.), so wandeln sie sich um in:

$$\text{(47. b.)} \quad \begin{cases} h^2\, a = \sin W'' \,(c \sin W'' + c' \sin W' \cos \mathfrak{W} + c'' \sin W \cos \mathfrak{W}') \\ h^2\, a' = \sin W' \,(c \sin W'' \cos \mathfrak{W} + c' \sin W' + c'' \sin W \cos \mathfrak{W}'') \\ h^2\, a'' = \sin W \,(c \sin W'' \cos \mathfrak{W}' + c' \sin W' \cos \mathfrak{W}'' + c'' \sin W). \end{cases}$$

Auf die gleiche Weise kann man aus den Gleichungen (15) die drei folgenden ableiten:

$$\text{(48. a.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{C}\, x = \mathfrak{A}\, u + \mathfrak{A}'\, u' + \mathfrak{A}''\, u'', \\ \mathfrak{C}'_1\, x' = \mathfrak{A}_1\, u + \mathfrak{A}'_1\, u' + \mathfrak{A}''_1\, u'', \\ \mathfrak{C}''_2\, x'' = \mathfrak{A}_2\, u + \mathfrak{A}'_2\, u' + \mathfrak{A}''_2\, u'', \end{cases}$$

aus denen sich, wie so eben die (47. b.) aus (47. a.), die folgenden ergeben:

$$\text{(48. b.)} \quad \begin{cases} h^2 x = \sin W'' \,(u \sin W'' + u' \sin W' \cos \mathfrak{W} + u'' \sin W \cos \mathfrak{W}') \\ h^2 x' = \sin W' \,(u \sin W'' \cos \mathfrak{W} + u' \sin W' + u'' \sin W \cos \mathfrak{W}'') \\ h^2 x'' = \sin W \,(u \sin W'' \cos \mathfrak{W}' + u' \sin W' \cos \mathfrak{W}'' + u'' \sin W) \end{cases}$$

wodurch die schiefen Coordinaten in senkrechten ausgedrückt werden. Diese letzten zwei Gruppen von Gleichungen erhält man noch leichter aus denen (47. a) und (47. b.), wenn man in diesen die Projectionszahlen durch Coordinaten nach Anleitung der Gleichungen (5) ersetzt.

Stellen x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' die schiefen und senkrechten Coordinaten eines andern Punctes O_1 vor, so wie x, x', x'' und u, u', u'' die des Punctes O, so ist aus denselben Gründen:

$$\mathfrak{C}\, x_1 = \mathfrak{A}\, u_1 + \mathfrak{A}'\, u_1' + \mathfrak{A}''\, u_1'',$$
$$\mathfrak{C}_1'\, x_1' = \mathfrak{A}_1\, u_1 + \mathfrak{A}_1'\, u_1' + \mathfrak{A}_1''\, u_1'',$$
$$\mathfrak{C}_2''\, x_1'' = \mathfrak{A}_2\, u_1 + \mathfrak{A}_2'\, u_1' + \mathfrak{A}_2''\, u_1''$$

und

$$h^2 x_1 = \sin W'' \,(u_1 \sin W'' + u_1' \sin W' \cos \mathfrak{W} + u_1'' \sin W \cos \mathfrak{W}'),$$
$$h^2 x_1' = \sin W' \,(u_1 \sin W'' \cos \mathfrak{W} + u_1' \sin W' + u_1'' \sin W \cos \mathfrak{W}''),$$
$$h^2 x_1'' = \sin W \,(u_1 \sin W'' \cos \mathfrak{W}' + u_1' \sin W' \cos \mathfrak{W}'' + u_1'' \sin W);$$

zieht man von diesen Gleichungen die drei vorangegangenen ihnen ähnlichen der Reihe nach ab, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{C}\,(x_1 - x) &= \mathfrak{A}\,(u_1 - u) + \mathfrak{A}'\,(u_1' - u') + \mathfrak{A}''\,(u_1'' - u''),\\ \mathfrak{C}_1'\,(x_1' - x') &= \mathfrak{A}_1\,(u_1 - u) + \mathfrak{A}_1'\,(u_1' - u') + \mathfrak{A}_1''\,(u_1'' - u''),\\ \mathfrak{C}_2''\,(x_1'' - x'') &= \mathfrak{A}_2\,(u_1 - u) + \mathfrak{A}_2'\,(u_1' - u') + \mathfrak{A}_2''\,(u_1'' - u'')\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(48. c.)}$$

und

$$\left.\begin{aligned}h^2(x_1 - x) &= \sin W''\,[(u_1 - u)\sin W'' + (u_1' - u')\sin W' \cos \mathfrak{W} + (u_1'' - u'')\sin W \cos \mathfrak{W}']\\ h^2(x_1' - x') &= \sin W'\,[(u_1 - u)\sin W'' \cos \mathfrak{W} + (u_1' - u')\sin W' + (u_1'' - u'')\sin W \cos \mathfrak{W}'']\\ h^2(x_1'' - x'') &= \sin W\,[(u_1 - u)\sin W'' \cos \mathfrak{W}' + (u_1' - u')\sin W' \cos \mathfrak{W}'' + (u_1'' - u'')\sin W].\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(48. d.)}$$

30) Man kann den Gleichungen von der Form, wie die (47. b.) und (48. b.) sind, eine zwar einfachere, jedoch minder symmetrische Gestalt geben. Dividirt man sie nämlich mit h und setzt in ihren zwei letzten Gliedern denjenigen Werth von h aus den Gleichungen (42), welcher den gleichen Polarcoordinatenwinkel in sich trägt, als das mit h dividirte Glied, so lassen sie sich so schreiben:

$$\left.\begin{aligned}h\,a &= c\,\frac{\sin^2 W''}{h} + c' \operatorname{cotg} \mathfrak{W} + c'' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}',\\ h\,a' &= c'\,\frac{\sin^2 W'}{h} + c \operatorname{cotg} \mathfrak{W} + c'' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}'',\\ h\,a'' &= c''\,\frac{\sin^2 W}{h} + c \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' + c' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}''\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(49. a.)}$$

und

$$\left.\begin{aligned}h\,x &= x\,\frac{\sin^2 W''}{h} + x' \operatorname{cotg} \mathfrak{W} + x'' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}',\\ h\,x' &= x'\,\frac{\sin^2 W'}{h} + x \operatorname{cotg} \mathfrak{W} + x'' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}'',\\ h\,x'' &= x''\,\frac{\sin^2 W}{h} + x \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' + x' \operatorname{cotg} \mathfrak{W}''.\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(49. b.)}$$

Es lassen sich noch viele von den frühern Gleichungen auf ähnliche Weise in andere Gestalten bringen. So geben die Gleichungen (33), wenn man in sie für die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Polaraxen ihre Werthe aus den Gleichungen (41) und (45. a.) einsetzt, und zunächst bei den drei ersten einer jeden Gruppe stehen bleibt:

$$\left.\begin{aligned}h^2 &= \sin W''\,(\sin W'' + \sin W' \cos W \cos \mathfrak{W} + \sin W \cos W' \cos \mathfrak{W}')\\ h^2 &= \sin W'\,(\sin W'' \cos W \cos \mathfrak{W} + \sin W' + \sin W \cos W'' \cos \mathfrak{W}'')\\ h^2 &= \sin W\,(\sin W'' \cos W' \cos \mathfrak{W}' + \sin W' \cos W'' \cos \mathfrak{W}'' + \sin W)\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(50. a.)}$$

wodurch eben so viele neue Ausdrücke für h^2 erhalten werden, und aus den übrigen findet man noch ausserdem:

(50. b.) $$\left\{\begin{array}{l} o = \sin W''\cos W + \sin W'\cos \mathfrak{W} + \sin W\cos W''\cos \mathfrak{W}', \\ o = \sin W''\cos W + \sin W\cos \mathfrak{W}' + \sin W'\cos W''\cos \mathfrak{W}, \\ o = \sin W'\cos W + \sin W''\cos \mathfrak{W} + \sin W\cos W'\cos \mathfrak{W}'', \\ o = \sin W'\cos W'' + \sin W\cos \mathfrak{W}'' + \sin W''\cos W'\cos \mathfrak{W}, \\ o = \sin W\cos W' + \sin W''\cos \mathfrak{W}' + \sin W'\cos W\cos \mathfrak{W}'', \\ o = \sin W\cos W'' + \sin W'\cos \mathfrak{W}'' + \sin W''\cos W\cos \mathfrak{W}', \end{array}\right.$$

welche letztere man auch so schreiben kann:

(50. c.) $$\left\{\begin{array}{l} o = \frac{\sin^2 W''}{h}\cos W + \operatorname{cotg}\mathfrak{W} + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}'\cos W'', \\ o = \frac{\sin^2 W''}{h}\cos W' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}\cos W'', \\ o = \frac{\sin^2 W'}{h}\cos W + \operatorname{cotg}\mathfrak{W} + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}''\cos W', \\ o = \frac{\sin^2 W'}{h}\cos W'' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}'' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}\cos W', \\ o = \frac{\sin^2 W}{h}\cos W' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}''\cos W, \\ o = \frac{\sin^2 W}{h}\cos W'' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}'' + \operatorname{cotg}\mathfrak{W}'\cos W. \end{array}\right.$$

Durch diese Gleichungen ergeben sich neue Formen nicht nur für h, sondern es lassen sich mit ihrer Hilfe auch die meisten frühern Gleichungen auf unsäglich viele Arten umwandeln, wobei es nicht immer leicht ist, die einen dieser Formen in den andern zu erkennen; aber eben deswegen thut man wohl, sich zur Regel zu machen, bis ans Ende der Rechnung die Zeichen für die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Polaraxen an den Grundaxen beizubehalten, und erst ganz zuletzt, da wo man es für nützlich hält, anstatt derselben ihre Werthe zu setzen.

31) Es ist oben zu Ende der Nr. 14. darauf aufmerksam gemacht worden, dass sowohl zwischen den drei schiefen als zwischen den drei senkrechten Projectionszahlen einer jeden Richtung eine gewisse Abhängigkeit statt finden müsse, welche wir jetzt angeben werden. Setzt man in die Gleichung (11) für c, c′, c″ ihre durch die Gleichungen (12) gegebenen Werthe, so findet man:

(51) $$1 = a^2 + a'^2 + a''^2 + 2aa'\cos W' + 2aa''\cos W' + 2a'a''\cos W'',$$

welche Gleichung die zwischen den drei schiefen Projectionszahlen einer jeden Richtung statt findende Abhängigkeit ausspricht. Setzt man ferner in die Gleichung (11) für a, a′, a″ ihre durch die Gleichungen (47. a.) oder (47. b.) oder (49. a.) gegebenen Werthe, so stösst man auf eine Gleichung, welche sich in den drei nachstehenden Formen darbietet:

(52. a.) $$1 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}c^2 + \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}c'^2 + \frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''}c''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)cc' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''}\right)cc'' + \left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'} + \frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''}\right)c'c'',$$

oder

(52. b.) $$h^2 = c^2\sin^2 W'' + c'^2\sin^2 W' + c''^2\sin^2 W + 2cc'\sin W''\sin W'\cos\mathfrak{W} + 2cc''\sin W''\sin W\cos\mathfrak{W}' + 2c'c''\sin W'\sin W\cos\mathfrak{W}''$$

oder

$$h = c^2\frac{\sin^2 W''}{h} + c'^2\frac{\sin^2 W'}{h} + c''^2\frac{\sin^2 W}{h} + 2\,c\,c'\operatorname{cotg}\mathfrak{W} + 2\,c\,c''\operatorname{cotg}\mathfrak{W}' + 2\,c'c''\operatorname{cotg}\mathfrak{W}'' \qquad (52.\,c.)$$

von welchen jede die Abhängigkeit ausspricht, welche zwischen den drei senkrechten Projectionszahlen einer beliebigen Richtung statt findet, und die erste dieser drei Formen kann mit Zuziehung der Gleichungen (45. d.) noch in verschiedene andere Gestalten übergeführt werden.

Aus diesen Gleichungen lässt sich entnehmen, dass solche schiefe oder senkrechte Projectionszahlen, welche in der gleichen Aufeinanderfolge einerlei Verhältniss zu einander aufweisen, parallelen Richtungen angehören, oder, was dasselbe ist, dass solche proportionale Projectionszahlen immer dem Werthe nach gleich sind, und dabei entweder einerlei oder die gerade entgegengesetzten Vorzeichen besitzen. In der That stellen neben den in den Gleichungen (51) oder (52) vorkommenden schiefen und senkrechten Projectionszahlen a, a', a'' und c, c', c'', die von einer beliebigen Richtung an den Axen AX, AX', AX'' geliefert werden, μa, $\mu a'$, $\mu a''$ oder νc, $\nu c'$, $\nu c''$ die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen irgend einer andern Richtung an den gleichen Axen vor, welche letztere den vorigen proportional sind, so müssen die Gleichungen (51) oder (52) noch bestehen bleiben, wenn man in ihnen μa, $\mu a'$, $\mu a''$ oder νc, $\nu c'$, $\nu c''$ an die Stelle von a, a', a'' oder c, c', c'' setzt; thut man diess aber, so verwandeln sich obige Gleichungen in andere, deren linke Seiten ganz die gleichen wie zuvor bleiben, und deren rechte Seiten die vorigen mit μ^2 bei der (51) und mit ν^2 bei denen (52) multiplizirt sind. Dividirt man daher die letzteren durch die entsprechenden vorigen, so findet man bei denen zu (51) gehörigen

$$\mu^2 = 1\,, \quad \text{oder} \quad \nu^2 = 1$$

bei denen zu (52) gehörigen; es kann daher sowohl μ als ν nur entweder $+1$ oder -1 sein, und sonach haben die letztern Projectionszahlen mit den erstern stets einerlei absolute Werthe, während sie dem Vorzeichen nach ebenfalls sämmtlich mit einander übereinstimmen, oder die einen den andern gerade entgegengesetzt sein müssen.

Die hier erwiesene Eigenthümlichkeit proportionaler Projectionszahlen führt nun zu der Einsicht, dass die in Nr. 22. aufgestellten Gleichungen (26) oder (27) ein untrügliches Kennzeichen paralleler Richtungen sind; denn dort ist dargethan worden, dass jene Gleichungen statt finden, wenn sich dieselben auf Puncte O, O_1, $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ beziehen, von denen die O und O_1 irgend einer Geraden, die $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ dagegen einer andern dieser parallelen Geraden angehören, und jetzt kann man zeigen, dass zwei Gerade, von denen die eine die Puncte O und O_1, die andere die Puncte $\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}_1$ enthält, parallel sein müssen, wenn die oben angeführten Gleichungen auf sie anwendbar sind. Ist nämlich

$$x_1 - x : x_1' - x' : x_1'' - x'' = \mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x} : \mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}' : \mathfrak{x}_1'' - \mathfrak{x}'' \text{ oder}$$

$$u_1 - u : u_1' - u' : u_1'' - u'' = \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u} : \mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}' : \mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}''$$

für irgend zwei Gerade und bezeichnen hier wieder r und $\mathfrak{r}$ die Abstände der Puncte O, O_1 und $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}_1$ von einander, so ist auch

$$\frac{x_1 - x}{r} : \frac{x_1' - x'}{r} : \frac{x_1'' - x''}{r} = \frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}}{\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}'}{\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{x}_1'' - \mathfrak{x}''}{\mathfrak{r}} \text{ oder}$$

$$\frac{u_1 - u}{r} : \frac{u_1' - u'}{r} : \frac{u_1'' - u''}{r} = \frac{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}}{\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}'}{\mathfrak{r}} : \frac{\mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}''}{\mathfrak{r}}$$

und die in diesen letzten Gleichungen auftretenden Quotienten sind den Gleichungen (3) zur Folge die schiefen oder senhrechten Projectionszahlen der von O nach O_1 und von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{O}_1$

hinzielenden Richtungen der beiden Geraden; es sind also die diesen beiden Richtungen zugehörigen Projectionszahlen einander proportional, somit der so eben erwiesenen Eigenthümlichkeit solcher Projectionszahlen gemäss ihrem absoluten Werthe nach gleich und ihren Vorzeichen nach entweder dieselben oder die gerade entgegengesetzten, worauf die Betrachtungen der Nr. 5. sogleich zu dem Schluss führen, dass die beiden Geraden einander parallel und entweder gleichläufig oder gegenläufig sein müssen. Eben so lässt sich darthun, dass zwei Puncte, welche die Gleichungen (27) der einen oder andern Art erfüllen, mit der Coordinatenspitze A in einer und derselben Geraden liegen müssen, was aber auch schon als ein besonderer Fall in dem eben Gesagten enthalten ist.

32) Setzt man in die Gleichungen (51) oder (52) für a, a′, a″ oder c, c′, c″ ihre durch die Gleichungen (5) gegebenen Werthe ein, so verwandeln sie sich in andere, welche zeigen, wie sich der Abstand eines Punctes von der Coordinatenspitze blos durch dessen schiefe, oder blos durch dessen senkrechte Coordinaten sich ausdrücken lässt. Die (51) nämlich giebt

(53) $$r^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 + 2\,x\,x'\cos W + 2\,x\,x''\cos W' + 2\,x'x''\cos W''$$

die (52) hingegen geben:

(54. a.) $$r^2 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}u^2 + \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}u'^2 + \frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}u''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)u\,u' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)u\,u'' + \left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1} + \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)u'u'',$$

oder

(54. b.) $$h^2r^2 = u^2\sin^2 W'' + u'^2\sin^2 W' + u''^2\sin^2 W + 2\,u\,u'\sin W''\sin W'\cos\mathfrak{W} + 2\,u\,u''\sin W''\sin W\cos\mathfrak{W}' + 2\,u'u''\sin W'\sin W\cos\mathfrak{W}''$$

oder

(54. c.) $$h\,r^2 = u^2\frac{\sin^2 W''}{h} + u'^2\frac{\sin^2 W'}{h} + u''^2\frac{\sin^2 W}{h} + 2\,u\,u'\operatorname{cotg}\mathfrak{W} + 2\,u\,u''\operatorname{cotg}\mathfrak{W}' + 2\,u'u''\operatorname{cotg}\mathfrak{W}'',$$

welche Glnichungen sich auch aus der (17) ableiten lassen. Eben so könnte man aus der Gleichung (20) andere herholen, durch welche die Entfernung zweier beliebiger Puncte von einander blos durch ihre schiefen oder blos durch ihre senkrechten Coordinaten ausgedrückt werden. Weil aber alle solche Gleichungen überhaupt in den Anwendungen besser ganz umgangen werden, so wollen wir auf dieselben nicht weiter eingehen.

Aus den Gleichungen (53) und (54. a. bis c.) lässt sich folgern, dass man jedesmal eine Richtung auffinden kann, deren schiefe oder senkrechte Projectionszahlen sich zu einander verhalten sollen, wie drei beliebig gegebene reelle positive oder negative Zahlen m, m′, m″ oder n, n′, n″. Denn sucht man da, wo es sich um schiefe Projectionszahlen handelt, eine Grösse H von der Beschaffenheit auf, dass

(55. a.) $$m^2 + m'^2 + m''^2 + 2\,m\,m'\cos W + 2\,m\,m''\cos W' + 2\,m'm''\cos W'' = H^2$$

ist, oder da, wo es sich um senkrechte Projectionszahlen handelt, eine Grösse $\mathfrak{H}$ von der Beschaffenheit, dass

(55. b.) $$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}n^2 + \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}n'^2 + \frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}n''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)n\,n' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)n\,n'' + \left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1} + \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)n'n'' = \mathfrak{H}^2$$

ist, welche letztere Gleichung sich auch in den zwei andern Formen schreiben lässt, wie sich der Gleichung (54. a.) noch die beiden andern Formen (54. b.) und (54. c.) geben liessen, so sind im erstern Falle $\frac{m}{H}$, $\frac{m'}{H}$, $\frac{m''}{H}$ die schiefen und im andern Falle $\frac{n}{\mathfrak{H}}$, $\frac{n'}{\mathfrak{H}}$, $\frac{n''}{\mathfrak{H}}$ die senkrechten Projectionszahlen der gesuchten Richtung, wie man leicht daran erkennen kann, dass sich die Zahlen m, m′, m″ oder n, n′, n″ jederzeit auf eine Längeneinheit beziehen lassen,

und man den Punct O angeben kann, dessen schiefe oder senkrechte Coordinaten diese Längen sind, und dessen Entfernung von der Coordinatenspitze A den Gleichungen (53) und (54) zur Folge, der für H oder $\mathfrak{H}$ aus den Gleichungen (55. a.) oder (55. b.) sich ergebende positive Werth ist. Unter solchen Umständen hat dann aber die Richtung AO in Gemässheit der Gleichungen (5) die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen $\pm\frac{m}{H}$, $\pm\frac{m'}{H}$, $\pm\frac{m''}{H}$ oder $\pm\frac{n}{\mathfrak{H}}$, $\pm\frac{n'}{\mathfrak{H}}$, $\pm\frac{n''}{\mathfrak{H}}$, welche sich wie die Zahlen m, m', m'' oder n, n', n'' verhalten, bei welchen stets die obern oder stets die untern Vorzeichen genommen werden müssen, je nachdem man für H oder $\mathfrak{H}$ den sich ergebenden positiven oder negativen Werth nimmt, wesshalb AO die gesuchte Richtung ist. Man erhält jederzeit zwei solche Richtungen, die einander parallel und gegenläufig sind, wie man sogleich daraus ersieht, dass man anstatt der gegebenen Zahlen eben so gut auch sie mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen nehmen kann.

33) Die Eigenschaften des Polarsystems setzen ferner in den Stand, die Coordinaten eines Punctes oder die Projectionszahlen einer Richtung an den Polaraxen anzugeben, wenn die desselben Punctes oder derselben Richtung an den Grundaxen bekannt sind. Stellen nämlich a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer gegebenen Richtung an den Axen AX, AX', AX'' vor, und stellen wir die gleichartigen Projectionszahlen derselben Richtung an den Axen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ im Geiste der in Nr. 28. eingeführten Bezeichnungsweise durch (a), (a'), (a'') und (c), (c'), (c'') dar, so geht aus der Gleichung (9. a. oder b.) hervor, erstlich, dass

$$(c)=\mathfrak{C}a,\quad (c')=\mathfrak{C}_1'a',\quad (c'')=\mathfrak{C}_2''a'' \qquad \textbf{(56. a.)}$$

ist, wie man sogleich einsieht, wenn man sich successive unter θ den Winkel denkt, welchen die gegebene Richtung zuerst mit der Polaraxe A$\mathfrak{X}$, dann mit der A$\mathfrak{X}'$ und zuletzt mit der A$\mathfrak{X}''$ bildet, deren Kosinuse die senkrechten Projectionszahlen der gegebenen Richtung an den Polaraxen, also die durch (c), (c'), (c'') bezeichneten Grössen sind, und erwägt, dass bei jedem der drei Winkel die schiefen Projectionszahlen ihres einen Schenkels, der die gegebene Richtung ist, a, a', a'' sind, während die senkrechten Projectionszahlen ihres andern Schenkels, der in den drei auf einander folgenden Fällen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ ist, an den Axen AX, AX', AX'' den Gleichungen (32) zur Folge im ersten Falle $\mathfrak{C}$, o, o, im andern Falle o, $\mathfrak{C}_1'$, o, im letzten Falle o, o, $\mathfrak{C}_2''$ sind. Dieselbe Gleichung (9. a. oder b.) liefert aber noch ausserdem

$$c=\mathfrak{C}(a),\quad c'=\mathfrak{C}_1'(a'),\quad c''=\mathfrak{C}_2''(a''), \qquad \textbf{(56. b.)}$$

wie man sogleich einsieht, wenn man jene Gleichung auf das Polarsystem in Anwendung bringt, und unter θ successive die Winkel sich denkt, welche die gegebene Richtung zuerst mit der Grundaxe AX, dann mit der AX' und zuletzt mit der AX'' einschliesst, deren Kosinuse die Grössen c, c', c'' sind, und erwägt, dass bei jedem der drei Winkel die schiefen Projectionszahlen ihres einen Schenkels, der die gegebene Richtung ist, an den Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ die durch (a), (a'), (a'') bezeichneten Grössen sind, während die senkrechten Projectionszahlen ihres andern Schenkels, der jetzt in den drei auf einander folgenden Fällen AX, AX', AX'' ist, dem in Nr. 28. Gesagten gemäss, an den Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ im ersten Falle $\mathfrak{C}$, o, o, im andern Falle o, $\mathfrak{C}_1'$, o, im dritten Falle o, o, $\mathfrak{C}_2''$ wie vorher sind.

Stellen ferner x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten irgend eines gegebenen Punctes an den Axen AX, AX', AX'' vor im Sinne der vorhin erwähnten Bezeichnungsweise, (x), (x'), (x'') und (u), (u'), (u'') die desselben Punctes an den Polaraxen

$A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ und sind ausserdem a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der von der Coordinatenspitze nach dem gegebenen Puncte hinzielenden Richtung an den Axen AX, AX', AX'', so wie (a), (a'), (a'') und (c), (c'), (c'') die derselben Richtung an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$, so finden zwischen diesen Projectionszahlen die Gleichungen (56. a. und b.) statt. Es ist aber, wenn r die Entfernung des gegebenen Punctes von der Coordinatenspitze anzeigt, nach Aussage der Gleichungen (5):

$$a = \frac{x}{r}, \quad a' = \frac{x'}{r}, \quad a'' = \frac{x''}{r} \quad \text{und} \quad c = \frac{u}{r}, \quad c' = \frac{u'}{r}, \quad c'' = \frac{u''}{r}$$

und eben so hat man an dem Polarsysteme:

$$(a) = \frac{(x)}{r}, \quad (a') = \frac{(x')}{r}, \quad (a'') = \frac{(x'')}{r} \quad \text{und} \quad (c) = \frac{(u)}{r}, \quad (c') = \frac{(u')}{r}, \quad (c'') = \frac{(u'')}{r},$$

weil die Entfernung r in beiden Fällen die gleiche bleibt. Setzt man nun in die Gleichungen (56. a. und b.) an die Stelle der dortigen Projectionszahlen ihre hier gegebenen Werthe, so erhält man:

(57. a.) $$(u) = \mathfrak{S}\,x, \quad (u') = \mathfrak{S}'_1\,x', \quad (u'') = \mathfrak{S}''_2\,x''$$

und

(57. b.) $$u = \mathfrak{S}\,(x), \quad u' = \mathfrak{S}'_1\,(x'), \quad u'' = \mathfrak{S}''_2\,(x'').$$

Aus den Gleichungen (56. a. und b.) und (57. a. und b.) folgt noch

(58. a.) $$a\,c = (a)\,(c), \quad a'c' = (a')\,(c'), \quad a''c'' = (a'')\,(c'')$$

und

(58. b.) $$x\,u = (x)\,(u), \quad x'u' = (x')\,(u'), \quad x''u'' = (x'')\,(u''),$$

d. h. das Product der beiden im Grundsysteme auf eine und dieselbe Axe bezogenen schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer Richtung, oder der zwei Coordinaten eines Punctes ist gleich dem Producte aus den beiden im Polarsysteme auf die mit jener Grundaxe zusammengehörige Polaraxe bezogenen Projectionszahlen derselben Richtung, oder Coordinaten desselben Punctes.

34) Wir kommen jetzt zu den Formeln, mit deren Hilfe sich die Uebertragung der Richtungen und Puncte aus einem beliebigen Coordinatensysteme in ein anderes beliebiges, dessen Axen gegen die vorigen ganz nach Belieben geneigt sein können, bewerkstelligen lässt, wobei wir den rein rechnenden Weg einschlagen werden, obgleich sich die hier zu erhaltenden Resultate auch wieder mittelst des oben angegebenen Projectionssatzes (8. a.) oder (8. b.) in sehr einfacher Weise auffinden lassen.

Zu diesem Ende denken wir uns einen beliebigen Punct O im Raume, dessen Entfernung von der Coordinatenspitze r ist, und bezeichnen durch x, x', x'' die schiefen, durch u, u', u'' die senkrechten Coordinaten dieses Punctes an den ursprünglichen Axen AX, AX', AX'', so wie durch a, a', a'' die schiefen, durch c, c', c'' die senkrechten Projectionszahlen, welche die von der Coordinatenspitze A nach jenem Puncte O hinzielende Richtung an den gleichen Axen liefert; ferner bezeichnen wir durch y, y', y'' die schiefen, durch v, v', v'' die senkrechten Coordinaten desselben Punctes an den neuen Axen AY, AY', AY'', so wie durch b, b', b'' die schiefen, durch d, d', d'' die senkrechten Projectionszahlen, welche die von der Coordinatenspitze A nach dem beliebigen Puncte O hin zielende Richtung AO an eben diesen neuen Axen AY, AY', AY'' giebt. Diese Bezeichnungen angenommen, ist zufolge der Gleichung (17), wenn man diese auf das ursprüngliche System in Anwendung bringt und unter θ successive die Winkel OAY, OAY', OAY'' versteht, dem Schenkel AO stets die schiefen, den Schenkeln AY, AY', AY'' hingegen stets die senkrechten Projectionszahlen zuertheilend:

$$\left.\begin{aligned} d &= C\,a + C'\,a' + C''\,a'' = D\,a + D_1\,a' + D_2\,a'', \\ d' &= C_1\,a + C_1'\,a' + C_1''\,a'' = D'\,a + D_1'\,a' + D_2'\,a'', \\ d'' &= C_2\,a + C_2'\,a' + C_2''\,a'' = D''\,a + D_1''\,a' + D_2''\,a'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (59.\ a.)$$

wobei die in Nr. 23. eingeführte Bezeichnungsweise beibehalten worden ist, und die dritten Ausdrücke aus den zweiten mittelst der Gleichungen (31) hergeholt worden sind. Wendet man dieselbe Gleichung (9. a. oder b.) auf das neue aus den Axen A Y, A Y′, A Y″ an, so führt sie, wenn man unter θ successive die Winkel O A X, O A X′, O A X″ versteht, und dem einen Schenkel A O dieser Winkel stets die schiefen, den andern Schenkeln A X, A X′, A X″ hingegen stets die senkrechten Projectionszahlen zuertheilt, auf die gleiche Weise zu den nachstehenden Resultaten:

$$\left.\begin{aligned} c &= D\,b + D'\,b' + D''\,b'' = C\,b + C_1\,b' + C_2\,b'', \\ c' &= D_1\,b + D_1'\,b' + D_1''\,b'' = C'\,b + C_1'\,b' + C_2'\,b'', \\ c'' &= D_2\,b + D_2'\,b' + D_2''\,b'' = C''\,b + C_1''\,b' + C_2''\,b'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (59.\ b.)$$

Man wird auf den ersten Blick gewahr werden, dass die Gleichungen (59. a.) und (59. b.) durch eine wechselseitige Vertauschung der den beiderlei Systemen entsprechenden ähnlich gebildeten Grössen in einander übergehen, wovon der Grund in der vollständigen Gegenseitigkeit liegt, die zwischen dem ursprünglichen und dem neuen Systeme statt findet.

Dieselben Gleichungen (9. a. oder 9. b.) liefern aber auch noch, wenn man sie auf das ursprüngliche System in Anwendung bringt und unter θ successive die drei Winkel O A Y, O A Y′, O A Y″ versteht, ihrem einen Schenkel A O aber immer die senkrechten, ihren andern Schenkeln A Y, A Y′, A Y″ dagegen immer die schiefen Projectionszahlen zuertheilt:

$$\left.\begin{aligned} d &= A\,c + A'\,c' + A''\,c'', \\ d' &= A_1\,c + A_1'\,c' + A_1''\,c'', \\ d'' &= A_2\,c + A_2'\,c' + A_2''\,c''; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (60.\ a.)$$

wendet man aber dieselben Gleichungen (9. a. oder 9. b.) auf das neue System an, und versteht man unter θ successive die Winkel O A X, O A X′, O A X″, ihrem einen Schenkel A O stets die senkrechten, ihren andern Schenkeln A X, A X′, A X″ stets die schiefen Projectionszahlen zuertheilend, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} c &= B\,d + B'\,d' + B''\,d'', \\ c' &= B_1\,d + B_1'\,d' + B_1''\,d'', \\ c'' &= B_2\,d + B_2'\,d' + B_2''\,d'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (60.\ b.)$$

und es zeigt sich zwischen diesen beiden letzten Gruppen von Gleichungen wieder dieselbe enge Verwandtschaft, welche wir zwischen den beiden vorigen wahrgenommen haben.

Fügt man zu den Gleichungen (47. a.), welche sich auf das ursprüngliche System beziehen, noch dieselben auf das neu hinzu gekommene System bezogenen, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\,a &= \mathfrak{A}\,c + \mathfrak{A}'\,c' + \mathfrak{A}''\,c'' \quad \text{und} \quad & \mathfrak{D}\,b &= \mathfrak{B}\,d + \mathfrak{B}'\,d' + \mathfrak{B}''\,d'', \\ \mathfrak{C}_1'\,a' &= \mathfrak{A}_1\,c + \mathfrak{A}_1'\,c' + \mathfrak{A}_1''\,c'' \quad \text{und} \quad & \mathfrak{D}_1'\,b' &= \mathfrak{B}_1\,d + \mathfrak{B}_1'\,d' + \mathfrak{B}_1''\,d'', \\ \mathfrak{C}_2''\,a'' &= \mathfrak{A}_2\,c + \mathfrak{A}_2'\,c' + \mathfrak{A}_2''\,c'' \quad \text{und} \quad & \mathfrak{D}_2''\,b'' &= \mathfrak{B}_2\,d + \mathfrak{B}_2'\,d' + \mathfrak{B}_2''\,d'', \end{aligned}$$

wobei die Grössen, deren Grundzeichen $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ ist, dasselbe in Bezug auf das neu hinzugekommene vereinigte Grund- und Polarsystem vorstellen, was die, deren Grundzeichen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ ist, in Bezug auf das ursprüngliche vereinigte System anzeigen, nämlich die Projectionszahlen, welche im neuen Systeme dessen Polaraxen an dessen Grundaxen geben, so geben diese Gleichungen, wenn man sie successive auf die Richtungen A Y, A Y′, A Y″ am ursprünglichen und

auf die Richtungen AX, AX', AX'' am neu hinzugekommenen vereinigten Systeme aufgefasst in Anwendung bringt, die folgenden:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}\,A = \mathfrak{A}\,C + \mathfrak{A}'\,C' + \mathfrak{A}''\,C'' &&\text{und}\quad \mathfrak{D}\,B = \mathfrak{B}\,D + \mathfrak{B}'\,D' + \mathfrak{B}''\,D'',\\
&\mathfrak{C}'_1\,A' = \mathfrak{A}_1\,C + \mathfrak{A}'_1\,C' + \mathfrak{A}''_1\,C'' &&\text{und}\quad \mathfrak{D}'_1\,B' = \mathfrak{B}_1\,D + \mathfrak{B}'_1\,D' + \mathfrak{B}''_1\,D'',\\
&\mathfrak{C}''_2\,A'' = \mathfrak{A}_2\,C + \mathfrak{A}'_2\,C' + \mathfrak{A}''_2\,C'' &&\text{und}\quad \mathfrak{D}''_2\,B'' = \mathfrak{B}_2\,D + \mathfrak{B}'_2\,D' + \mathfrak{B}''_2\,D'';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}\,A_1 = \mathfrak{A}\,C_1 + \mathfrak{A}'\,C'_1 + \mathfrak{A}''\,C''_1 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}\,B_1 = \mathfrak{B}\,D_1 + \mathfrak{B}'\,D'_1 + \mathfrak{B}''\,D''_1,\\
&\mathfrak{C}'_1\,A'_1 = \mathfrak{A}_1\,C_1 + \mathfrak{A}'_1\,C'_1 + \mathfrak{A}''_1\,C''_1 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}'_1\,B'_1 = \mathfrak{B}_1\,D_1 + \mathfrak{B}'_1\,D'_1 + \mathfrak{B}''_1\,D''_1,\\
&\mathfrak{C}''_2\,A''_1 = \mathfrak{A}_2\,C_1 + \mathfrak{A}'_2\,C'_1 + \mathfrak{A}''_2\,C''_1 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}''_2\,B''_1 = \mathfrak{B}_2\,D_1 + \mathfrak{B}'_2\,D'_1 + \mathfrak{B}''_2\,D''_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}\,A_2 = \mathfrak{A}\,C_2 + \mathfrak{A}'\,C'_2 + \mathfrak{A}''\,C''_2 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}\,B_2 = \mathfrak{B}\,D_2 + \mathfrak{B}'\,D'_2 + \mathfrak{B}''\,D''_2,\\
&\mathfrak{C}'_1\,A'_2 = \mathfrak{A}_1\,C_2 + \mathfrak{A}'_1\,C'_2 + \mathfrak{A}''_1\,C''_2 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}'_1\,B'_2 = \mathfrak{B}_1\,D_2 + \mathfrak{B}'_1\,D'_2 + \mathfrak{B}''_1\,D''_2,\\
&\mathfrak{C}''_2\,A''_2 = \mathfrak{A}_2\,C_2 + \mathfrak{A}'_2\,C'_2 + \mathfrak{A}''_2\,C''_2 &&\text{und}\quad \mathfrak{D}''_2\,B''_2 = \mathfrak{B}_2\,D_2 + \mathfrak{B}'_2\,D'_2 + \mathfrak{B}''_2\,D''_2.
\end{aligned}$$

Multiplizirt man nun einerseits die ersten und letzten Seiten der Gleichungen (59. a.) der Reihe nach zuerst mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, sodann mit $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}'_1$, $\mathfrak{B}''_1$ und zuletzt mit $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}'_2$, $\mathfrak{B}''_2$, andererseits die ersten und dritten Seiten der Gleichungen (59. b.) zuerst mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, hierauf mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}''_1$ und zuletzt mit $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ und addirt jedesmal die drei erhaltenen Resultate zu einander, so erhält man Gleichungen, welche mit Zuziehung der so eben angegebenen sogleich übergehen in:

(61. a.) $$\left\{\begin{aligned} b &= B\,a + B_1\,a' + B_2\,a'',\\ b' &= B'\,a + B'_1\,a' + B'_2\,a'',\\ b'' &= B''\,a + B''_1\,a' + B''_2\,a'', \end{aligned}\right.$$

und

(61. b.) $$\left\{\begin{aligned} a &= A\,b + A_1\,b' + A_2\,b'',\\ a' &= A'\,b + A'_1\,b' + A'_2\,b'',\\ a'' &= A''\,b + A''_1\,b' + A''_2\,b'' \end{aligned}\right.$$

und es spiegelt sich abermals in den beiden Gruppen (61. a. und b.) eine vollständige Gegenseitigkeit ab, indem sich die eine unmittelbar aus der andern ableiten lässt.

Bezeichnet man im Sinne der später in Nr. 44. allgemein eingeführten Bezeichnungsweise durch (B), (B'), (B''); (B_1), (B'_1), (B''_1); (B_2), (B'_2), (B''_2) die schiefen Projectionszahlen, welche die zum ursprünglichen Grundsysteme, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, gehörigen Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ an dem neu hinzugekommenen Grundsysteme, dessen Axen AY, AY', AY'' sind, geben, und multiplizirt man die hintern Gleichungen (59. a.) ihrer Ordnung nach erstlich mit (B), (B'), (B''), sodann mit (B_1), (B'_1), (B''_1) und zuletzt mit (B_2), (B'_2), (B''_2), jedesmal die drei Resultate zu einander addirend, so findet man:

$$\begin{aligned}
d(B) + d'(B') + d''(B'') &= a\,[D(B) + D'(B') + D''(B'')] + a'\,[D_1(B) + D'_1(B') + D''_1(B'')]\\
&\quad + a''\,[D_2(B) + D'_2(B') + D''_2(B'')]\\
d(B_1) + d'(B'_1) + d''(B''_1) &= a\,[D(B_1) + D'(B'_1) + D''(B''_1)] + a'\,[D_1(B_1) + D'_1(B'_1) + D''_1(B''_1)]\\
&\quad + a''\,[D_2(B_1) + D'_2(B'_1) + D''_2(B''_1)]\\
d(B_2) + d'(B'_2) + d''(B''_2) &= a\,[D(B_2) + D'(B'_2) + D''(B''_2)] + a'\,[D_1(B_2) + D'_1(B'_2) + D''_1(B''_2)]\\
&\quad + a''\,[D_2(B_2) + D'_2(B'_2) + D''_2(B''_2)].
\end{aligned}$$

Es sind aber die zu a, a', a'' gehörigen Factoren ihrer Ordnung nach, den Gleichungen (9. a. und b.) zufolge, in der ersten dieser Gleichungen die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung $A\mathfrak{X}$ mit den Richtungen AX, AX', AX'' bildet, in der zweiten dieser Gleichungen die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung $A\mathfrak{X}'$ mit den gleichen Richtungen AX, AX',

AX″ bildet, in der dritten dieser Gleichungen die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung A$\mathfrak{X}''$ mit denselben Axen AX, AX′, AX″ einschliesst, und lassen sich daher in jenen auf einander folgenden Gleichungen in Folge der Natur der Polaraxen durch $\mathfrak{C}$, o, o; o, $\mathfrak{C}'_1$, o; o, o, $\mathfrak{C}''_2$ ersetzen, wodurch jene Gleichungen werden

$$\mathfrak{C}\,a=(B)d+(B')d'+(B'')d'',\quad \mathfrak{C}'_1\,a'=(B_1)d+(B'_1)d'+(B''_1)d'',\quad \mathfrak{C}''_2\,a''=(B_2)d+(B'_2)d'+(B''_2)d''. \qquad \textbf{(62. a.)}$$

Eben so erhält man, wenn (A), (A'), (A''); (A_1), (A'_1), (A''_1); (A_2), (A'_2), (A''_2) die schiefen Projectionszahlen bezeichnen, welche die zum neu hinzu gekommenen Grundsysteme, dessen Axen AY, AY′, AY″ sind, gehörigen Polaraxen A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, A$\mathfrak{Y}''$ an dem ursprünglichen Grundsysteme, dessen Axen AX, AX′, AX″ sind, liefern, entweder durch blose Vertauschung der Systeme unmittelbar aus den Gleichungen (62. a.), oder durch Multiplication der hintern Gleichungen (59. b.) ihrer Ordnung nach erstlich mit (A), (A'), (A''), sodann mit (A_1), (A'_1), (A''_1) und zuletzt mit (A_2), (A'_2), (A''_2) und jedesmalige Addition der drei sich ergebenden Resultate nach vollzogener analoger Bestimmung der in den entstandenen Gleichungen zu b, b′, b″ gehörigen Factoren:

$$\mathfrak{D}\,b=(A)c+(A')c'+(A'')c'',\quad \mathfrak{D}'_1\,b'=(A_1)c+(A'_1)c'+(A''_1)c'',\quad \mathfrak{D}''_2\,b''=(A_2)c+(A'_2)c'+(A''_2)c'', \qquad \textbf{(62. b.)}$$

womit der Cyclus aller Correlationen, welche zwischen den Projectionszahlen der Axen eines Grundsystems an den Axen eines andern Grundsystems statt finden, in sich abgeschlossen ist.

Man kann den vorstehenden Gleichungen eine abgeänderte Gestalt geben, wenn man sie mit den Gleichungen (56. a. und b.) in Verbindung bringt. Jene Gleichungen sind nämlich, wenn man zu ihnen noch die fügt, welche die gleichen, aber auf das neue System übergetragenen sind:

$$\left.\begin{array}{l} (c)=\mathfrak{C}\,a,\quad (c')=\mathfrak{C}'_1\,a',\quad (c'')=\mathfrak{C}''_2\,a'' \quad \text{und} \quad c=\mathfrak{C}\,(a),\quad c'=\mathfrak{C}'_1\,(a'),\quad c''=\mathfrak{C}''_2\,(a'') \\ \text{nebst} \\ (d)=\mathfrak{D}\,b,\quad (d')=\mathfrak{D}'_1\,b',\quad (d'')=\mathfrak{D}''_2\,b'' \quad \text{und} \quad d=\mathfrak{D}\,(b),\quad d'=\mathfrak{D}'_1\,(b'),\quad d''=\mathfrak{D}''_2\,(b'') \end{array}\right\}\;.. \qquad \textbf{(63.)}$$

worin $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}''_2$ die Kosinuse der Winkel vorstellen, welche die zusammengehörigen Grund- und Polaraxen im neuen Systeme mit einander machen und (b), (b′), (b″) und (d), (d′), (d″) die schiefen und senkrechten Projectionszahlen an den Polaraxen A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, A$\mathfrak{Y}''$ des neuen Systems von derselben Richtung, die an den Grundaxen AY, AY′, AY″ des neuen Systems die b, b′, b″ und d, d′, d″ liefert.

Mittelst dieser Gleichungen lassen sich nun in allen ihnen in dieser Nummer vorangegangenen an die Stelle von schiefen Projectionszahlen, welche irgend eine Richtung an den Grundaxen giebt, senkrechte setzen, die von derselben Richtung an den zu den Grundaxen gehörigen Polaraxen geliefert werden, und umgekehrt lassen sich senkrechte an den Grundaxen durch schiefe an den Polaraxen ersetzen, wodurch man den frühern Gleichungen allerhand neue Formen zu geben im Stande ist.

35) Behalten wir die Bezeichnungen der vorigen Nummer sämmtlich und unverändert bei, zu denen wir noch fügen die (x), (x′), (x″) und (u), (u′), (u″) oder (y), (y′), (y″) und (v), (v′), (v″), welche die schiefen und senkrechten Coordinaten desjenigen Punctes an den Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ oder A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, A$\mathfrak{Y}''$ vorzustellen haben, der an den Grundaxen die gleich bezeichneten, aber nicht in Klammern eingeschlossenen Coordinaten liefert, so ist den Gleichungen (5) zur Folge nicht nur:

$$a=\frac{x}{r},\quad a'=\frac{x'}{r},\quad a''=\frac{x''}{r} \quad \text{und} \quad c=\frac{u}{r},\quad c'=\frac{u'}{r},\quad c''=\frac{u''}{r}$$

so wie

$$b = \frac{y}{r},\quad b' = \frac{y'}{r},\quad b'' = \frac{y''}{r} \quad\text{und}\quad d = \frac{v}{r},\quad d' = \frac{v'}{r},\quad d'' = \frac{v''}{r}$$

sondern auch:

$$(a) = \frac{(x)}{r},\quad (a') = \frac{(x')}{r},\quad (a'') = \frac{(x'')}{r} \quad\text{und}\quad (c) = \frac{(u)}{r},\quad (c') = \frac{(u')}{r},\quad (c'') = \frac{(u'')}{r}$$

so wie

$$(b) = \frac{(y)}{r},\quad (b') = \frac{(y')}{r},\quad (b'') = \frac{(y'')}{r} \quad\text{und}\quad (d) = \frac{(v)}{r},\quad (d') = \frac{(v')}{r},\quad (d'') = \frac{(v'')}{r}.$$

Durch die hier für die Projectionszahlen gelieferten Werthe verwandeln sich nun die Gleichungen (59. a.) in:

(64. a.)
$$\begin{aligned} v &= C x + C' x' + C'' x'', & v' &= C_1 x + C_1' x' + C_1'' x'', & v'' &= C_2 x + C_2' x' + C_2'' x'' \\ &= D x + D_1 x' + D_2 x'', & &= D' x + D_1' x' + D_2' x'', & &= D'' x + D_1'' x' + D_2'' x'', \end{aligned}$$

die (59. b.) in:

(64. b.)
$$\begin{aligned} u &= D y + D' y' + D'' y'', & u' &= D_1 y + D_1' y' + D_1'' y'', & u'' &= D_2 y + D_2' y' + D_2'' y'' \\ &= C y + C_1 y' + C_2 y'', & &= C' y + C_1' y' + C_2' y'', & &= C'' y + C_1'' y' + C_2'' y''; \end{aligned}$$

ferner gehen die Gleichungen (60. a.) über in:

(65. a.) $$v = A u + A' u' + A'' u'',\quad v' = A_1 u + A_1' u' + A_1'' u'',\quad v'' = A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'',$$

die (60. b.) in:

(65. b.) $$u = B v + B' v' + B'' v'',\quad u' = B_1 v + B_1' v' + B_1'' v'',\quad u'' = B_2 v + B_2' v' + B_2'' v'';$$

die (61. a.) ändern sich um in:

(66. a.) $$y = B x + B_1 x' + B_2 x'',\quad y' = B' x + B_1' x' + B_2' x'',\quad y'' = B'' x + B_1'' x' + B_2'' x'',$$

die (61. b.) in:

(66. b.) $$x = A y + A_1 y' + A_2 y'',\quad x' = A' y + A_1' y' + A_2' y'',\quad x'' = A'' y + A_1'' y' + A_2'' y'';$$

die (62. a.) in:

(67. a.) $$\mathfrak{C} x = (B) v + (B') v' + (B'') v'',\quad \mathfrak{C}_1' x' = (B_1) v + (B_1') v' + (B_1'') v'',\quad \mathfrak{C}_2'' x'' = (B_2) v + (B_2') v' + (B_2'') v'',$$

die (62. b.) in:

(67. b.) $$\mathfrak{D} y = (\mathit{A}) u + (\mathit{A}') u' + (\mathit{A}'') u'',\quad \mathfrak{D}_1' y' = (\mathit{A}_1) u + (\mathit{A}_1') u' + (\mathit{A}_1'') u'',\quad \mathfrak{D}_2'' y'' = (\mathit{A}_2) u + (\mathit{A}_2') u' + (\mathit{A}_2'') u'';$$

endlich nehmen immer durch die gleiche Substitution die Gleichungen (63) die folgende Gestalt an:

(68)
$$\left\{\begin{array}{l} (u) = \mathfrak{C}\, x,\quad (u') = \mathfrak{C}_1'\, x',\quad (u'') = \mathfrak{C}_2''\, x'' \quad\text{und}\quad u = \mathfrak{C}\,(x),\quad u' = \mathfrak{C}_1'\,(x'),\quad u'' = \mathfrak{C}_2''\,(x'') \\ \quad\text{nebst} \\ (v) = \mathfrak{D}\, y,\quad (v') = \mathfrak{D}_1'\, y',\quad (v'') = \mathfrak{D}_2''\, y'' \quad\text{und}\quad v = \mathfrak{D}\,(y),\quad v' = \mathfrak{D}_1'\,(y'),\quad v'' = \mathfrak{D}_2''\,(y''), \end{array}\right.$$

mittelst welcher man den vorigen noch mannigfaltig andere Formen geben kann. Es verdient hier noch besonders hervorgehoben zu werden, wie sämmtliche, in dieser und der vorigen Nummer aufgestellte Gleichungen bei allem Wechsel doch immer gleich einfach bleiben.

36) Bevor wir zu Formen anderer Art übergehen, wollen wir zeigen, wie sich aus den frühern Gleichungen unendlich viele andere ableiten lassen, und auch solche, in denen schon die in Nr. 39. sich ergebenden neuen Formen zum Vorschein kommen, und deren Verhalten zu andern verwandten angezeigt wird. Bezeichnen a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer Richtung und a_1, a_1', a_1'' und c_1, c_1', c_1'' die einer andern Richtung in dem beliebigen Coordinatensysteme, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, so hat man nach Anleitung der Gleichungen (12):

$$\left.\begin{aligned}&c = a + a' \cos W + a'' \cos W',\ c' = a \cos W + a' + a'' \cos W'',\ c'' = a \cos W' + a' \cos W'' + a'',\\ &\text{und}\\ &c_1 = a_1 + a_1' \cos W + a_1'' \cos W',\ c_1' = a_1 \cos W + a_1' + a_1'' \cos W'',\ c_1'' = a_1 \cos W' + a_1' \cos W'' + a_1''.\end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Multiplicirt man die ersten der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (69) mit c_1' und c', die zweiten mit c_1 und c, jedesmal die beiden Resultate von einander abziehend, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}&c c_1' - c_1 c' = a c_1' - a_1 c' + (a' c_1' - a_1' c') \cos W + (a'' c_1' - a_1'' c') \cos W',\\ &\text{und}\\ &c c_1' - c_1 c' = (a_1 c - a c_1) \cos W + a_1' c - a' c_1 + (a_1'' c - a'' c_1) \cos W'';\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \tag{70. a.}$$

multiplicirt man ferner die ersten der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (69) mit c_1'' und c'', die dritten mit c_1 und c, so geht aus der Subtraction der jedesmaligen zwei Resultate hervor:

$$\left.\begin{aligned}&c'' c_1 - c c_1'' = a_1 c'' - a c_1'' + (a_1' c'' - a' c_1'') \cos W + (a_1'' c'' - a'' c_1'') \cos W',\\ &\text{und}\\ &c'' c_1 - c c_1'' = (a c_1 - a_1 c) \cos W' + (a' c_1 - a_1' c) \cos W'' + a'' c_1 - a_1'' c;\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \tag{70. b.}$$

multiplicirt man letztlich die zweiten der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (69) mit c_1'' und c'', die dritten mit c_1' und c', so kommt durch Subtraction der jedesmaligen zwei Resultate:

$$\left.\begin{aligned}&c' c_1'' - c_1' c'' = (a c_1'' - a_1 c'') \cos W + a' c_1'' - a_1' c'' + (a'' c_1'' - a_1'' c'') \cos W'',\\ &\text{und}\\ &c' c_1'' - c_1' c'' = (a_1 c' - a c_1') \cos W' + (a_1' c' - a' c_1') \cos W'' + a_1'' c' - a'' c_1'.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \tag{70. c.}$$

In den letzten drei Paaren von Gleichungen können anstatt der in ihnen vorkommenden Differenzen überall auch Summen geschrieben werden, weil die mit einerlei Vorzeichen nach Wegschaffung der Klammern in ihnen vorhandenen Theile für sich auf beiden Seiten einander gleich sind.

Man kann noch auf einem andern Wege aus denselben Gleichungen neue ableiten. Multiplicirt man nämlich die ersten der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (69) einmal mit a_1 und a, ein andermal mit a_1' und a', ein drittesmal mit a_1'' und a'', und zieht jedesmal die beiden Resultate von einander ab, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}a c_1 - a_1 c &= (a a_1' - a' a_1) \cos W - (a'' a_1 - a a_1'') \cos W',\\ a' c_1 - a_1' c &= -(a a_1' - a_1 a') + (a' a_1'' - a'' a_1') \cos W',\\ a'' c_1 - a_1'' c &= a'' a_1 - a a_1'' - (a' a_1'' - a'' a_1') \cos W;\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{71. a.}$$

multiplicirt man ferner die zweiten auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (69) successive mit denselben Grössen wie so eben die ersten, so giebt die Subtraction der jedesmaligen zwei Resultate von einander:

$$\left.\begin{aligned}a c_1' - a_1 c' &= a a_1' - a' a_1 - (a'' a_1 - a_1'' a) \cos W'',\\ a' c_1' - a_1' c' &= -(a a_1' - a' a_1) \cos W + (a' a_1'' - a'' a_1') \cos W'',\\ a'' c_1' - a_1'' c' &= (a'' a_1 - a a_1'') \cos W - (a' a_1'' - a'' a_1');\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \tag{71. b.}$$

endlich liefert dieselbe Behandlung der dritten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}a c_1'' - a_1 c'' &= (a a_1' - a' a_1) \cos W'' - (a'' a_1 - a a_1''),\\ a' c_1'' - a_1' c'' &= -(a a_1' - a' a_1) \cos W' + (a' a_1'' - a'' a_1'),\\ a'' c_1'' - a_1'' c'' &= (a'' a_1 - a a_1'') \cos W' - (a' a_1'' - a'' a_1') \cos W''.\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{71. c.}$$

Setzt man nun zuvörderst die Werthe von $a c'_1 - a_1 c'$, $a' c'_1 - a'_1 c'$, $a'' c'_1 - a''_1 c'$ aus (71. b.) in die erste der Gleichungen (70. a.) oder die $a_1 c - a c_1$, $a'_1 c - a' c_1$, $a''_1 c - a'' c_1$ aus (71. a.) in die zweite der Gleichungen (70. a.), so findet man in jedem Falle zunächst:

$$c c'_1 - c' c_1 = (a a'_1 - a' a_1) \sin^2 W + (a'' a_1 - a a''_1)(\cos W \cos W' - \cos W'') \\ + (a' a''_1 - a'' a'_1)(\cos W \cos W'' - \cos W').$$

Ebenso erhält man aus den Gleichungen (70. b.), wenn man sie mittelst der (71. c.) oder (71. a.) umändert:

$$c'' c_1 - c c''_1 = (a a'_1 - a' a_1)(\cos W \cos W' - \cos W'') + (a'' a_1 - a a''_1) \sin^2 W' \\ + (a' a''_1 - a'' a'_1)(\cos W' \cos W'' - \cos W)$$

und aus den Gleichungen (70. c.), wenn man sie mit Hilfe derer (71. c.) oder (71. b.) umändert:

$$c' c''_1 - c'' c'_1 = (a a'_1 - a' a_1)(\cos W \cos W'' - \cos W') + (a'' a_1 - a a''_1)(\cos W' \cos W'' - \cos W) \\ + (a' a''_1 - a'' a'_1) \sin^2 W'';$$

diese letzten drei Gleichungen gehen aber mit Zuziehung derer (38) erstlich über in:

(72. a.)
$$\begin{cases} c c'_1 - c' c_1 = \sin W \; [(a a'_1 - a' a_1) \sin W + (a'' a_1 - a a''_1) \sin W' \cos \mathfrak{W}'' \\ \qquad + (a' a''_1 - a'' a'_1) \sin W'' \cos \mathfrak{W}'], \\ c'' c_1 - c c''_1 = \sin W' \; [(a a'_1 - a' a_1) \sin W \cos \mathfrak{W}'' + (a'' a_1 - a a''_1) \sin W' \\ \qquad + (a' a''_1 - a'' a'_1) \sin W'' \cos \mathfrak{W}], \\ c' c''_1 - c'' c'_1 = \sin W'' \; [(a a'_1 - a' a_1) \sin W \cos \mathfrak{W}' + (a'' a_1 - a a''_1) \sin W' \cos \mathfrak{W} \\ \qquad + (a' a''_1 - a'' a'_1) \sin W''], \end{cases}$$

sodann kann man ihnen noch mit Zuziehung derer (45. a.) und (41) die nachfolgende Gestalt geben:

(72. b.)
$$\begin{cases} (c c'_1 - c' c_1) \mathfrak{C}''_2 = h^2 [(a a'_1 - a' a_1) \mathfrak{A}''_2 + (a'' a_1 - a a''_1) \mathfrak{A}'_2 + (a' a''_1 - a'' a'_1) \mathfrak{A}_2], \\ (c'' c_1 - c c''_1) \mathfrak{C}'_1 = h^2 [(a a'_1 - a' a_1) \mathfrak{A}''_1 + (a'' a_1 - a a''_1) \mathfrak{A}'_1 + (a' a''_1 - a'' a'_1) \mathfrak{A}_1], \\ (c' c''_1 - c'' c'_1) \mathfrak{C} = h^2 [(a a'_1 - a' a_1) \mathfrak{A}'' + (a'' a_1 - a a''_1) \mathfrak{A}' + (a' a''_1 - a'' a'_1) \mathfrak{A}]. \end{cases}$$

37) Wendet man die Gleichungen (47. a.) auf die beiden Richtungen der vorigen Nummer an, so geben sie:

(73)
$$\begin{cases} \mathfrak{C} a = \mathfrak{A} c + \mathfrak{A}' c' + \mathfrak{A}'' c'', \quad \mathfrak{C}'_1 a' = \mathfrak{A}_1 c + \mathfrak{A}'_1 c' + \mathfrak{A}''_1 c'', \quad \mathfrak{C}''_2 a'' = \mathfrak{A}_2 c + \mathfrak{A}'_2 c' + \mathfrak{A}''_2 c'' \\ \text{und} \\ \mathfrak{C} a_1 = \mathfrak{A} c_1 + \mathfrak{A}' c'_1 + \mathfrak{A}'' c''_1, \quad \mathfrak{C}'_1 a'_1 = \mathfrak{A}_1 c_1 + \mathfrak{A}'_1 c'_1 + \mathfrak{A}''_1 c''_1, \quad \mathfrak{C}''_2 a''_1 = \mathfrak{A}_2 c_1 + \mathfrak{A}'_2 c'_1 + \mathfrak{A}''_2 c''_1. \end{cases}$$

Durch Multiplication der ersten auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (73) mit a'_1 und a' oder der zweiten mit a_1 und a und jedesmalige Subtraction der zwei so sich ergebenden Resultate findet man:

(74. a.)
$$\begin{cases} \mathfrak{C} (a a'_1 - a' a_1) = \mathfrak{A} (c a'_1 - a' c_1) + \mathfrak{A}' (c' a'_1 - a' c'_1) + \mathfrak{A}'' (c'' a'_1 - a' c''_1) \\ \text{oder} \\ \mathfrak{C}'_1 (a a'_1 - a' a_1) = \mathfrak{A}_1 (a c_1 - a_1 c) + \mathfrak{A}'_1 (a c'_1 - a_1 c') + \mathfrak{A}''_1 (a c''_1 - a_1 c''); \end{cases}$$

ferner ergiebt sich aus denselben Gleichungen durch Multiplication mit a''_1 und a'', oder der dritten mit a_1 und a und darauf folgende Subtraction der jedesmaligen zwei Resultate

(74. b.)
$$\begin{cases} \mathfrak{C} (a'' a_1 - a a''_1) = \mathfrak{A} (a'' c_1 - a''_1 c) + \mathfrak{A}' (a'' c'_1 - a''_1 c') + \mathfrak{A}'' (a'' c''_1 - a''_1 c'') \\ \text{oder} \\ \mathfrak{C}''_2 (a'' a_1 - a a''_1) = \mathfrak{A}_2 (a_1 c - a c_1) + \mathfrak{A}'_2 (a_1 c' - a c'_1) + \mathfrak{A}''_2 (a_1 c'' - a c''_1); \end{cases}$$

zuletzt erhält man durch Multiplication der zweiten mit a''_1 und a'' oder der dritten mit a'_1 und a' und darauf folgende Subtraction der zwei sich ergebenden Resultate:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}'_1(a'a''_1 - a''a'_1) &= \mathfrak{A}_1(a''_1 c - a''c_1) + \mathfrak{A}'_1(a''_1 c' - a''c'_1) + \mathfrak{A}''_1(a''_1 c'' - a''c''_1) \\ &\text{oder} \\ \mathfrak{C}''_2(a'a''_1 - a''a'_1) &= \mathfrak{A}_2(a'c_1 - a'_1 c) + \mathfrak{A}'_2(a'c'_1 - a'_1 c') + \mathfrak{A}''_2(a'c''_1 - a'_1 c''), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(74. c.)}$$

wo in den drei letzten Paaren auch überall Summen stehen können anstatt der Differenzen aus dem bei den analogen Gleichungen (70) angeführten Grunde.

Man kann aus den Gleichungen (73) noch auf eine zweite Art andere ableiten. Multiplicirt man nämlich ihre ersten Gleichungen einmal mit c_1 und c, ein andermal mit c'_1 und c', ein drittesmal mit c''_1 und c'' und zieht jedesmal die beiden Resultate von einander ab, so kommt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}(a c_1 - a_1 c) &= \mathfrak{A}'(c'c_1 - c'_1 c) + \mathfrak{A}''(c''c_1 - c''_1 c), \\ \mathfrak{C}(a c'_1 - a_1 c') &= \mathfrak{A}(c c'_1 - c' c_1) + \mathfrak{A}''(c''c'_1 - c''_1 c'), \\ \mathfrak{C}(a c''_1 - a_1 c'') &= \mathfrak{A}(c c''_1 - c_1 c'') + \mathfrak{A}'(c' c''_1 - c'' c'_1); \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(75. a.)}$$

ferner liefert dieselbe Behandlung der zweiten jener Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}'_1(a'c_1 - a'_1 c) &= \mathfrak{A}'_1(c'c_1 - c'_1 c) + \mathfrak{A}''_1(c''c_1 - c''_1 c) \\ \mathfrak{C}'_1(a'c'_1 - a'_1 c') &= \mathfrak{A}_1(c c'_1 - c_1 c') + \mathfrak{A}''_1(c''c'_1 - c''_1 c') \\ \mathfrak{C}'_1(a'c''_1 - a'_1 c'') &= \mathfrak{A}_1(c c''_1 - c_1 c'') + \mathfrak{A}'_1(c' c''_1 - c'_1 c''); \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(75. b.)}$$

endlich liefert die gleiche Behandlung der dritten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{C}''_2(a''c_1 - a''_1 c) &= \mathfrak{A}'_2(c'c_1 - c'_1 c) + \mathfrak{A}''_2(c''c_1 - c''_1 c), \\ \mathfrak{C}''_2(a''c'_1 - a''_1 c') &= \mathfrak{A}_2(c c'_1 - c_1 c') + \mathfrak{A}''_2(c''c'_1 - c''_1 c'), \\ \mathfrak{C}''_2(a''c''_1 - a''_1 c'') &= \mathfrak{A}_2(c c''_1 - c_1 c'') + \mathfrak{A}'_2(c' c''_1 - c'_1 c''). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(75. c.)}$$

Setzt man nun in die erste der Gleichungen (74. a.) für $c a'_1 - a'c_1$, $c'a'_1 - a'c'_1$, $c''a'_1 - a'c''_1$ ihre Werthe aus den Gleichungen (75. b.), oder für $a c_1 - a_1 c$, $a c'_1 - a_1 c'$, $a c''_1 - a_1 c''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (75. a.), so erhält man in beiden Fällen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}(a a'_1 - a'a_1) = (\mathfrak{A}\mathfrak{A}'_1 - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1)(c c'_1 - c'c_1) + (\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}''_1)(c''c_1 - c c''_1) \\ + (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''_1 - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}'_1)(c'c''_1 - c''c'_1) \end{aligned}$$

Eben so findet man, wenn man in die erste der Gleichungen (74. b.) für $a''c_1 - a''_1 c$, $a''c'_1 - a''_1 c'$, $a''c''_1 - a''_1 c''$ ihre Werthe aus denen (75. c.), oder in die zweite Gleichung (74. b.) für $a_1 c - a c_1$, $a_1 c' - a c'_1$, $a_1 c'' - a c''_1$ ihre Werthe aus (75. a.) setzt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}''_2 \mathfrak{C}(a''a_1 - a a''_1) = (\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}\mathfrak{A}'_2)(c c'_1 - c'c_1) + (\mathfrak{A}\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2)(c''c_1 - c c''_1) \\ + (\mathfrak{A}''\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'\mathfrak{A}''_2)(c'c''_1 - c''c'_1) \end{aligned}$$

und setzt man in die erste der Gleichungen (74. c.) für $a''_1 c - a''c_1$, $a''_1 c' - a''c'_1$, $a''_1 c'' - a''c''_1$ ihre Werthe aus denen (75. c.), oder in die zweite Gleichung (74. b.) für $a'c_1 - a'_1 c$, $a'c'_1 - a'_1 c'$, $a'a''_1 - c'_1 c''$ ihre Werthe aus denen (75. b.), so kommt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}'_1 \mathfrak{C}''_2(a'a''_1 - a''a'_1) = (\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_2 - \mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}_2)(c c'_1 - c'c_1) + (\mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}''_2)(c''c_1 - c c''_1) \\ + (\mathfrak{A}'_1\mathfrak{A}''_2 - \mathfrak{A}''_1\mathfrak{A}'_2)(c'c''_1 - c''c'_1), \end{aligned}$$

die drei letzten Gleichungen aber gehen, wenn man an die Stelle der in ihnen vorkommenden, aus den schiefen Projectionszahlen der Polaraxen an den Grundaxen gebildeten, Ausdrücke ihre Werthe nach Anleitung der Gleichungen (45. c.) einsetzt und auf die Gleichung (41) und (42) Rücksicht nimmt, über in:

$$\left.\begin{aligned} (a a'_1 - a' a_1) h^2 &= (c c'_1 - c'c_1) + (c''c_1 - c c''_1)\cos W'' + (c'c''_1 - c''c'_1)\cos W', \\ (a''a_1 - a a''_1) h^2 &= (c c'_1 - c'c_1)\cos W'' + (c''c_1 - c c''_1) + (c'c''_1 - c''c'_1)\cos W, \\ (a' a''_1 - a''a'_1) h^2 &= (c c'_1 - c'c_1)\cos W' + (c''c_1 - c c''_1)\cos W + (c'c''_1 - c''c'_1), \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(76)}$$

38) Aus den Gleichungen der beiden vorigen Nummern lassen sich, sowohl durch Verknüpfung derselben unter einander, als dadurch, dass man für die Projectionszahlen einer oder mehrerer Richtungen nach Anleitung der Nr. 14. Coordinaten in sie einführt, unzählig viele neue ableiten, bei denen wir aber nicht verweilen werden, indem wir bei deren Aufstellung eigentlich keine andere Absicht hatten, als auf den ausserordentlichen Reichthum an Formeln aufmerksam zu machen, der im schiefwinkligen Coordinatensysteme liegt. Dagegen wollen wir aus ihnen eine Relation herholen, die sich auf drei von einander verschiedene Richtungen bezieht, und von besonderem Interesse ist. Zu diesem Ende seien a_2, a'_2, a''_2 und c_2, c'_2, c''_2 die schiefen und senkrechten Projectionszahlen irgend einer dritten, von den vorigen beiden verschiedenen Richtung, so gelten für sie die Gleichuugen:

(77) $$\begin{cases} c_2 = a_2 + a'_2 \cos W + a''_2 \cos W', \quad c'_2 = a_2 \cos W + a'_2 + a''_2 \cos W'', \quad c''_2 = a_2 \cos W' + a'_2 \cos W'' + a''_2 \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}\, a_2 = \mathfrak{A}\, c_2 + \mathfrak{A}' c'_2 + \mathfrak{A}'' c''_2, \quad \mathfrak{E}'_1 a'_2 = \mathfrak{A}_1 c_2 + \mathfrak{A}'_1 c'_2 + \mathfrak{A}''_1 c''_2, \quad \mathfrak{E}''_2 a''_2 = \mathfrak{A}_2 c_2 + \mathfrak{A}'_2 c'_2 + \mathfrak{A}''_2 c''_2 \end{cases}$$

wie für die vorigen beiden Richtungen die Gleichungen (69) und (73). Multiplicirt man nun die Gleichungen (76) ihrer Ordnung nach mit a''_2, a'_2, a_2 und addirt die drei Productengleichungen zu einander, so erhält man mit Rücksichtsnahme auf die Gleichungen (77):

(78. a.) $$h^2 (a a'_1 a''_2 - a a''_1 a'_2 - a' a_1 a''_2 + a' a''_1 a_2 + a'' a_1 a'_2 - a'' a'_1 a_2) = \\ c c'_1 c''_2 - c c''_1 c'_2 - c' c_1 c''_2 + c' c''_1 c_2 + c'' c_1 c'_2 - c'' c'_1 c_2;$$

dieselbe Gleichung lässt sich aber auch aus den Gleichungen (72. b.) oder (72. a.) herholen. Die zwei auf beiden Seiten der Gleichung (78. a.) erscheinenden, aus den schiefen und senkrechten Projectionszahlen der drei Richtungen gebildeten Ausdrücke sind von völlig gleichem Baue und unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass in dem einen der Buchstabe a mit denselben Abzeichen versehen auftritt, wo in dem andern der Buchstabe c vorkommt. In jedem Gliede dieser Ausdrücke kommt derselbe Buchstabe dreimal als Factor vor, von denen der erste keinen Index hat, der zweite den Index 1, der dritte den 2 an sich trägt, und die einzelnen Glieder unterscheiden sich blos dadurch von einander, dass die Verbindung der Zahlen, welche die Anzahl der jedem ihrer drei Factoren beigegebenen Accente aussprechen, in jedem Gliede zwar immer aus den Elementen 0, 1, 2 besteht, in den auf einander folgenden Gliedern aber die wohlgeordneten Complexionen der von 0, 1, 2 ausgehenden, aus diesen drei Elementen gebildeten Permutationsklasse hergeben, während die Vorzeichen, welche bei dem ersten und zweiten Gliede + und — sind, in je zwei folgenden Gliedern immer die umgekehrten der beiden vorangegangenen sind. Bezeichnen wir jene nach dem hier angegebenen Gesetze aus den Projectionszahlen dreier Richtungen von derselben Art gebildeten Ausdrücke durch $\overset{3}{[a]}$, wenn er die schiefen Projectionszahlen in sich aufnimmt, und durch $\overset{3}{[c]}$, wenn er die senkrechten Projectionszahlen in sich aufnimmt, so kann man die Gleichung (78. a.) einfach so schreiben:

(78. b.) $$h^2 \overset{3}{[a]} = \overset{3}{[c]}.$$

39) Sind AX, AX', AX'' die Grundaxen eines ursprünglich vorhandenen Coordinatensystems, und AY, AY', AY'' die von einem zu dem vorigen neu hinzugekommenen, und behalten wir in Bezug auf diese beiden Systeme hier wieder alle die Bezeichnungen bei, welche in Nr. 23. und Nr. 24. eingeführt worden sind, so finden zwischen den schiefen Projectionszahlen, welche die Axenrichtungen des neuen Systems an den Axen des alten geben, und die

dort den Buchstaben A zum Grundzeichen erhalten haben, und zwischen denen, welche die Axenrichtungen des alten Systems an den Axen des neuen geben, und die dort den Buchstaben B zum Grundzeichen erhalten haben, Relationen statt, welche wir jetzt aufstellen werden.

Denken wir uns irgend einen Punct O im Raume und bezeichnen wir die schiefen und senkrechten Projectionszahlen derjenigen Richtung A O, welche von der, beiden Systemen gemeinschaftlichen Coordinatenspitze A nach dem Puncte O hinzielt, durch a, a′, a″ und c, c′, c″, wenn es die an den Axen A X, A X′, A X″ gebildeten sind, und durch b, b′, b″ und d, d′, d″, wenn es die an den Axen A Y, A Y′, A Y″ gebildeten sind, so liefert diese Richtung, einmal auf das erstere und ein andermal auf das letztere System bezogen, nach Anleitung der Gleichungen (61. a.) und (61. b.) die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} b &= B\,a + B_1 a' + B_2 a'' \\ b' &= B' a + B'_1 a' + B'_2 a'' \\ b'' &= B'' a + B''_1 a' + B''_2 a'' \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} a &= A\,b + A_1 b' + A_2 b'', \\ a' &= A' b + A'_1 b' + A'_2 b'', \\ a'' &= A'' b + A''_1 b' + A''_2 b''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Lässt man nun den Punct O bei diesen auf der linken Seite stehenden Gleichungen successive in die Axen A Y, A Y′, A Y″ fallen, wobei b, b′, b″ successive die Werthe 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 und a, a′, a″ in den drei auf einander folgenden Fällen die Werthe A, A′, A″; A_1, A'_1, A''_1; A_2, A'_2, A''_2 annehmen; und lässt man eben so den Punct O bei diesen auf der rechten Seite stehenden Gleichungen successive in die Axen A X, A X′, A X″ fallen, wobei a, a′, a″ successive die Werthe 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1 und b, b′, b″ in den drei auf einander folgenden Fällen die Werthe B, B′, B″; B_1, B'_1, B''_1; B_2, B'_2, B''_2 annehmen, so gehen dadurch die Gleichungen (79) in folgende drei Gruppen von analogen besondern Gleichungen über:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= B\,A + B_1 A' + B_2 A'' \\ 0 &= B' A + B'_1 A' + B'_2 A'' \\ 0 &= B'' A + B''_1 A' + B''_2 A'' \\[4pt] 0 &= B\,A_1 + B_1 A'_1 + B_2 A''_1 \\ 1 &= B' A_1 + B'_1 A'_1 + B'_2 A''_1 \\ 0 &= B'' A_1 + B''_1 A'_1 + B''_2 A''_1 \\[4pt] 0 &= B\,A_2 + B_1 A'_2 + B_2 A''_2 \\ 0 &= B' A_2 + B'_1 A'_2 + B'_2 A''_2 \\ 1 &= B'' A_2 + B''_1 A'_2 + B''_2 A''_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\begin{aligned} 1 &= A\,B + A_1 B' + A_2 B'', \\ 0 &= A' B + A'_1 B' + A'_2 B'', \\ 0 &= A'' B + A''_1 B' + A''_2 B''; \\[4pt] 0 &= A\,B_1 + A_1 B'_1 + A_2 B''_1, \\ 1 &= A' B_1 + A'_1 B'_1 + A'_2 B''_1, \\ 0 &= A'' B_1 + A''_1 B'_1 + A''_2 B''_1; \\[4pt] 0 &= A\,B_2 + A_1 B'_2 + A_2 B''_2, \\ 0 &= A' B_2 + A'_1 B'_2 + A'_2 B''_2, \\ 1 &= A'' B_2 + A''_1 B'_2 + A''_2 B''_2; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

von denen aber die auf der linken und rechten Seite stehenden sich immer auf eine andere Richtung A O beziehen. Sowohl die auf der linken Seite stehende Reihe von Gleichungen, als die auf der rechten Seite stehende deckt die Relationen auf, welche zwischen den Projectionszahlen, deren Grundzeichen der Buchstabe A ist, und denen, deren Grundzeichen der Buchstabe B ist, statt finden, und die eine Reihe geht aus der andern hervor durch wechselseitige Vertauschung dieser beiden Buchstaben mit einander.

Durch Auflösung sowohl der auf der linken Seite stehenden Reihe von Gleichungen, in denen man die Grössen B, B′, B″, B_1, B'_1, B''_1, B_2, B'_2, B''_2 als Unbekannte ansieht, wie der auf der rechten Seite stehenden Reihe von Gleichungen, in welchen man die Grössen A, A′, A″, A_1, A'_1, A''_1, A_2, A'_2, A''_2 wie Unbekannte ansieht, findet man:

(81. a.)
$$\left.\begin{aligned}
B\,[\overset{3}{A}] &= A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2\\
B'\,[\overset{3}{A}] &= -(A' A''_2 - A'' A'_2)\\
B''[\overset{3}{A}] &= A' A''_1 - A'' A'_1\\[6pt]
B_1\,[\overset{3}{A}] &= -(A_1 A''_2 - A''_1 A_2)\\
B'_1\,[\overset{3}{A}] &= A\, A''_2 - A'' A_2\\
B''_1[\overset{3}{A}] &= -(A\, A''_1 - A'' A_1)\\[6pt]
B_2\,[\overset{3}{A}] &= A_1 A'_2 - A'_1 A_2\\
B'_2\,[\overset{3}{A}] &= -(A\, A'_2 - A' A_2)\\
B''_2\,[\overset{3}{A}] &= A\, A'_1 - A' A_1
\end{aligned}\right\}\quad\text{und}\quad\left\{\begin{aligned}
A\,[\overset{3}{B}] &= B'_1 B''_2 - B''_1 B'_2,\\
A'\,[\overset{3}{B}] &= -(B' B''_2 - B'' B'_2),\\
A''[\overset{3}{B}] &= B' B''_1 - B'' B'_1;\\[6pt]
A_1\,[\overset{3}{B}] &= -(B_1 B''_2 - B''_1 B_2),\\
A'_1\,[\overset{3}{B}] &= B\, B''_2 - B'' B_2,\\
A''_1[\overset{3}{B}] &= -(B\, B''_1 - B'' B_1);\\[6pt]
A_2\,[\overset{3}{B}] &= B_1 B'_2 - B'_1 B_2,\\
A'_2\,[\overset{3}{B}] &= -(B\, B'_2 - B' B_2),\\
A''_2[\overset{3}{B}] &= B\, B'_1 - B' B_1;
\end{aligned}\right.$$

wenn zur Abkürzung

(81. b.)
$$\left\{\begin{aligned}
&A\,A'_1 A''_2 - A\,A''_1 A'_2 - A' A_1 A''_2 + A' A''_1 A_2 + A'' A_1 A'_2 - A'' A'_1 A_2 = [\overset{3}{A}]\\
&\text{und}\\
&B\,B'_1 B''_2 - B\,B''_1 B'_2 - B' B_1 B''_2 + B' B''_1 B_2 + B'' B_1 B'_2 - B'' B'_1 B_2 = [\overset{3}{B}]
\end{aligned}\right.$$

gesetzt wird, wo $[\overset{3}{A}]$ und $[\overset{3}{B}]$ aus den Buchstaben A und B nach demselben Gesetze gebildet sind, wie $[\overset{3}{a}]$ in voriger Nummer aus dem Buchstaben a, weswegen die auf der rechten und linken Seite stehenden Gleichungen (81. a.) noch immer durch wechselseitige Vertauschung der Buchstaben A und B aus einander abgeleitet werden können.

40) Eliminirt man aus den ersten beiden der auf der linken Seite stehenden Gleichungen (80) die Grösse A'', so kommt:

$$B'_2 = A\,(B\,B'_2 - B' B_2) + A'\,(B_1 B'_2 - B'_1 B_2),$$

oder wenn man für $B\,B'_2 - B' B_2$ und $B_1 B'_2 - B'_1 B_2$ ihre auf der rechten Seite der Gleichungen (81. a.) gegebenen Werthe setzt:

$$B'_2 = (A' A_2 - A\,A'_2)\,[\overset{3}{B}],$$

welche, verglichen mit der vorletzten auf der linken Seite stehenden Gleichung (81. a.), liefert:

(82) $$[\overset{3}{A}]\,[\overset{3}{B}] = 1.$$

Stellen, der in Nr. 23. und Nr. 24. eingeführten Bezeichnungsweise gemäss, C, C', C''; C_1, C'_1, C''_1; C_2, C'_2, C''_2 die senkrechten Projectionszahlen vor, welche die Axenrichtungen AY, AY', AY'' an den Axen AX, AX', AX'' des ursprünglichen Systems bilden, und stellen eben so D, D', D''; D_1, D'_1, D''_1; D_2, D'_2, D''_2 die senkrechten Projectionszahlen vor, welche die Axenrichtungen AX, AX', AX'' an den Axen AY, AY', AY'' des neu eingeführten Systems liefern; bezeichnen wir noch ausserdem durch

$$[\overset{3}{C}] \text{ und } [\overset{3}{D}]$$

die Ausdrücke, welche aus den Buchstaben C und D nach demselben Gesetze gebildet werden, wie der in Nr. 38. durch $[\overset{3}{c}]$ bezeichnete Ausdruck aus dem Buchstaben c hervorgegangen ist, und durch k den von den Axenwinkeln W_1, W'_1, W''_1 des neu eingeführten Systems gerade so abhängigen Ausdruck, wie der h von den Axenwinkeln W, W', W'' des ursprünglichen Systems,

den Gleichungen (40) oder (42) oder (44) gemäss, abhängig ist, so ist in Folge der für je drei Richtungen an jedem beliebigen Coordinatensysteme gültigen Gleichung (78. b.) in Bezug der drei Richtungen AY, AY′, AY″ an dem ursprünglichen Coordinatensystem:

$$h^2 [\overset{3}{A}] = [\overset{3}{C}], \tag{83. a.}$$

bezüglich der drei Richtungen AX, AX′, AX″ an dem neu eingeführten Coordinatensystem:

$$k^2 [\overset{3}{B}] = [\overset{3}{D}].$$

Setzt man aber in der Gleichung

$$D D'_1 D''_2 - D D''_1 D'_2 - D' D_1 D''_2 + D' D''_1 D_2 + D'' D_1 D'_2 - D'' D'_1 D_2 = [\overset{3}{D}], \tag{83. b.}$$

welche die Definition des Ausdrucks $[\overset{3}{D}]$ ist, an die Stelle der in ihr vorkommenden senkrechten Projectionszahlen ihre durch die Gleichungen (31) gegebenen Werthe ein, so verwandelt sie sich in:

$$C C'_1 C''_2 - C C''_1 C'_2 - C' C_1 C''_2 + C' C''_1 C_2 + C'' C_1 C'_2 - C'' C'_1 C_2 = [\overset{3}{D}],$$

und da nach der Definition des Ausdrucks $[\overset{3}{C}]$

$$C C'_1 C''_2 - C C''_1 C'_2 - C' C_1 C''_2 + C' C''_1 C_2 + C'' C_1 C'_2 - C'' C'_1 C_2 = [\overset{3}{C}]$$

ist, so zeigt sie, dass

$$[\overset{3}{C}] = [\overset{3}{D}] \tag{83. c.}$$

ist.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (83. a.) und (83. b.) mit einander, so findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (82) und (83. c.):

$$h^2 k^2 = [\overset{3}{C}]^2 = [\overset{3}{D}]^2 \tag{84. a.}$$

und die Vergleichung der Gleichungen (83. a.) und (83. b.) mit der Gleichung (83. c.) giebt auf der Stelle:

$$h^2 [\overset{3}{A}] = k^2 [\overset{3}{B}], \tag{84. b.}$$

und diese Gleichung in Verbindung mit der (82) liefert:

$$[\overset{3}{A}]^2 = \frac{k^2}{h^2} \quad \text{und} \quad [\overset{3}{B}]^2 = \frac{h^2}{k^2}, \tag{84. c.}$$

so dass jetzt die sämmtlichen Grössen $[\overset{3}{A}]^2$, $[\overset{3}{B}]^2$, $[\overset{3}{C}]^2$, $[\overset{3}{D}]^2$ durch die beiden h^2 und k^2 dargestellt sind.

Da durch diese letztern Gleichungen immer nur die Quadrate von $[\overset{3}{A}]$, $[\overset{3}{C}]$, $[\overset{3}{B}]$, $[\overset{3}{D}]$ gegeben werden, so bleibt das Vorzeichen dieser Grössen noch unbestimmt; es geht jedoch schon jetzt aus den Gleichungen (83. a. bis c.) hervor, dass diese vier Grössen entweder sämmtlich positive oder sämmtlich negative Werthe haben müssen; bald aber werden wir die Regel aufstellen, wodurch sich entscheiden lässt, in welchen Fällen die positiven und in welchen Fällen die negativen Werthe zu nehmen sind. Uebrigens bemerken wir noch, dass da je drei Richtungen, die von einem Punct auslaufen und nicht in einer und derselben Ebene liegen, als die Grundaxen eines neuen Coordinatensystems angesehen werden können, auch auf sie die Gleichungen (84. a. bis c.) in Anwendung gebracht werden können.

41) Nachdem wir die Gleichungen kennen gelernt haben, wodurch die schiefen Projectionszahlen zwischen den Axenrichtungen zweier unter sich verbundener Grundsysteme von einander abhängig gemacht werden, welche in ihrer Art das sind, was die Gleichungen (31) in Bezug

auf senkrechte Projectionszahlen, bleibt uns zur Erschöpfung dieses Gegenstandes nichts mehr zu thun übrig, als die Kennzeichen aufzusuchen, in welchen Fällen man für die durch die Gleichungen (84. a.) und (84. c.) gegebenen Grössen $[\overset{3}{A}]$, $[\overset{3}{B}]$, $[\overset{3}{C}]$, $[\overset{3}{D}]$ ihre in jenen Gleichungen enthaltenen positiven oder negativen Werthe zu nehmen habe. Da in Nr. 40. schon gezeigt worden ist, dass diese vier Grössen unter sich entweder gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sind, so sieht man ein, dass die ganze hier vorliegende Untersuchung auf die einer einzigen von jenen vier Grössen sich beschränken lässt.

Wir wollen hierzu die $[\overset{3}{A}]$ nehmen und für unsern Zweck diese Grösse aus den vordern Gleichungen (81. a.) herholen, von welchen die erste giebt:

$$[\overset{3}{A}] = \frac{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2}{B}.$$

Denkt man sich an die Stelle des aus den Axen AY, AY', AY'' gebildeten Systems ein anderes gesetzt, dessen Axen AX, AY', AY'' sind, so liefern die beiden letzten Axen AY', AY'' dieses substituirten neuen Systems an dem ursprünglichen dieselben Projectionszahlen, wie die zwei letzten Axen des vorigen neuen Systems, an dessen Stelle es gesetzt worden ist, da sie von denselben zwei Richtungen an dem gleichen Systeme gebildet werden; es haben also diese beiden Systeme die auf das ursprüngliche System sich beziehenden Grössen A_1, A'_1, A''_1 und A_2, A'_2, A''_2 mit einander gemein, weswegen die Zähler in der vorstehenden Gleichung dieselben bleiben, man mag durch sie den Werth von $[\overset{3}{A}]$ für das aus den Axen AY, AY', AY'' oder für das aus den Axen AX, AY', AY'' gebildete neue System in Bezug auf das ursprüngliche bestimmen. Weil aber in den beiderlei Fällen B eine andere Bedeutung hat, so muss das substituirte System einen andern Werth für $[\overset{3}{A}]$ liefern, als der ist, den das aus den Axen AY, AY', AY'' gebildete System liefert, welchen neuen Werth wir zum Unterschied vom vorigen durch $[\overset{3}{A}]^*$ bezeichnen wollen und es ist:

$$[\overset{3}{A}]^* = A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2,$$

weil der Werth von B an dem aus den Axen AX, AY' AY'' gebildeten neuen Systeme 1 ist, da die dritte Axe des substituirten Systems in der AX selber liegt. Hieraus folgt, dass die Grössen $[\overset{3}{A}]$ und $[\overset{3}{A}]^*$ Zahlen mit demselben oder mit entgegengesetzten Vorzeichen in sich tragen, je nachdem B eine positive oder negative Zahl ist. Es wird aber B positiv oder negativ, je nachdem AX auf der positiven oder negativen Seite von der Coordinatenebene Y'AY'' liegt, d. h. je nachdem AX und AY auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von Y'AY'' liegen; also enthalten die zwei Grössen $[\overset{3}{A}]$ und $[\overset{3}{A}]^*$ Zahlen mit einerlei oder mit entgegengesetzten Vorzeichen in sich, je nachdem AX und AY auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von Y'AY'' liegen.

Wäre man bei der vorstehenden Betrachtung, anstatt von der ersten vordern Gleichung (81. a.) auszugehen, von der fünften oder von der neunten ausgegangen und hätte man anstatt des substituirten, aus den Axen AX, AY', AY'' gebildeten neuen Systems das aus den Axen AY', AX', AY'' oder das aus den Axen AY, AY', AX'' gebildete genommen, so hätte man völlig auf die gleiche Weise gefunden, dass die Grösse $[\overset{3}{A}]$, wenn sie einmal für das aus AY, AY', AY'' und ein andermal für das aus AY, AX', AY'' zusammengesetzte System

in seiner Verknüpfung mit dem ursprünglichen Systeme aufgesucht wird, in beiden Fällen einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, je nachdem die Axen A X′ und A Y′ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene Y A Y″ liegen, und eben so, dass die Grösse $[\overset{3}{A}]$, wenn sie einmal für das aus A Y, A Y′, A Y″, ein andermal für das aus A Y, A Y′, A X″ zusammengesetzte, auf das ursprüngliche System bezogen, aufgesucht wird, in beiden Fällen einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, je nachdem die Axen A X″ und A Y″ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene Y A Y′ liegen. Diese drei Fälle enthalten den folgenden einen Satz in sich: Der in $[\overset{3}{A}]$ enthaltene absolute Werth trägt, wenn diese Grösse einmal für ein beliebiges System Y auf ein anderes beliebiges X bezogen und ein andermal für dasjenige auf dieses letztere X bezogene System Z, welches zwei Axen von dem Y und eine von diesem X in sich aufnimmt, aufgesucht wird, in beiden Fällen dasselbe oder das entgegengesetzte Vorzeichen an sich, je nachdem die zwei Axen, deren eine das System Z von dem X in sich aufgenommen, und deren andere es von dem Y zurückgelassen hat, auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von der Ebene liegen, welche durch die beiden Axen hindurch geht, welche das System Z von dem Y in sich aufgenommen hat. Dieser eine allgemeine Satz aber trägt an zwei mit einander verbundenen beliebigen Systemen folgende drei specielle Modificationen in sich.

Die aus den Axen A Y, A Y′, A Y″ und aus denen A X, A Y′, A Y″ gebildeten Systeme liefern an dem aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildeten für $[\overset{3}{A}]$ im Allgemeinen zweierlei Grössen, deren absolute Werthe einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen an sich tragen, je nachdem A X und A Y auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von Y′ A Y″ liegen, welcher Satz der zuerst so eben aufgefundene war.

Die aus den Axen A X, A Y′, A Y″ und aus denen A X, A X′, A Y″ gebildeten Systeme geben an dem aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildeten für $[\overset{3}{A}]$ zweierlei Grössen, deren absolute Werthe entweder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen an sich tragen, je nachdem A X′ und A Y′ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von X A Y″ liegen, welcher Satz eine blose Wiederholung des ersten in einer andern Form ist.

Die aus den Axen A X, A X′, A Y″ und aus denen A X, A X′, A X″ gebildeten Systeme geben an dem aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildeten für $[\overset{3}{A}]$ zweierlei Grössen, deren absolute Werthe entweder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen an sich tragen, je nachdem A X″ und A Y″ auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von X A X′ liegen, welcher Satz wieder nur eine Wiederholung des ersten oder zweiten in einer andern Form ist.

Nun sind aber bei jedem Systeme, das, als neues gedacht, auf sich selber als ursprüngliches gedachtes bezogen wird, diejenigen schiefen Projectionszahlen, welche den Buchstaben A zum Grundzeichen haben, sämmtlich null bis auf die drei A, A'_1, A''_2, von denen jede $+1$ wird; darum wird die Grösse $[\overset{3}{A}]$ bei dem auf sich selber bezogenen Systeme $+1$, und in Folge dessen lassen sich die so eben ausgesprochenen drei besondern Sätze in umgekehrter Ordnung genommen durch Aneinanderknüpfung auch so geben:

a) Die Grösse $[\overset{3}{A}]$, welche das System A X, A X′, A Y″ an dem A X, A X′, A X″ giebt, ist positiv oder negativ, je nachdem A X″ und A Y″ auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite von X A X′ liegen.

b) Die Grösse $[\overset{3}{A}]$, welche das System A X, A Y′, A Y″ an dem A X, A X′, A X″ giebt, ist positiv, wenn A X″ und A Y″ in Vergleich zu X A X′ und A X′ und A Y′ in Vergleich zu X A Y″ beide Paare entweder gleichzeitig auf einerlei oder gleichzeitig auf entgegengesetzter Seite von der bei jedem dieser Paare genannten Ebene liegen; hingegen ist jene Grösse negativ, wenn das eine von diesen beiden Richtungspaaren auf einerlei, das andere auf entgegengesetzter Seite der bei ihnen genannten Ebene liegt.

c) Die Grösse $[\overset{3}{A}]$, welche das aus den Axen A Y, A Y′, A Y″ gebildete System an dem aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildeten liefert, ist positiv, wenn die Stellung der Richtungspaare A X″ und A Y″, A X′ und A Y′, A X und A Y gegen die Ebenen X A X′, X A Y″, Y′ A Y″ so ist, dass alle drei Paare entweder auf einerlei Seite, oder dass eines von ihnen auf einerlei, die zweiten andern aber auf entgegengesetzter Seite der ihnen zugegebenen Ebene liegen; hingegen ist jene Grösse negativ, wenn die drei genannten Richtungspaare sämmtlich auf entgegengesetzter Seite ihrer Ebene liegen, oder wenn zwei davon auf einerlei, das dritte aber auf entgegengesetzter Seite der ihnen zugegebenen Ebene liegt.

Die hier für das Positivsein oder für das Negativsein der Grösse $[\overset{3}{A}]$ aufgefundenen Kennzeichen lassen sich, ohne dass sie aber dadurch selber einfacher würden, noch auf einen andern von dem vorigen sehr verschiedenen Ausdruck dadurch bringen, dass man eine ideelle Beziehung der beiden Systeme auf einander oder auf ein unbestimmtes Drittes zur Hilfe nimmt, wie wir jetzt zeigen werden. Zuvor bemerken wir jedoch, dass man statt der in a) bis c) aufgestellten Kennzeichen auch die nehmen könnte, welche man erhält, wenn man die neuen Axen in anderer Ordnung successive an das ursprüngliche System sich anknüpfen lässt, wobei die Axenpaare A X″ und A Y″, A X′ und A Y′, A X und A Y anstatt auf die Ebenen X A X′, X A Y″, Y′ A Y″ immer auf andere, nämlich: X A X′, Y′ A Y″, X′ A Y″; Y A Y′, X A X″, X″ A Y′; X A Y′, X A X″, Y′ A Y″; Y A Y′, X″ A Y, X′ A X″; X′ A Y, Y A Y″, X′ A X″; und zwar immer auf die gleiche Weise bezogen werden, deren Zusammenhang unter einander leicht unter ein Gesetz zu bringen ist.

42) Sieht man die drei Axen eines gegebenen Coordinatensystems als unter sich fest verbunden an, so dass in ihrer gegenseitigen Stellung so wenig eine Aenderung vorfallen kann, wie wenn sie die Begrenzung eines festen und in sich unveränderlichen, jedoch beweglichen Körpers ausmachten, so lässt sich die Stellung dieses Coordinatensystems an gewisse äussere Bedingungen knüpfen. Stellt nämlich O einen irgend wo im Raume unverrückbar liegenden Punct, und O S eine von diesem Puncte auslaufende unveränderliche Richtung vor; denken wir uns ferner unter R diejenige nach beiden Seiten hin unbegrenzte Gerade, welche mit der Richtung O S zusammen fällt, und unter P eine bestimmte von den unzählig vielen Ebenen, die durch die Gerade R hindurch gehen; bezeichnen wir noch ausserdem durch A die Spitze irgend eines gegebenen Coordinatensystems und durch A L, A M, A N die von A auslaufenden drei Axen desselben Coordinatensystems, welches wir uns in sich fest, sonst aber frei beweglich vorstellen: so kann man immer durch Bewegung des Systems, dessen Spitze A in den Punct O und zugleich dessen eine Axe A L in die Richtung O S so bringen, dass diese beiden Richtungen eine und dieselbe ausmachen, worauf man es noch immer in seiner Gewalt hat, ohne die vorigen Bestimmungen wieder aufzuheben, durch Drehung des Systems um die Gerade R, wobei die Puncte O und A, L und S (wenn S den absoluten Ort des Raumes anzeigt, in welchem L gerade liegt) in einander liegen bleiben, eine der Coordinatenebenen L A M und L A N

mit der Ebene P zusammen fallen zu machen. Nachdem aber auch noch diese letztere Bestimmung geschehen ist, hat das System eine vollkommen bestimmte Stellung im Raume angenommen, und man kann an dasselbe keine neuen Anforderungen mehr machen, es sei denn, dass man sich das Coordinatensystem als ein veränderliches vorstellen, oder die vorigen ihm gegebenen Bestimmungen wieder aufheben wollte. Die Bestimmung, dass z. B. die Coordinatenebene LAM in der Ebene P liegen soll, lässt sich auf zweierlei Arten verwirklichen, wobei diese Coordinatenebene, und mit ihr zugleich auch die Coordinatenaxe AM, das eine Mal auf die eine Seite der Geraden R, das andere Mal auf deren andere Seite zu liegen kommt. Hebt man, nachdem die Coordinatenaxe AM in die Ebene P gebracht worden ist, diese Bestimmung wieder auf, so lässt sich das System um die Gerade R drehen, und führt man diese Drehung stets nach derselben Seite hin aus, so gelangt die Ebene LAM, nachdem sie einen Winkel von zwei Rechten beschrieben hat, aufs neue in die Ebene P, liegt aber jetzt auf der andern Seite von der Geraden R, und mit ihr zugleich auch die Axe AL. In dieser neuen Lage befindet sich die dritte Axe AN nothwendig auf der Seite von der Ebene P, welche der entgegengesetzt ist, auf welcher diese Axe bei der vorigen Lage der Coordinatenebene LAM sich befand. Alle diese Umstände sprechen wir in folgender Weise aus:

Satz 1. Wenn man eine der Axen des Systems in die Richtung OS bringt und eine zweite in die Ebene P, so kann diess letztere auf zwei Arten geschehen, wobei diese zweite Axe einmal auf die eine Seite der Geraden R, und das andere Mal auf deren andere Seite zu liegen kommt, und es liegt die dritte Axe des Systems in den beiden Fällen nach entgegengesetzten Seiten von der Ebene P hin.

Liegt die eine Axe AL des Systems in der Richtung OS und zugleich die andere AM auf einer bestimmten Seite von der Geraden R, so kann man an das System keine weitern Anforderungen mehr machen; hebt man aber die Bestimmung, dass AM in der Ebene P liegen soll, wieder auf, so ertheilt man dem System aufs Neue eine Beweglichkeit von gewissem Umfange. Denkt man sich mit dem bisherigen Coordinatensysteme noch eine vierte Richtung AG fest vereinigt, welche senkrecht auf der Coordinatenebene LAM steht, und deren Punct G dem absoluten Ort H im Raume entspricht, so kann man das Coordinatensystem um die Gerade OH in solcher Weise drehen, dass A und G in den Puncten O und H liegen bleiben; dann bleibt auch die Coordinatenebene LAM während dieser ganzen Drehung in der Ebene P liegen. Durch diese Drehung ist die Möglichkeit gegeben, die Axe AM in die Richtung OS überzuführen, und nachdem dieses geschehen ist, befindet sich nothwendigerweise die Axe AL des Systems in der Ebene P auf der Seite von der Geraden R, welche der entgegengesetzt ist, worauf sich vor der Drehung die Axe AM befand, wobei die dritte Axe AN stets auf der Seite von der Ebene P liegen bleibt, auf welcher sie schon vor der Drehung lag; es fällt daher die dritte Axe AN stets auf dieselbe Seite von der Ebene P, man mag die Axe AL in die Richtung OS und die Axe AM in die Ebene P, oder umgekehrt die Axe AM in die Richtung OS und die Axe AL in die Ebene P bringen, wenn man nur dafür sorgt, dass im erstern Falle die Axe AM und im andern Falle die AL auf entgegengesetzte Seite der Geraden R zu liegen kommen. Diese Eigenschaft lässt sich mit Zuziehung des Satzes 1. auch so aussprechen: Wenn in zweierlei Verknüpfungen des Systems mit der Ebene P von der angezeigten Art bei der ersten die eine Axe des Systems in die Richtung OS und eine andere Axe in die Ebene P, bei der zweiten Verknüpfung hingegen diese letztere Axe in die Richtung OS und die erstere in die Ebene P gebracht wird,

so liegen die dritten Axen des Systems in den beiderlei Verknüpfungen auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene P, je nachdem die in dieser Ebene ausserhalb der Richtung OS liegenden Axen in den beiden Verknüpfungen auf entgegengesetzten oder auf einerlei Seiten von der Geraden R liegen. Wir werden von jetzt an, um nicht immer die zwei Seiten der Geraden R gleichzeitig berücksichtigen zu müssen, voraussetzen, dass die ausserhalb der Richtung OS in die Ebene P zu legende Axe des Systems stets auf eine und dieselbe Seite von der Geraden R gebracht werde, und wir wollen die Ordnung, in welcher von den drei Axen des Systems die eine in die Richtung OS, die andere in die Ebene P, jedoch ausserhalb der Richtung OS, die dritte endlich ausserhalb der Ebene P zu liegen kommt, einfach dadurch andeuten, dass wir die Axen in derselben Ordnung anschreiben und dadurch die der Verknüpfung angehörige Aufeinanderfolge der Axen bezeichnen. So stellen also Verknüpfungen, welche den Axenfolgen AL, AM, AN; AM, AN, AL; AN, AL, AM entsprechen, die vor, bei welchen der Reihe nach die Axen AL, AM, AN in die Richtung OS, die AM, AN, AL ausserhalb dieser Richtung in die Ebene P gebracht worden sind, und dann die AN, AL, AM ausserhalb dieser Ebene liegen; und eben so stellen Verknüpfungen, welche den Axenfolgen AN, AM, AL; AM, AL, AN; AL, AN, AM entsprechen, die vor, bei welchen der Reihe nach die Axen AN, AM, AL in der Richtung OS, die AM, AL, AN ausserhalb dieser Richtung in der Ebene P, und dann die AL, AN, AM ausserhalb dieser Ebene liegen. Mit Hilfe dieser Darstellungsweise und in Verbindung mit der vorhin getroffenen Uebereinkunft, dass wir die in die Ebene P ausserhalb der Richtung OS befindlichen Axen immer nur auf eine und dieselbe Seite von der Geraden R gebracht wissen wollen, lässt sich nun der vorstehende, mit gesperrter Schrift gedruckte Satz auch so geben:

Satz 2) In zwei Verknüpfungen, welche den Axenfolgen AL, AM, AN und AM, AL, AN, oder AM, AN, AL und AN, AM, AL, oder AN, AL, AM und AL, AN, AM entsprechen, liegen die dritten Axen AN oder AL oder AM stets auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene P.

Wenn bei der Verknüpfung des Systems mit der Ebene P eine der Axen AL in die Richtung OS, eine andere AM in die Ebene P ausserhalb der Richtung OS, auf der dazu bestimmten Seite von der Geraden R liegend, gebracht worden ist, und dann die dritte AN ausserhalb der Ebene P liegt, und man hebt die Bestimmung, dass AM in der Ebene P liegen soll, wieder auf, wie schon vorhin geschehen ist, so kann man die dem Systeme dadurch theilweise wiedergegebene Beweglichkeit noch in einer von der vorigen verschiedenen Weise zu einer neuen Verknüpfung des Systems benützen. Denkt man sich nämlich unter S die absolute Stelle des Raumes, die der Punct L einnimmt, so kann man das System um die Gerade OS in solcher Weise drehen, dass die Puncte A und L in denen O und S liegen bleiben und die Coordinatenebene LAN der Ebene P nach der Seite hin zugeführt wird, wobei die Axe AN, nachdem sie in die Ebene P gelangt ist, auf der Seite von der Geraden R liegt, auf welche wir die zweiten Axen der Systeme bei ihrer Verknüpfung zu bringen überein gekommen sind. Während dieser Drehung tritt die Axe AM aus der Ebene P heraus und gelangt, weil sie auf derselben Seite von der Geraden R liegt, nach welcher die Axe AN hingeführt wird, auf die Seite von der Ebene P, welche der entgegengesetzt ist, auf welcher bisher die AN lag, und es verharrt die Axe AM auf dieser entgegengesetzten Seite selbst dann noch, nachdem die Axe AN in die Ebene P auf der verlangten Seite von der Geraden R übergegangen ist, in welcher Lage wir

das System festhalten wollen, um sodann eine veränderte Verknüpfung des Systems mit der Ebene P hergestellt zu haben. Diese neue Verknüpfung gehört der Axenfolge AL, AN, AM an, während die Verknüpfung, aus welcher sie hervorgegangen ist, der Axenfolge AL, AM, AN angehört, und da sich herausgestellt hat, dass die dritten Axen AM und AN in diesen zwei Verknüpfungen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene P liegen, so lässt sich der Schluss ziehen, *dass in zweierlei Verknüpfungen der mehrfach beschriebenen Art, die zu Axenfolgen gehören, an deren erster Stelle eine und dieselbe Axe sich befindet, die an zweiter und dritter Stelle stehenden Axen aber verwechselt worden sind, nothwendigerweise die dritten Axen auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene P liegen.* Aus dieser Eigenschaft geht nun in Verbindung mit dem Satz 2) sogleich der folgende neue hervor:

Satz 3) In den dreierlei Verknüpfungen der angezeigten Art, denen die Axenfolgen AL, AM, AN; AM, AN, AL; AN, AL, AM angehören, sowohl, als in denen, welchen die Axenfolgen AN, AM, AL; AM, AL, AN; AL, AN, AM angehören, liegen die dritten Axen immer auf einer und derselben Seite von der Ebene P, die aber bei den drei letzten die entgegengesetzte Seite von der ist, auf welcher die dritten Axen der drei erstern Verknüpfungen liegen.

Denkt man sich durch die drei Puncte L, M, N, welche in den Axen eines Coordinatensystems ausserhalb seiner Spitze liegen, einen Kreis beschrieben in der Weise, wie die nebenstehende Figur versinnlicht:



so überzeugt man sich bald, dass man zu jeder der drei Axenfolgen AL, BM, AN; AM, AN, AL; AN, AL, AM gelangt, wenn man in einer und derselben, hier durch die Pfeile angezeigten Richtung den Kreis durchläuft, und dabei an jede Axe, auf die man stösst, noch die zwei andern in der Ordnung schreibt, in welcher man später zu ihnen gelangt; und eben so stösst man auf jede der drei andern Axenfolgen AN, AM, AL; AM, AL, AN; AL, AN, AM, wenn man den Kreis in der entgegengesetzten Richtung durchläuft. Bei der bis an diese Nummer von uns stets gebrauchten Bezeichnungsweise der Axen, wo die eine von der andern sich durch die Anzahl der ihrem Buchstaben angehängten Accente unterscheidet, und die drei Axen eines Systems z. B. durch AX, AX', AX'' vorgestellt werden, sind die Axenfolgen, auf die man beim Durchlaufen des Kreises in der einen Richtung stösst:

AX, AX', AX''; AX', AX'', AX; AX'', AX, AX',

und die, auf welche man beim Durchlaufen des Kreises in der andern Richtung stösst:

AX'', AX', AX; AX', AX, AX''; AX, AX'', AX';

die zu jenen gehörige Richtung erhält man aber dadurch, dass man, von der ohne Accent geschriebenen Axe ausgehend, zu den zwei andern so übergeht, wie deren Anzahl der Accente successive steigt; die zu diesen Axenfolgen gehörige Richtung erhält man, indem man, von der mit den meisten Accenten versehenen Axe ausgehend, zu den zwei andern so übergeht, wie deren Anzahl der Accente successive fällt, weshalb wir jene die *steigenden*, diese die *fallenden* Axenfolgen nennen können. Mit Hilfe dieser Benennung lässt sich dann der Satz 3. so geben:

Satz 4) In verschiedenen Verknüpfungen eines Systems mit der Ebene P von der beschriebenen Art liegt die dritte Axe immer auf derselben Seite von der Ebene P, wenn

die zu ihnen gehörigen Axenfolgen entweder lauter steigende oder lauter fallende sind; die steigenden und die fallenden Axenfolgen entsprechenden Verknüpfungen haben aber ihre dritten Axen auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene P liegen.

43) Stellen wir uns jetzt zwei aus den Axen AX, AX′, AX″ und aus denen AY, AY′, AY″ zusammengesetzte Coordinatensysteme vor, und denken wir uns jedes von ihnen in der beschriebenen Weise mit der Ebene P verknüpft, (was mit einer bestimmten Verknüpfungsweise der beiden Systeme unter sich ohne Zuziehung der Ebene P und der in ihr liegenden Richtung OS auf Eins hinausläuft), so liegen dem Satz 4. zur Folge bei jeder steigenden Axenfolge die dritten Axen eines jeden Systems für sich genommen auf der einen Seite von der Ebene P, bei jeder fallenden Axenfolge hingegen auf der andern Seite; fallen daher die dritten Axen bei steigenden Axenfolgen auf dieselbe Seite von der Ebene P, man mag Verknüpfungen mit dem einen oder mit dem andern der beiden Systeme vornehmen, so thun es auch die dritten Axen bei fallenden Axenfolgen in den beiden Systemen, nur dass die Seite die entgegengesetzte von der vorigen ist, und eben so kommen die dritten Axen in beiden Systemen bei steigenden und fallenden Axenfolgen immer nur gleichzeitig auf entgegengesetzte Seiten von der Ebene P zu liegen. Wir sagen nun von zwei Systemen, deren dritte Axen bei allen zu gleichnamigen Axenfolgen gehörigen Verknüpfungen auf dieselbe Seite von der Ebene P fallen, sie besitzen unter sich einen ähnlichen Axenlauf, fallen hingegen die dritten Axen der beiden Systeme bei allen zu gleichnamigen Axenfolgen gehörigen Verknüpfungen auf entgegengesetzte Seiten von der Ebene P, so sagen wir, die beiden Systeme besitzen unter sich einen unähnlichen Axenlauf. Es folgt aber aus diesem Begriffe des ähnlichen oder unähnlichen Axenlaufes in zweierlei Coordinatensystemen mit Beiziehung des Satzes 4. ohne alle Schwierigkeit das nachstehende Verhalten dreier Coordinatensysteme zu einander in Bezug auf deren relativen Axenlauf:

Satz 5) Zwei Coordinatensysteme haben, verglichen mit einander, einen ähnlichen Axenlauf, wenn ein drittes System, verglichen mit jedem der zwei ersten, beide Male einen ähnlichen oder beide Male einen unähnlichen Axenlauf zeigt; und es haben die zwei ersten Systeme einen unähnlichen Axenlauf, wenn das dritte, verglichen mit dem einen der zwei ersten, einen ähnlichen, und, verglichen mit dem andern dieser beiden, einen unähnlichen Axenlauf zeigt.

Mit Hilfe dieses letzten Satzes, der in seinen beiden Theilen offenbar auch eine Umkehrung gestattet, lassen sich nun die in Nr. 41. unter a), b) und c) für das Positivsein oder Negativsein der Grösse $[\overset{3}{A}]$ angegebenen Kennzeichen auf folgende Art dem Ausdruck nach sehr kurz zusammen fassen:

Satz 6) Die zu zwei beliebigen Systemen gehörige Grösse $[\overset{3}{A}]$ ist eine positive oder negative Zahl, je nachdem die zwei Systeme, an welchen sie sich bildet, einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf unter sich zeigen.

Um die volle Uebereinstimmung des so ausgesprochenen Kennzeichens mit den drei oben in Nr. 41. unter a), b) und c) erhaltenen um so klarer vor Augen legen zu können, wollen wir jene einzeln hier unter dem gleichen Buchstaben wieder zur Sprache bringen.

a) Die oben unter diesem Buchstaben betrachteten, aus den Axen AX, AX′, AY″ und aus denen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten zwei Systeme haben schon der Definition nach einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf, je nachdem die Axen AX″ und AY″ auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite von der Ebene XAX′ liegen, wie sogleich in die Augen

springt, wenn man sich als Ebene P die durch XAX′ hindurch gelegte vorstellt, und als Richtung OS eine der Richtungen AX oder AX′; und umgekehrt zieht das Liegen der Axen AX″ und AY″ auf einerlei oder entgegengesetzter Seite von der Ebene XAX′ den ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf in den beiden Systemen nach sich. Eben deswegen aber lässt sich der oben unter a) mitgetheilte Satz auch in der Form des Satzes 6. aussprechen. — Zugleich folgt hieraus, dass bei zwei so von einander abhängigen Systemen der Ausdruck:

„Diese Systeme haben unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf“

mit dem:

„Die in diesen Systemen ausser einander liegenden Axen befinden sich auf einerlei oder entgegengesetzter Seite von der jenen Systemen gemeinschaftlichen Coordinatenebene“

völlig einerlei Bedeutung habe.

b) Die Beurtheilung der zwei oben unter diesem Buchstaben betrachteten, aus den Axen AX, AY′, AY″ und aus denen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten Systeme lässt sich mittelst eines dritten aus den Axen AX, AX′, AY″ gebildeten Systems auf zwei Beurtheilungen von der unter a) geschehenen Art zurückführen. Da nämlich dieses dritte System mit dem zweiten die Coordinatenebene XAX′ gemein, während die Axen AX″ und AY″ auseinander liegen, hingegen mit dem ersten bei aussereinander liegenden Axen AX′ und AY′ die Ebene XAY″ gemein hat, so hat nach dem so eben in a) Gesagten der Ausdruck:

„Die Axen AX″ und AY″, AX′ und AY′ liegen gleichzeitig entweder auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite respective von der Ebene XAX′, XAY″“

einerlei Bedeutung mit dem:

„Das dritte System hat, verglichen mit jedem der zwei ersten, beide Male einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf“,

und dieser letztere Ausdruck hat wieder in Gemässheit des Satzes 5. einerlei Bedeutung mit dem:

„Die zwei ersten Systeme haben unter sich einen ähnlichen Axenlauf.“

Ebenso hat der Ausdruck:

„Von den Axenpaaren AX″ und AY″, AX′ und AY′ liegt das eine auf einerlei, das andere auf entgegengesetzter Seite respective von der Ebene XAX′, XAY″“

einerlei Bedeutung mit dem:

„Das dritte System hat, verglichen mit dem einen der zwei ersten, einen ähnlichen, und verglichen mit dem andern dieser beiden, einen unähnlichen Axenlauf,“

und dieser letztere Ausdruck hat wieder in Gemässheit des Satzes 5. einerlei Bedeutung mit dem:

„Die zwei ersten Systeme haben unter sich einen unähnlichen Axenlauf.“

Hiermit ist aber die vollkommene Uebereinstimmung des oben in Nr. 41. unter b) mitgetheilten Satzes mit dem hier aufgestellten Satze 6) ausser Zweifel gestellt.

c) Die Beurtheilung der zwei oben unter diesem Buchstaben betrachteten, aus den Axen AY, AY′, AY″ und aus denen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten Systeme lässt sich aus den beiden hier unter a) und b) geschehenen Beurtheilungen zusammensetzen, wenn man in die Betrachtung ein drittes, aus den Axen AX, AY′, AY″ gebildetes aufnimmt. Da

nämlich dieses dritte, verglichen mit dem ersten, sich in dem Falle a) befindet, so hat in Folge der dort am Ende angegebenen gleichbedeutenden Ausdrücke der Ausdruck:

„Die zum ersten und dritten Systeme gehörigen Axen AX und AY liegen auf einerlei oder auf entgegengesetzten Seiten von der Ebene Y′AY″“

einerlei Bedeutung mit dem:

„Das erste und dritte System haben unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf.“

Da ferner dasselbe dritte System, verglichen mit dem zweiten, sich in dem Falle b) befindet, wobei sogar alle Bezeichnungen völlig ungeändert bleiben, so finden zwischen diesen beiden Systemen die so eben unter b) angegebenen Beziehungen hier noch ganz so wie dort statt; daher ist der Ausdruck:

„Die Axenpaare AX″ und AY″, AX′ und AY′ liegen gleichzeitig entweder auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite respective von der Ebene XAX′, XAY″“

gleichbedeutend mit dem:

„Das zweite und dritte System haben unter sich einen ähnlichen Axenlauf,“

und der Ausdruck:

„Von den Axenpaaren AX″ und AY″, AX′ und AY′ liegt das eine auf einerlei, das andere auf entgegengesetzter Seite respective von der Ebene XAX′, XAY″“

ist gleichbedeutend mit dem:

„Das zweite und dritte System haben unter sich einen unähnlichen Axenlauf.“

Dem Satz 5) zur Folge hat der Ausdruck:

„Die zwei ersten Systeme haben unter sich einen ähnlichen Axenlauf“

einerlei Bedeutung hat mit dem:

„Das dritte System hat, verglichen mit den zwei ersten, in beiden Fällen einen ähnlichen oder in beiden Fällen einen unähnlichen Axenlauf,“

so wie der:

„Die zwei ersten Systeme haben unter sich einen unähnlichen Axenlauf,“

einerlei Bedeutung hat mit dem:

„Das dritte System hat, verglichen mit dem einen der zwei ersten Systeme, einen ähnlichen, mit dem andern einen unähnlichen Axenlauf;“

diese zwei Paare gleichbedeutender Ausdrücke nehmen aber unter Berücksichtigung der ihnen vorangegangenen die folgende Form an, nämlich der Ausdruck:

„Das erste und zweite System haben unter sich einen ähnlichen Axenlauf,“

hat einerlei Bedeutung mit den folgenden alternative unter sich verbundenen:

„Die Axenpaare AX″ und AY″, AX′ und AY′, AX und AY liegen sämmtlich auf einerlei Seite respective von ihrer Ebene XAX′, XAY″, Y′AY″; oder AX″ und AY″, AX′ und AY′ liegen auf entgegengesetzter Seite respective von den Ebenen XAX″, XAY″, dagegen AX und AY auf derselben Seite; oder AX″ und AY″ auf derselben Seite von XAX′, AX′ und AY′ auf entgegengesetzter Seite von XAY″, so wie auch AX und AY auf entgegengesetzter Seite von Y′AY″; oder AX″ und AY″ auf entgegengesetzter Seite von XAX′, AX′ und AY′ auf derselben Seite von XAY″, dann aber AX und AY wieder auf entgegengesetzter Seite von Y′AY″,“

und der Ausdruck:

„Das erste und zweite System haben unter sich einen unähnlichen Axenlauf“

hat einerlei Bedeutung mit den ausschliessungsweise unter sich verbundenen:

„Die Axenpaare A X″ und A Y″, A X′ und A Y′, A X und A Y liegen sämmtlich auf entgegengesetzter Seite respective von ihrer Ebene X A X′, X A Y″, Y′ A Y″; oder A X″ und A Y″, A X′ und A Y′ liegen auf derselben Seite respective von ihrer Ebene X A X′, X A Y″, und A X und A Y wieder auf entgegengesetzter Seite von Y′ A Y″; oder A X″ und A Y″ liegen auf derselben Seite von X A X′, A X′ und A Y′ dagegen auf entgegengesetzter Seite von X A Y″, dann aber A X und A Y auf derselben Seite von Y′ A Y″; oder A X″ und A Y″ liegen auf entgegengesetzter Seite von X A X′, A X′ und A Y′ auf derselben Seite von X A Y″, zugleich aber auch A X und A Y auf derselben Seite von Y′ A Y″.“

Eine genauere Betrachtung der alternative unter sich verbundenen Ausdrücke zeigt indessen, dass sie in ihrer Aufeinanderfolge völlig die gleichen Kennzeichen in sich tragen, welche in Nr. 41. unter c) das Positivsein oder Negativsein der Grösse $[\overset{3}{A}]$ bekunden; und da diese unter sich alternative verbundenen Ausdrücke einerlei mit den ihnen unmittelbar voranstehenden sind, so ergiebt sich hieraus, dass auch der in Nr. 41. unter c) aufgestellte Satz völlig genau durch den Satz 6. wiedergegeben wird.

Wir bemerken schliesslich noch, dass eine an den zweien Axen vorgenommene Vertauschung, was nichts anders sagt, als, dass die Namen zweier Axen des Systems mit einander verwechselt werden, alle steigenden Axenfolgen in fallende, und umgekehrt diese in jene verwandelt; wird daher eine solche Vertauschung gleichzeitig an jedem der beiden auf einander bezogenen Systeme vorgenommen, so bleibt der relative Axenlauf in beiden Systemen ähnlich oder unähnlich, je nachdem er das eine oder andere zuvor schon war, er kehrt sich dagegen dem Satz 2) zur Folge um und wird unähnlich, wenn er zuvor ähnlich war, ähnlich, wenn er zuvor unähnlich war, jedesmal, wenn eine Vertauschung der angezeigten Art nur an dem einen der beiden Systeme vorgenommen wird. Deswegen hat man es immer bei der Einführung neuer Axen in seiner Gewalt, sie so zu bezeichnen, dass die Grösse $[\overset{3}{A}]$ eine positive Zahl wird. Unter dieser Voraussetzung lassen sich dann die Gleichungen (84. a.) und (84. c.) stets so schreiben:

$$[\overset{3}{C}] = [\overset{3}{D}] = hk \quad \text{und} \quad [\overset{3}{A}] = \frac{k}{h}, \quad [\overset{3}{B}] = \frac{h}{k}. \qquad (85)$$

§. 3.

Aufstellung der zwischen zwei Doppelsystemen eintretenden Correlationen.

44) Wir haben im vorigen Paragraphen blos solche Beziehungen aufgefasst, welche zwischen den Axen zweier einfacher Systeme statt finden, wobei das zweite System entweder das Polarsystem des erstern oder auch ein von diesem völlig unabhängiges sein konnte. Denkt man sich aber in dem Falle, wo die beiden auf einander bezogenen Systeme von einander unabhängig gedacht werden, zu jedem noch sein Polarsystem hinzugefügt, so hat man zwei Paare von Systemen, und es stehen die Systeme eines jeden Paares in dem Verhältniss von Grund- und Polarsystem zu einander, zwischen denen die oben für das Polarsystem aufgestellten Formeln gültig bleiben, während jedes System des einen Paares in Verbindung mit jedem Systeme des andern Paares aufgefasst in dem Verhältnisse von zwei unabhängigen Systemen zu einander stehen, für welche die an zwei beliebigen Grundsystemen aufgefundenen Relationen Gültigkeit behalten. So stellen sich vier Paare von beliebigen Systemen unserer Anschauung dar, die je-

doch unter sich in einem bestimmten Zusammenhange stehen, weshalb auch die Axenbeziehungen der verschiedenen Paare in bestimmter Abhängigkeit von einander stehen müssen. Die Correlationsformeln, in denen sich diese Abhängigkeit ausspricht, aufzustellen, ist die Aufgabe dieses Paragraphen.

Die grosse Mannigfaltigkeit von je zwei Systemen, welche dabei mit einander verglichen werden können, macht eine feste Bezeichnung zum wesentlichen Erforderniss, in Bezug auf welche wir folgende Anordnungen treffen. Bei jedem ursprünglich einzeln vorhandenen Doppelsysteme, worunter wir die Verbindung eines beliebigen aus den Axen AX, AX', AX'' gebildeten Systems mit seinem aus den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ gebildeten Polarsystem verstehen, welches später in Verbindung mit einem neu hinzugedachten Doppelsysteme, dessen Grundaxen durch AY, AY', AY'' und dessen Polaraxen durch $A\mathfrak{Y}$, $A\mathfrak{Y}'$, $A\mathfrak{Y}''$ vorgestellt werden, betrachtet wird, behalten wir hinsichtlich der Beziehungen zwischen den Axen des ursprünglichen Grundsystems und des neu hinzugekommenen Grundsystems die Bezeichnungen der Nr. 23. und Nr. 24. unverändert bei, wollen wir aber die analogen Axenbeziehungen zwischen den beiden Polarsystemen derselben zwei Doppelsysteme vor die Augen führen, so setzen wir blos an die Stelle der dortigen lateinischen Buchstaben A, B, C, D jetzt die griechischen A, B, Γ, Δ, während die beigefügten Accente und Indexe in beiden die analoge Bedeutung annehmen, so dass also durch

$$\left\{\begin{matrix} \mathit{A}, \mathit{A}', \mathit{A}''; & \mathit{A}_1, \mathit{A}_1', \mathit{A}_1''; & \mathit{A}_2, \mathit{A}_2', \mathit{A}_2'' \\ \mathit{B}, \mathit{B}', \mathit{B}''; & \mathit{B}_1, \mathit{B}_1', \mathit{B}_1''; & \mathit{B}_2, \mathit{B}_2', \mathit{B}_2'' \end{matrix}\right\}$$ die schiefen Projectionszahlen bezeichnet werden, welche die Polaraxen $\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \\ A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \end{matrix}\right\}$ an denen $\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \\ A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \end{matrix}\right\}$ liefern,

und durch

$$\left\{\begin{matrix} \Gamma, \Gamma', \Gamma''; & \Gamma_1, \Gamma_1', \Gamma_1''; & \Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_2'' \\ \Delta, \Delta', \Delta''; & \Delta_1, \Delta_1', \Delta_1''; & \Delta_2, \Delta_2', \Delta_2'' \end{matrix}\right\}$$ die senkrechten Projectionszahlen, welche die Polaraxen $\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \\ A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \end{matrix}\right\}$ an denen $\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \\ A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \end{matrix}\right\}$ geben. Wollen wir dagegen die analogen Beziehungen bezeichnen, welche zwischen den Grundaxen des einen Doppelsystems und den Polaraxen des andern Doppelsystems bestehen, so werden wir im Geiste einer schon früher gebrauchten Bezeichnungsweise dazu die vorigen Zeichen benützen, diese aber mit Klammern umgeben, und zwar nehmen wir zu diesen neuen Zeichen im Sinne der schon oben gebrauchten Bezeichnungsweise immer die Buchstaben, welche genommen werden müssten, wenn dasjenige der beiden Systeme, an welchem die Projectionszahlen der Axen des andern aufgefasst werden, von derselben Art, wie dieses andere wäre, d. h. das Grundsystem, wenn dieses das Grundsystem, oder das Polarsystem, wenn dieses das Polarsystem ist. Diesem nach bezeichnen wir durch

$$\left.\begin{matrix} (A), (A'), (A''); & (A_1), (A_1'), (A_1''); & (A_2), (A_2'), (A_2'') \\ (\mathit{A}), (\mathit{A}'), (\mathit{A}''); & (\mathit{A}_1), (\mathit{A}_1'), (\mathit{A}_1''); & (\mathit{A}_2), (\mathit{A}_2'), (\mathit{A}_2'') \\ (B), (B'), (B''); & (B_1), (B_1'), (B_1''); & (B_2), (B_2'), (B_2'') \\ (\mathit{B}), (\mathit{B}'), (\mathit{B}''); & (\mathit{B}_1), (\mathit{B}_1'), (\mathit{B}_1''); & (\mathit{B}_2), (\mathit{B}_2'), (\mathit{B}_2'') \end{matrix}\right\} \text{ die schiefen Projectionszahlen,}$$

welche die Grund- oder Polaraxen $\left\{\begin{matrix} AY, AY', AY'' \\ A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \\ AX, AX', AX'' \\ A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \end{matrix}\right\}$ an den Polar- oder Grundaxen $\left\{\begin{matrix} A\mathfrak{X}, A\mathfrak{X}', A\mathfrak{X}'' \\ AX, AX', AX'' \\ A\mathfrak{Y}, A\mathfrak{Y}', A\mathfrak{Y}'' \\ AY, AY', AY'' \end{matrix}\right\}$

geben, und durch

$$\left.\begin{array}{l}(C),\ (C'),\ (C'');\ (C_1),\ (C_1'),\ (C_1'');\ (C_2),\ (C_2'),\ (C_2'')\\ (\Gamma),\ (\Gamma'),\ (\Gamma'');\ (\Gamma_1),\ (\Gamma_1'),\ (\Gamma_1'');\ (\Gamma_2),\ (\Gamma_2'),\ (\Gamma_2'')\\ (D),\ (D'),\ (D'');\ (D_1),\ (D_1'),\ (D_1'');\ (D_2),\ (D_2'),\ (D_2'')\\ (\Delta),\ (\Delta'),\ (\Delta'');\ (\Delta_1),\ (\Delta_1'),\ (\Delta_1'');\ (\Delta_2),\ (\Delta_2'),\ (\Delta_2'')\end{array}\right\}\ \text{die senkrechten Projectionszahlen, welche}$$

$$\text{die Grund- oder Polaraxen}\left\{\begin{array}{l}AY,\ AY',\ AY''\\ A\mathfrak{Y},\ A\mathfrak{Y}',\ A\mathfrak{Y}''\\ AX,\ AX',\ AX''\\ A\mathfrak{X},\ A\mathfrak{X}',\ A\mathfrak{X}''\end{array}\right\}\ \text{an den Polar- oder Grundaxen}\left\{\begin{array}{l}A\mathfrak{X},\ A\mathfrak{X}',\ A\mathfrak{X}''\\ AX,\ AX',\ AX''\\ A\mathfrak{Y},\ A\mathfrak{Y}',\ A\mathfrak{Y}''\\ AY,\ AY',\ AY''\end{array}\right\}$$

liefern. Fügen wir zu diesen Bezeichnungen noch die schon oben festgestellten, wornach

$$\left.\begin{array}{l}W,\ W',\ W''\\ W_1,\ W_1',\ W_1''\end{array}\right\}\ \text{die Axenwinkel}\ \left\{\begin{array}{l}XAX',\ XAX'',\ X'AX''\ \text{im ursprünglichen}\\ YAY',\ YAY'',\ Y'AY''\ \text{im neu hinzugekommenen}\end{array}\right\}\ \text{Grundsysteme,}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{W},\ \mathfrak{W}',\ \mathfrak{W}''\\ \mathfrak{W}_1,\ \mathfrak{W}_1',\ \mathfrak{W}_1''\end{array}\right\}\ \text{die Axenwinkel}\ \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{X}A\mathfrak{X}',\ \mathfrak{X}A\mathfrak{X}'',\ \mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''\ \text{im ursprünglichen}\\ \mathfrak{Y}A\mathfrak{Y}',\ \mathfrak{Y}A\mathfrak{Y}'',\ \mathfrak{Y}'A\mathfrak{Y}''\ \text{im neu hinzugekommenen}\end{array}\right\}\ \text{Polarsysteme}$$

und

$$\left.\begin{array}{l}h\\ k\end{array}\right\}\ \text{den Inhalt des}\ \left\{\begin{array}{l}\text{ursprünglichen}\\ \text{neuen}\end{array}\right\}\ \text{Grundsystems,}\quad \left.\begin{array}{l}(h)\\ (k)\end{array}\right\}\ \text{den Inhalt des}\ \left\{\begin{array}{l}\text{ursprünglichen}\\ \text{neuen}\end{array}\right\}\ \text{Polar-}$$

systems bezeichnen, so ist man in den Stand gesetzt, aus den oben zwischen den Axen zweier Grundsysteme aufgestellten Relationen unmittelbar die zu entnehmen, welche sich auf irgend zwei von den Systemen beziehen, die im ursprünglichen und im neu hinzugekommenen Systeme enthalten sind.

45) Um die wichtigsten von den so entstehenden Gleichungen zu Tage zu fördern, bemerken wir, dass so wie in Betreff der beiden Grundsysteme den Gleichungen (31) zur Folge

$$C = D,\ C' = D_1,\ C'' = D_2,\ C_1 = D',\ C_1' = D_1',\ C_1'' = D_2',\ C_2 = D'',\ C_2' = D_1'',\ C_2'' = D_2''$$

ist, eben so in Betreff der beiden Polarsysteme,

$$\Gamma = \Delta,\ \Gamma' = \Delta_1,\ \Gamma'' = \Delta_2,\ \Gamma_1' = \Delta_1',\ \Gamma_1' = \Delta_1',\ \Gamma_1 = \Delta',\ \Gamma_2 = \Delta'',\ \Gamma_2' = \Delta_1'',\ \Gamma_2'' = \Delta_2'',$$

und im Zusammenhalt des ursprünglichen Polarsystems mit dem neuen Grundsysteme

$$(C) = (\Delta),\ (C') = (\Delta_1),\ (C'') = (\Delta_2),\ (C_1) = (\Delta'),\ (C_1') = (\Delta_1'),\ (C_1'') = (\Delta_2'),\ (C_2) = (\Delta''),$$
$$(C_2') = (\Delta_1''),\ (C_2'') = (\Delta_2''),$$

so wie im Zusammenhalt des ursprünglichen Grundsystems mit dem neuen Polarsystem

$$(D) = (\Gamma),\ (D') = (\Gamma_1),\ (D'') = (\Gamma_2),\ (D_1) = (\Gamma'),\ (D_1') = (\Gamma_1'),\ (D_1'') = (\Gamma_2'),\ (D_2) = (\Gamma''),$$
$$(D_2') = (\Gamma_1''),\ (D_2'') = (\Gamma_2'') \qquad \textbf{(86. a.)}$$

wird.

Wendet man die auf erster Zeile stehenden Gleichungen (63) auf die drei neuen Axenrichtungen an, so wie die auf zweiter Zeile stehenden auf die drei ursprünglichen Axenrichtungen, so erhält man im ersten Falle:

$$\begin{array}{lllllll}(C) = \mathfrak{C}A, & (C') = \mathfrak{C}_1'A', & (C'') = \mathfrak{C}_2''A'' & \text{und} & C = \mathfrak{C}(A), & C' = \mathfrak{C}_1'(A'), & C'' = \mathfrak{C}_2''(A''),\\ (C_1) = \mathfrak{C}A_1, & (C_1') = \mathfrak{C}_1'A_1', & (C_1'') = \mathfrak{C}_2''A_1'' & \text{und} & C_1 = \mathfrak{C}(A_1), & C_1' = \mathfrak{C}_1'(A_1'), & C_1'' = \mathfrak{C}_2''(A_1''),\\ (C_2) = \mathfrak{C}A_2, & (C_2') = \mathfrak{C}_1'A_2', & (C_2'') = \mathfrak{C}_2''A_2'' & \text{und} & C_2 = \mathfrak{C}(A_2), & C_2' = \mathfrak{C}_1'(A_2'), & C_2'' = \mathfrak{C}_2''(A_2''),\end{array}$$

dagegen im andern Falle

$$\begin{array}{lllllll}(D) = \mathfrak{D}B, & (D') = \mathfrak{D}_1'B', & (D'') = \mathfrak{D}_2''B'' & \text{und} & D = \mathfrak{D}(B), & D' = \mathfrak{D}_1'(B'), & D'' = \mathfrak{D}_2''(B''),\\ (D_1) = \mathfrak{D}B_1, & (D_1') = \mathfrak{D}_1'B_1', & (D_1'') = \mathfrak{D}_2''B_1'' & \text{und} & D_1 = \mathfrak{D}(B_1), & D_1' = \mathfrak{D}_1'(B_1'), & D_1'' = \mathfrak{D}_2''(B_1''),\\ (D_2) = \mathfrak{D}B_2, & (D_2') = \mathfrak{D}_1'B_2', & (D_2'') = \mathfrak{D}_2''B_2'' & \text{und} & D_2 = \mathfrak{D}(B_2), & D_2' = \mathfrak{D}_1'(B_2'), & D_2'' = \mathfrak{D}_2''(B_2''),\end{array}$$

(86. b.) und hieraus erhält man durch gegenseitige Verwechselung der Grund- und Polarsysteme in jedem Doppelsystem, wobei $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2''$ dieselben bleiben:

$$(\Gamma)=\mathfrak{C}\mathit{A}, \; (\Gamma')=\mathfrak{C}_1'\mathit{A}', \; (\Gamma'')=\mathfrak{C}_2''\mathit{A}'' \text{ und } \Gamma=\mathfrak{C}(\mathit{A}), \; \Gamma'=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}'), \; \Gamma''=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}''),$$
$$(\Gamma_1)=\mathfrak{C}\mathit{A}_1, \; (\Gamma_1')=\mathfrak{C}_1'\mathit{A}_1', \; (\Gamma_1'')=\mathfrak{C}_2''\mathit{A}_1'' \text{ und } \Gamma_1=\mathfrak{C}(\mathit{A}_1), \; \Gamma_1'=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}_1'), \; \Gamma_1''=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}_1''),$$
$$(\Gamma_2)=\mathfrak{C}\mathit{A}_2, \; (\Gamma_2')=\mathfrak{C}_1'\mathit{A}_2', \; (\Gamma_2'')=\mathfrak{C}_2''\mathit{A}_2'' \text{ und } \Gamma_2=\mathfrak{C}(\mathit{A}_2), \; \Gamma_2'=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}_2'), \; \Gamma_2''=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}_2''),$$

so wie

$$(\Delta)=\mathfrak{D}B, \; (\Delta')=\mathfrak{D}_1'B', \; (\Delta'')=\mathfrak{D}_2''B'' \text{ und } \Delta=\mathfrak{D}(B), \; \Delta'=\mathfrak{D}_1'(B'), \; \Delta''=\mathfrak{D}_2''(B''),$$
$$(\Delta_1)=\mathfrak{D}B_1, \; (\Delta_1')=\mathfrak{D}_1'B_1', \; (\Delta_1'')=\mathfrak{D}_2''B_1'' \text{ und } \Delta_1=\mathfrak{D}(B_1), \; \Delta_1'=\mathfrak{D}_1'(B_1'), \; \Delta_1''=\mathfrak{D}_2''(B_1''),$$
$$(\Delta_2)=\mathfrak{D}B_2, \; (\Delta_2')=\mathfrak{D}_1'B_2', \; (\Delta_2'')=\mathfrak{D}_2''B_2'' \text{ und } \Delta_2=\mathfrak{D}(B_2), \; \Delta_2'=\mathfrak{D}_1'(B_2'), \; \Delta_2''=\mathfrak{D}_2''(B_2''),$$

welche Gleichungen (86. a. und b.) sich in folgende vereinigen lassen:

(87)

$$\mathrm{C}=\mathrm{D}=\mathfrak{C}(\mathrm{A})=\mathfrak{D}(\mathrm{B}), \quad \mathrm{C}'=\mathrm{D}_1=\mathfrak{C}_1'(\mathrm{A}')=\mathfrak{D}(\mathrm{B}_1), \quad \mathrm{C}''=\mathrm{D}_2=\mathfrak{C}_2''(\mathrm{A}'')=\mathfrak{D}(\mathrm{B}),$$
$$\mathrm{C}_1=\mathrm{D}'=\mathfrak{C}(\mathrm{A}_1)=\mathfrak{D}_1'(\mathrm{B}'), \quad \mathrm{C}_1'=\mathrm{D}_1'=\mathfrak{C}_1'(\mathrm{A}_1')=\mathfrak{D}_1'(\mathrm{B}_1'), \quad \mathrm{C}_1''=\mathrm{D}_2'=\mathfrak{C}_2''(\mathrm{A}_1'')=\mathfrak{D}_1'(\mathrm{B}_1'),$$
$$\mathrm{C}_2=\mathrm{D}''=\mathfrak{C}(\mathrm{A}_2)=\mathfrak{D}_2''(\mathrm{B}''), \quad \mathrm{C}_2'=\mathrm{D}_1''=\mathfrak{C}_1'(\mathrm{A}_2')=\mathfrak{D}_2''(\mathrm{B}_1''), \quad \mathrm{C}_2''=\mathrm{D}_2''=\mathfrak{C}_2''(\mathrm{A}_2'')=\mathfrak{D}_2''(\mathrm{B}_2'');$$

$$\Gamma=\Delta=\mathfrak{C}(\mathit{A})=\mathfrak{D}(B), \quad \Gamma'=\Delta_1=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}')=\mathfrak{D}(B_1), \quad \Gamma''=\Delta_2=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}'')=\mathfrak{D}(B_2),$$
$$\Gamma_1=\Delta'=\mathfrak{C}(\mathit{A}_1)=\mathfrak{D}_1'(B'), \quad \Gamma_1'=\Delta_1'=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}_1')=\mathfrak{D}_1'(B_1'), \quad \Gamma_1''=\Delta_2'=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}_1'')=\mathfrak{D}_1'(B_2'),$$
$$\Gamma_2=\Delta''=\mathfrak{C}(\mathit{A}_2)=\mathfrak{D}_2''(B''), \quad \Gamma_2'=\Delta_1''=\mathfrak{C}_1'(\mathit{A}_2')=\mathfrak{D}_2''(B_1''), \quad \Gamma_2''=\Delta_2''=\mathfrak{C}_2''(\mathit{A}_2'')=\mathfrak{D}_2''(B_2'');$$

$$(\mathrm{C})=(\Delta)=\mathfrak{C}\,\mathrm{A}=\mathfrak{D}\,B, \quad (\mathrm{C}')=(\Delta_1)=\mathfrak{C}_1'\,\mathrm{A}'=\mathfrak{D}\,B_1, \quad (\mathrm{C}'')=(\Delta_2)=\mathfrak{C}_2''\,\mathrm{A}''=\mathfrak{D}\,B_2,$$
$$(\mathrm{C}_1)=(\Delta')=\mathfrak{C}\,\mathrm{A}_1=\mathfrak{D}_1'\,B', \quad (\mathrm{C}_1')=(\Delta_1')=\mathfrak{C}_1'\,\mathrm{A}_1'=\mathfrak{D}_1'\,B_1', \quad (\mathrm{C}_1'')=(\Delta_2')=\mathfrak{C}_2''\,\mathrm{A}_1''=\mathfrak{D}_1'\,B_2',$$
$$(\mathrm{C}_2)=(\Delta'')=\mathfrak{C}\,\mathrm{A}_2=\mathfrak{D}_2''\,B'', \quad (\mathrm{C}_2')=(\Delta_1'')=\mathfrak{C}_1'\,\mathrm{A}_2'=\mathfrak{D}_2''\,B_1'', \quad (\mathrm{C}_2'')=(\Delta_2'')=\mathfrak{C}_2''\,\mathrm{A}_2''=\mathfrak{D}_2''\,B_2'';$$

$$(\mathrm{D})=(\Gamma)=\mathfrak{D}\,\mathrm{B}=\mathfrak{C}\,\mathit{A}, \quad (\mathrm{D}')=(\Gamma_1)=\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{B}'=\mathfrak{C}\,\mathit{A}_1, \quad (\mathrm{D}'')=(\Gamma_2)=\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{B}''=\mathfrak{C}\,\mathit{A}_2,$$
$$(\mathrm{D}_1)=(\Gamma')=\mathfrak{D}\,\mathrm{B}_1=\mathfrak{C}_1'\,\mathit{A}', \quad (\mathrm{D}_1')=(\Gamma_1')=\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{B}_1'=\mathfrak{C}_1'\,\mathit{A}_1', \quad (\mathrm{D}_1'')=(\Gamma_2')=\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{B}_1''=\mathfrak{C}_1'\,\mathit{A}_2',$$
$$(\mathrm{D}_2)=(\Gamma'')=\mathfrak{D}\,\mathrm{B}_2=\mathfrak{C}_2''\,\mathit{A}'', \quad (\mathrm{D}_2')=(\Gamma_1'')=\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{B}_2'=\mathfrak{C}_2''\,\mathit{A}_1'', \quad (\mathrm{D}_2'')=(\Gamma_2'')=\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{B}_2''=\mathfrak{C}_2''\,\mathit{A}_2''.$$

46) Zu den Gleichungen der vorigen Nummer fügen wir noch die, welche denen (81. a.) an den beiden Grundsystemen entsprechen. Setzt man in jenen Gleichungen für $[\overset{3}{\mathrm{A}}]$ und $[\overset{3}{\mathrm{B}}]$ ihre aus den Gleichungen (84. c.) entnommenen Werthe, so nehmen sie die nachstehende Form an:

(88. a.)

$$\left\{\begin{array}{l} \pm \mathrm{k}\,\mathrm{B}=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2''-\mathrm{A}_1''\mathrm{A}_2'), \\ \mp \mathrm{k}\,\mathrm{B}'=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}'\mathrm{A}_2''-\mathrm{A}''\mathrm{A}_2'), \\ \pm \mathrm{k}\,\mathrm{B}''=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}'\mathrm{A}_1''-\mathrm{A}''\mathrm{A}_1'); \\ \mp \mathrm{k}\,\mathrm{B}_1=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2''-\mathrm{A}_1''\mathrm{A}_2), \\ \pm \mathrm{k}\,\mathrm{B}_1'=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}\,\mathrm{A}_2''-\mathrm{A}''\mathrm{A}_2), \\ \mp \mathrm{k}\,\mathrm{B}_1''=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}\,\mathrm{A}_1''-\mathrm{A}''\mathrm{A}_1); \\ \pm \mathrm{k}\,\mathrm{B}_2=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2'-\mathrm{A}_1'\mathrm{A}_2), \\ \mp \mathrm{k}\,\mathrm{B}_2'=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}\,\mathrm{A}_2'-\mathrm{A}'\mathrm{A}_2), \\ \pm \mathrm{k}\,\mathrm{B}_2''=\mathrm{h}\,(\mathrm{A}\,\mathrm{A}_1'-\mathrm{A}'\mathrm{A}_1), \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \pm \mathrm{h}\,\mathrm{A}=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}_1'\mathrm{B}_2''-\mathrm{B}_1''\mathrm{B}_2'), \\ \mp \mathrm{h}\,\mathrm{A}'=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}'\mathrm{B}_2''-\mathrm{B}''\mathrm{B}_2'), \\ \pm \mathrm{h}\,\mathrm{A}''=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}'\mathrm{B}_1''-\mathrm{B}''\mathrm{B}_1'); \\ \mp \mathrm{h}\,\mathrm{A}_1=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2''-\mathrm{B}_1''\mathrm{B}_2), \\ \pm \mathrm{h}\,\mathrm{A}_1'=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}\,\mathrm{B}_2''-\mathrm{B}''\mathrm{B}_2), \\ \mp \mathrm{h}\,\mathrm{A}_1''=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}\,\mathrm{B}_1''-\mathrm{B}''\mathrm{B}_1); \\ \pm \mathrm{h}\,\mathrm{A}_2=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2'-\mathrm{B}_1'\mathrm{B}_2), \\ \mp \mathrm{h}\,\mathrm{A}_2'=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}\,\mathrm{B}_2'-\mathrm{B}'\mathrm{B}_2), \\ \pm \mathrm{h}\,\mathrm{A}_2''=\mathrm{k}\,(\mathrm{B}\,\mathrm{B}_1'-\mathrm{B}'\mathrm{B}_1), \end{array}\right.$$

und diese gestalten sich an den beiden Polarsystemen in folgende um:

$$\left.\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{k})\,B = (\mathrm{h})\,(A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2)\,,\\
\mp(\mathrm{k})\,B' = (\mathrm{h})\,(A' A''_2 - A'' A'_2)\,,\\
\pm(\mathrm{k})\,B'' = (\mathrm{h})\,(A' A''_1 - A'' A'_1)\,;\\[4pt]
\mp(\mathrm{k})\,B_1 = (\mathrm{h})\,(A_1 A''_2 - A''_1 A_2)\,,\\
\pm(\mathrm{k})\,B'_1 = (\mathrm{h})\,(A\, A''_2 - A'' A_2)\,,\\
\mp(\mathrm{k})\,B''_1 = (\mathrm{h})\,(A\, A''_1 - A'' A_1)\,;\\[4pt]
\pm(\mathrm{k})\,B_2 = (\mathrm{h})\,(A_1 A'_2 - A'_1 A_2)\,,\\
\mp(\mathrm{k})\,B'_2 = (\mathrm{h})\,(A\, A'_2 - A' A_2)\,,\\
\pm(\mathrm{k})\,B''_2 = (\mathrm{h})\,(A\, A'_1 - A' A_1)\,,
\end{array}\right\}
\text{ und }
\left\{\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{h})\,A = (\mathrm{k})\,(B'_1 B''_2 - B''_1 B'_2)\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,A' = (\mathrm{k})\,(B' B''_2 - B'' B'_2)\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,A'' = (\mathrm{k})\,(B' B''_1 - B'' B'_1)\,;\\[4pt]
\mp(\mathrm{h})\,A_1 = (\mathrm{k})\,(B_1 B''_2 - B''_1 B_2)\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,A'_1 = (\mathrm{k})\,(B\, B''_2 - B'' B_2)\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,A''_1 = (\mathrm{k})\,(B\, B''_1 - B'' B_1)\,;\\[4pt]
\pm(\mathrm{h})\,A_2 = (\mathrm{k})\,(B_1 B'_2 - B'_1 B_2)\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,A'_2 = (\mathrm{k})\,(B\, B'_2 - B' B_2)\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,A''_2 = (\mathrm{k})\,(B\, B'_1 - B' B_1)\,.
\end{array}\right\}\ldots\ldots \quad \textbf{(88. b.)}$$

Führt man in die Gleichungen (88. a.) anstatt der beiden Grundsysteme einmal die zwei ein, deren eines das ursprüngliche Grundsystem und deren anderes das neue Polarsystem ist, ein andermal die zwei, deren eines das neue Grundsystem und deren anderes das ursprüngliche Polarsystem ist, so findet man im einen Falle:

$$\left.\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{k})(\mathrm{B}) = \mathrm{h}\,[(A'_1)\,(A''_2) - (A''_1)\,(A'_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{k})(\mathrm{B}') = \mathrm{h}\,[(A')\,(A''_2) - (A'')\,(A'_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{k})(\mathrm{B}'') = \mathrm{h}\,[(A')\,(A''_1) - (A'')\,(A'_1)]\,;\\[4pt]
\mp(\mathrm{k})(\mathrm{B}_1) = \mathrm{h}\,[(A_1)\,(A''_2) - (A''_1)\,(A_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{k})(\mathrm{B}'_1) = \mathrm{h}\,[(A)\,(A''_2) - (A'')\,(A_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{k})(\mathrm{B}''_1) = \mathrm{h}\,[(A)\,(A''_1) - (A'')\,(A_1)]\,;\\[4pt]
\pm(\mathrm{k})(\mathrm{B}_2) = \mathrm{h}\,[(A_1)\,(A'_2) - (A'_1)\,(A_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{k})(\mathrm{B}'_2) = \mathrm{h}\,[(A)\,(A'_2) - (A')\,(A_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{k})(\mathrm{B}''_2) = \mathrm{h}\,[(A)\,(A'_1) - (A')\,(A_1)]\,,
\end{array}\right\}
\text{ und }
\left\{\begin{array}{l}
\pm\mathrm{h}\,(A) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B}'_1)\,(\mathrm{B}''_2) - (\mathrm{B}''_1)\,(\mathrm{B}'_2)]\,,\\
\mp\mathrm{h}\,(A') = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B}')\,(\mathrm{B}''_2) - (\mathrm{B}'')\,(\mathrm{B}'_2)]\,,\\
\pm\mathrm{h}\,(A'') = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B}')\,(\mathrm{B}''_1) - (\mathrm{B}'')\,(\mathrm{B}'_1)]\,;\\[4pt]
\mp\mathrm{h}\,(A_1) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B}_1)\,(\mathrm{B}''_2) - (\mathrm{B}''_1)\,(\mathrm{B}_2)]\,,\\
\pm\mathrm{h}\,(A'_1) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B})\,(\mathrm{B}''_2) - (\mathrm{B}'')\,(\mathrm{B}_2)]\,,\\
\mp\mathrm{h}\,(A''_1) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B})\,(\mathrm{B}''_1) - (\mathrm{B}'')\,(\mathrm{B}_1)]\,;\\[4pt]
\pm\mathrm{h}\,(A_2) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B}_1)\,(\mathrm{B}'_2) - (\mathrm{B}'_1)\,(\mathrm{B}_2)]\,,\\
\mp\mathrm{h}\,(A'_2) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B})\,(\mathrm{B}'_2) - (\mathrm{B}')\,(\mathrm{B}_2)]\,,\\
\pm\mathrm{h}\,(A''_2) = (\mathrm{k})\,[(\mathrm{B})\,(\mathrm{B}'_1) - (\mathrm{B}')\,(\mathrm{B}_1)]\,,
\end{array}\right\}\ldots \quad \textbf{(88. c.)}$$

und im andern Falle:

$$\left.\begin{array}{l}
\pm\mathrm{k}\,(B) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A}'_1)\,(\mathrm{A}''_2) - (\mathrm{A}''_1)\,(\mathrm{A}'_2)]\,,\\
\mp\mathrm{k}\,(B') = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A}')\,(\mathrm{A}''_2) - (\mathrm{A}'')\,(\mathrm{A}'_2)]\,,\\
\pm\mathrm{k}\,(B'') = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A}')\,(\mathrm{A}''_1) - (\mathrm{A}'')\,(\mathrm{A}'_1)]\,;\\[4pt]
\mp\mathrm{k}\,(B_1) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A}_1)\,(\mathrm{A}''_2) - (\mathrm{A}''_1)\,(\mathrm{A}_2)]\,,\\
\pm\mathrm{k}\,(B'_1) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A})\,(\mathrm{A}''_2) - (\mathrm{A}'')\,(\mathrm{A}_2)]\,,\\
\mp\mathrm{k}\,(B''_1) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A})\,(\mathrm{A}''_1) - (\mathrm{A}'')\,(\mathrm{A}_1)]\,;\\[4pt]
\pm\mathrm{k}\,(B_2) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A}_1)\,(\mathrm{A}'_2) - (\mathrm{A}'_1)\,(\mathrm{A}_2)]\,,\\
\mp\mathrm{k}\,(B'_2) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A})\,(\mathrm{A}'_2) - (\mathrm{A}')\,(\mathrm{A}_2)]\,,\\
\pm\mathrm{k}\,(B''_2) = (\mathrm{h})\,[(\mathrm{A})\,(\mathrm{A}'_1) - (\mathrm{A}')\,(\mathrm{A}_1)]\,,
\end{array}\right\}
\text{ und }
\left\{\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}) = \mathrm{k}\,[(B'_1)\,(B''_2) - (B''_1)\,(B'_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}') = \mathrm{k}\,[(B')\,(B''_2) - (B'')\,(B'_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}'') = \mathrm{k}\,[(B')\,(B''_1) - (B'')\,(B'_1))\,;\\[4pt]
\mp(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}_1) = \mathrm{k}\,[(B_1)\,(B''_2) - (B''_1)\,(B_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}'_1) = \mathrm{k}\,[(B)\,(B''_2) - (B'')\,(B_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}''_1) = \mathrm{k}\,[(B)\,(B''_1) - (B'')\,(B_1)]\,;\\[4pt]
\pm(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}_2) = \mathrm{k}\,[(B_1)\,(B'_2) - (B'_1)\,(B_2)]\,,\\
\mp(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}'_2) = \mathrm{k}\,[(B)\,(B'_2) - (B')\,(B_2)]\,,\\
\pm(\mathrm{h})\,(\mathrm{A}''_2) = \mathrm{k}\,[(B)\,(B'_1) - (B')\,(B_1)]\,.
\end{array}\right\}\ldots \quad \textbf{(88. d.)}$$

Erwägt man, dass im Sinne der Gleichungen (41)

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}''} = \frac{(\mathrm{h})}{\sin \mathfrak{W}''}\,,\quad \mathfrak{C}'_1 = \frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}'} = \frac{(\mathrm{h})}{\sin \mathfrak{W}'}\,,\quad \mathfrak{C}''_2 = \frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}} = \frac{(\mathrm{h})}{\sin \mathfrak{W}} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}''_1} = \frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}''_1}\,,\quad \mathfrak{D}'_1 = \frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}'_1} = \frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}'_1}\,,\quad \mathfrak{D}''_2 = \frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}_1} = \frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}_1}$$

ist, und setzt man in die Gleichungen (87) für $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}''_2$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_1$, $\mathfrak{D}''_2$ ihre hier gegebenen Werthe ein, von den beiden jedesmal den nehmend, dessen Bestandtheile sich auf das-

selbe System beziehen, an dessen Axen die neben jenen Grössen stehenden schiefen Projectionszahlen sich bilden, (nämlich auf das Grundsystem oder auf das Polarsystem, je nachdem die Projectionszahlen die Grundzeichen A, B, ($\boldsymbol{\mathit{A}}$), ($\boldsymbol{\mathit{B}}$) oder $\boldsymbol{\mathit{A}}$, $\boldsymbol{\mathit{B}}$, (A), (B) an sich tragen), so verwandeln sich die eben genannten Gleichungen in:

(89)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C} = \mathrm{D} = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A})}{\sin\mathfrak{W}''} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B})}{\sin\mathfrak{W}_1''}, \quad && \mathrm{C}' = \mathrm{D}_1 = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}')}{\sin\mathfrak{W}'} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_1)}{\sin\mathfrak{W}_1''},\\
& && \mathrm{C}'' = \mathrm{D}_2 = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}'')}{\sin\mathfrak{W}} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_2)}{\sin\mathfrak{W}_1''};\\
&\mathrm{C}_1 = \mathrm{D}' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_1)}{\sin\mathfrak{W}''} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}')}{\sin\mathfrak{W}_1'}, && \mathrm{C}_1' = \mathrm{D}_1' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_1')}{\sin\mathfrak{W}'} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_1')}{\sin\mathfrak{W}_1'},\\
& && \mathrm{C}_1'' = \mathrm{D}_2' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_1'')}{\sin\mathfrak{W}} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_2')}{\sin\mathfrak{W}_1'};\\
&\mathrm{C}_2 = \mathrm{D}'' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_2)}{\sin\mathfrak{W}''} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}'')}{\sin\mathfrak{W}_1}, && \mathrm{C}_2' = \mathrm{D}_1'' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_2')}{\sin\mathfrak{W}'} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_1'')}{\sin\mathfrak{W}_1},\\
& && \mathrm{C}_2'' = \mathrm{D}_2'' = \frac{(\mathrm{h})(\mathrm{A}_2'')}{\sin\mathfrak{W}} = \frac{(\mathrm{k})(\mathrm{B}_2'')}{\sin\mathfrak{W}_1};\\[1em]
&\Gamma = \Delta = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A})}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B})}{\sin\mathrm{W}_1''}, && \Gamma' = \Delta_1 = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}')}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_1)}{\sin\mathrm{W}_1''},\\
& && \Gamma'' = \Delta_2 = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}'')}{\sin\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_2)}{\sin\mathrm{W}_1''};\\
&\Gamma_1 = \Delta' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_1)}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}')}{\sin\mathrm{W}_1'}, && \Gamma_1' = \Delta_1' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_1')}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_1')}{\sin\mathrm{W}_1'},\\
& && \Gamma_1'' = \Delta_2' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_1'')}{\sin\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_2')}{\sin\mathrm{W}_1'};\\
&\Gamma_2 = \Delta'' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_2)}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}'')}{\sin\mathrm{W}_1}, && \Gamma_2' = \Delta_1'' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_2')}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_1'')}{\sin\mathrm{W}_1},\\
& && \Gamma_2'' = \Delta_2'' = \frac{\mathrm{h}(\mathit{A}_2'')}{\sin\mathrm{W}} = \frac{\mathrm{k}(\mathit{B}_2'')}{\sin\mathrm{W}_1};\\[1em]
&(\mathrm{C}) = (\Delta) = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}}{\sin\mathfrak{W}_1''}, && (\mathrm{C}') = (\Delta_1) = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}'}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_1}{\sin\mathfrak{W}_1''},\\
& && (\mathrm{C}'') = (\Delta_2) = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}''}{\sin\mathrm{W}} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_2}{\sin\mathfrak{W}_1''};\\
&(\mathrm{C}_1) = (\Delta') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_1}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}'}{\sin\mathfrak{W}_1'}, && (\mathrm{C}_1') = (\Delta_1') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_1'}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_1'}{\sin\mathfrak{W}_1'},\\
& && (\mathrm{C}_1'') = (\Delta_2') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_1''}{\sin\mathrm{W}} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_2'}{\sin\mathfrak{W}_1'};\\
&(\mathrm{C}_2) = (\Delta'') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_2}{\sin\mathrm{W}''} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}''}{\sin\mathfrak{W}_1}, && (\mathrm{C}_2') = (\Delta_1'') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_2'}{\sin\mathrm{W}'} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_1''}{\sin\mathfrak{W}_1},\\
& && (\mathrm{C}_2'') = (\Delta_2'') = \frac{\mathrm{h}\,\mathrm{A}_2''}{\sin\mathrm{W}} = \frac{(\mathrm{k})\,\mathit{B}_2''}{\sin\mathfrak{W}_1};
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
(\mathrm{D})=(\Gamma)=\dfrac{\mathrm{k\,B}}{\sin \mathrm{W}_1''}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta}{\sin \mathfrak{W}''}, & (\mathrm{D}')=(\Gamma_1)=\dfrac{\mathrm{k\,B}'}{\sin \mathrm{W}_1'}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_1}{\sin \mathfrak{W}''}, \\
 & (\mathrm{D}'')=(\Gamma_2)=\dfrac{\mathrm{k\,B}''}{\sin \mathrm{W}_1}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_2}{\sin \mathfrak{W}''}; \\
(\mathrm{D}_1)=(\Gamma')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_1}{\sin \mathrm{W}_1''}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta'}{\sin \mathfrak{W}'}, & (\mathrm{D}_1')=(\Gamma_1')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_1'}{\sin \mathrm{W}_1'}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_1'}{\sin \mathfrak{W}'}, \\
 & (\mathrm{D}_1'')=(\Gamma_2')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_1''}{\sin \mathrm{W}_1}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_2'}{\sin \mathfrak{W}'}; \\
(\mathrm{D}_2)=(\Gamma'')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_2}{\sin \mathrm{W}_1''}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta''}{\sin \mathfrak{W}}, & (\mathrm{D}_2')=(\Gamma_1'')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_2'}{\sin \mathrm{W}_1'}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_1''}{\sin \mathfrak{W}}, \\
 & (\mathrm{D}_2'')=(\Gamma_2'')=\dfrac{\mathrm{k\,B}_2''}{\sin \mathrm{W}_1}=\dfrac{(\mathrm{h})\,\varDelta_2''}{\sin \mathfrak{W}}.
\end{array}\right|$$

Multiplizirt man nun jede der in den Gleichungen (88. a. bis d.) vorkommenden Projectionszahlen, welche auf deren rechten Seiten innerhalb der mit Klammern umgebenen zusammengesetzten Factoren vorkommen, mit dem ausserhalb der Klammern stehenden Factor, dafür diesen zum Nenner machend, und setzt dann in jene Gleichungen an die Stelle der mit dem genannten Factor multiplicirten Projectionszahlen deren aus den Gleichungen (89) sich ergebenden Werthe, zugleich aber auch anstatt der in jenen Gleichungen auf deren linker Seite stehenden Producte ihre aus denselben Gleichungen (89) entnommenen Werthe ein, so verwandeln sich, wenn man zu gleicher Zeit beachtet, dass im Sinne der Gleichungen (42)

$$\begin{array}{l}
\mathrm{h}=\sin \mathrm{W} \sin \mathrm{W}' \sin \mathfrak{W}''=\sin \mathrm{W} \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W}'=\sin \mathrm{W}' \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W}, \\
(\mathrm{h})=\sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}' \sin \mathrm{W}''=\sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}'' \sin \mathrm{W}'=\sin \mathfrak{W}' \sin \mathfrak{W}'' \sin \mathrm{W}, \\
\mathrm{k}=\sin \mathrm{W}_1 \sin \mathrm{W}_1' \sin \mathfrak{W}_1''=\sin \mathrm{W}_1 \sin \mathrm{W}_1'' \sin \mathfrak{W}_1'=\sin \mathrm{W}_1' \sin \mathrm{W}_1'' \sin \mathfrak{W}_1, \\
(\mathrm{k})=\sin \mathfrak{W}_1 \sin \mathfrak{W}_1' \sin \mathrm{W}_1''=\sin \mathfrak{W}_1 \sin \mathfrak{W}_1'' \sin \mathrm{W}_1'=\sin \mathfrak{W}_1' \sin \mathfrak{W}_1'' \sin \mathrm{W}_1,
\end{array}$$

ist, die (88. a.) in:

$$\left.\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{D}) \sin \mathrm{W}_1'' \sin \mathfrak{W}''=(\mathrm{C}_1')(\mathrm{C}_2'')-(\mathrm{C}_1'')(\mathrm{C}_2'), \\
\mp(\mathrm{D}') \sin \mathrm{W}_1' \sin \mathfrak{W}''=(\mathrm{C}')(\mathrm{C}_2'')-(\mathrm{C}'')(\mathrm{C}_2'), \\
\pm(\mathrm{D}'') \sin \mathrm{W}_1 \sin \mathfrak{W}''=(\mathrm{C}')(\mathrm{C}_1'')-(\mathrm{C}'')(\mathrm{C}_1'); \\
\mp(\mathrm{D}_1) \sin \mathrm{W}_1'' \sin \mathfrak{W}'=(\mathrm{C}_1)(\mathrm{C}_2'')-(\mathrm{C}_1'')(\mathrm{C}_2), \\
\pm(\mathrm{D}_1') \sin \mathrm{W}_1' \sin \mathfrak{W}'=(\mathrm{C})(\mathrm{C}_2'')-(\mathrm{C}'')(\mathrm{C}_2), \\
\mp(\mathrm{D}_1'') \sin \mathrm{W}_1 \sin \mathfrak{W}'=(\mathrm{C})(\mathrm{C}_1'')-(\mathrm{C}'')(\mathrm{C}_1); \\
\pm(\mathrm{D}_2) \sin \mathrm{W}_1'' \sin \mathfrak{W}=(\mathrm{C}_1)(\mathrm{C}_2')-(\mathrm{C}_1')(\mathrm{C}_2), \\
\mp(\mathrm{D}_2') \sin \mathrm{W}_1' \sin \mathfrak{W}=(\mathrm{C})(\mathrm{C}_2')-(\mathrm{C}')(\mathrm{C}_2), \\
\pm(\mathrm{D}_2'') \sin \mathrm{W}_1 \sin \mathfrak{W}=(\mathrm{C})(\mathrm{C}_1')-(\mathrm{C}')(\mathrm{C}_1);
\end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l}
\pm(\mathrm{C}) \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W}_1''=(\mathrm{D}_1')(\mathrm{D}_2'')-(\mathrm{D}_1'')(\mathrm{D}_2'), \\
\mp(\mathrm{C}') \sin \mathrm{W}' \sin \mathfrak{W}_1''=(\mathrm{D}')(\mathrm{D}_2'')-(\mathrm{D}'')(\mathrm{D}_2'), \\
\pm(\mathrm{C}'') \sin \mathrm{W} \sin \mathfrak{W}_1''=(\mathrm{D}')(\mathrm{D}_1'')-(\mathrm{D}'')(\mathrm{D}_1'); \\
\mp(\mathrm{C}_1) \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W}_1'=(\mathrm{D}_1)(\mathrm{D}_2'')-(\mathrm{D}_1'')(\mathrm{D}_2), \\
\pm(\mathrm{C}_1') \sin \mathrm{W}' \sin \mathfrak{W}_1'=(\mathrm{D})(\mathrm{D}_2'')-(\mathrm{D}'')(\mathrm{D}_2), \\
\mp(\mathrm{C}_1'') \sin \mathrm{W} \sin \mathfrak{W}_1'=(\mathrm{D})(\mathrm{D}_1'')-(\mathrm{D}'')(\mathrm{D}_1); \\
\pm(\mathrm{C}_2) \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W}_1=(\mathrm{D}_1)(\mathrm{D}_2')-(\mathrm{D}_1')(\mathrm{D}_2), \\
\mp(\mathrm{C}_2') \sin \mathrm{W}' \sin \mathfrak{W}_1=(\mathrm{D})(\mathrm{D}_2')-(\mathrm{D}')(\mathrm{D}_2), \\
\pm(\mathrm{C}_2'') \sin \mathrm{W} \sin \mathfrak{W}_1=(\mathrm{D})(\mathrm{D}_1')-(\mathrm{D}')(\mathrm{D}_1);
\end{array}\right\} \quad \textbf{(90. a.)}$$

die (88. b.) in:

$$\left.\begin{array}{l}
\pm(\varDelta) \sin \mathfrak{W}_1'' \sin \mathrm{W}''=(\Gamma_1')(\Gamma_2'')-(\Gamma_1'')(\Gamma_2'), \\
\mp(\varDelta') \sin \mathfrak{W}_1' \sin \mathrm{W}''=(\Gamma')(\Gamma_2'')-(\Gamma'')(\Gamma_2'), \\
\pm(\varDelta'') \sin \mathfrak{W}_1 \sin \mathrm{W}''=(\Gamma')(\Gamma_1'')-(\Gamma'')(\Gamma_1'); \\
\mp(\varDelta_1) \sin \mathfrak{W}_1'' \sin \mathrm{W}'=(\Gamma_1)(\Gamma_2'')-(\Gamma_1'')(\Gamma_2), \\
\pm(\varDelta_1') \sin \mathfrak{W}_1' \sin \mathrm{W}'=(\Gamma)(\Gamma_2'')-(\Gamma'')(\Gamma_2), \\
\mp(\varDelta_1'') \sin \mathfrak{W}_1 \sin \mathrm{W}'=(\Gamma)(\Gamma_1'')-(\Gamma'')(\Gamma_1);
\end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l}
\pm(\Gamma) \sin \mathfrak{W}'' \sin \mathrm{W}_1''=(\varDelta_1')(\varDelta_2'')-(\varDelta_1'')(\varDelta_2'), \\
\mp(\Gamma') \sin \mathfrak{W}' \sin \mathrm{W}_1''=(\varDelta')(\varDelta_2'')-(\varDelta'')(\varDelta_2'), \\
\pm(\Gamma'') \sin \mathfrak{W} \sin \mathrm{W}_1''=(\varDelta')(\varDelta_1'')-(\varDelta'')(\varDelta_1'); \\
\mp(\Gamma_1) \sin \mathfrak{W}'' \sin \mathrm{W}_1=(\varDelta_1)(\varDelta_2'')-(\varDelta_1'')(\varDelta_2), \\
\pm(\Gamma_1') \sin \mathfrak{W}' \sin \mathrm{W}_1'=(\varDelta)(\varDelta_2'')-(\varDelta'')(\varDelta_2), \\
\mp(\Gamma_1'') \sin \mathfrak{W} \sin \mathrm{W}_1'=(\varDelta)(\varDelta_1'')-(\varDelta'')(\varDelta_1);
\end{array}\right\} \quad \textbf{(90. b.)}$$

$$\left(\begin{array}{l} \pm(\Delta_2)\sin\mathfrak{W}''_1\sin W=(\Gamma_1)(\Gamma'_2)-(\Gamma'_1)(\Gamma_2),\\ \mp(\Delta'_2)\sin\mathfrak{W}'_1\sin W=(\Gamma)(\Gamma'_2)-(\Gamma')(\Gamma_2),\\ \pm(\Delta''_2)\sin\mathfrak{W}_1\sin W=(\Gamma)(\Gamma'_1)-(\Gamma')(\Gamma_1);\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \pm(\Gamma_2)\sin\mathfrak{W}''\sin W_1=(\Delta_1)(\Delta'_2)-(\Delta'_1)(\Delta_2),\\ \mp(\Gamma'_2)\sin\mathfrak{W}'\sin W_1=(\Delta)(\Delta'_2)-(\Delta')(\Delta_2),\\ \pm(\Gamma''_2)\sin\mathfrak{W}\sin W_1=(\Delta)(\Delta'_1)-(\Delta')(\Delta_1);\end{array}\right.$$

die (88. c.) in:

(90. c.)

$$\left\{\begin{array}{l} \pm D\sin\mathfrak{W}''_1\sin\mathfrak{W}''=\Gamma'_1\Gamma''_2-\Gamma''_1\Gamma'_2,\\ \mp D'\sin\mathfrak{W}'_1\sin\mathfrak{W}''=\Gamma'\Gamma''_2-\Gamma''\Gamma'_2,\\ \pm D''\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathfrak{W}''=\Gamma'\Gamma''_1-\Gamma''\Gamma'_1;\\[4pt] \mp D_1\sin\mathfrak{W}''_1\sin\mathfrak{W}'=\Gamma_1\Gamma''_2-\Gamma''_1\Gamma_2,\\ \pm D'_1\sin\mathfrak{W}'_1\sin\mathfrak{W}'=\Gamma\Gamma''_2-\Gamma''\Gamma_2,\\ \mp D''_1\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathfrak{W}'=\Gamma\Gamma''_1-\Gamma''\Gamma_1;\\[4pt] \pm D_2\sin\mathfrak{W}''_1\sin\mathfrak{W}=\Gamma_1\Gamma'_2-\Gamma'_1\Gamma_2,\\ \mp D'_2\sin\mathfrak{W}'_1\sin\mathfrak{W}=\Gamma\Gamma'_2-\Gamma'\Gamma_2,\\ \pm D''_2\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathfrak{W}=\Gamma\Gamma'_1-\Gamma'\Gamma_1;\end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \pm\Gamma\sin W''\sin W''_1=D'_1D''_2-D''_1D'_2,\\ \mp\Gamma'\sin W'\sin W''_1=D'D''_2-D''D'_2,\\ \pm\Gamma''\sin W\sin W''_1=D'D''_1-D''D'_1;\\[4pt] \mp\Gamma_1\sin W''\sin W'_1=D_1D''_2-D''_1D_2,\\ \pm\Gamma'_1\sin W'\sin W'_1=D\,D''_2-D''D_2,\\ \mp\Gamma''_1\sin W\sin W'_1=D\,D''_1-D''D_1;\\[4pt] \pm\Gamma_2\sin W''\sin W_1=D_1D'_2-D'_1D_2,\\ \mp\Gamma'_2\sin W'\sin W_1=D\,D'_2-D'D_2,\\ \pm\Gamma''_2\sin W\sin W_1=D\,D'_1-D'D_1;\end{array}\right.$$

und die (88. d.) in:

(90. d.)

$$\left\{\begin{array}{l} \pm\Delta\sin W''_1\sin W''=C'_1C''_2-C''_1C'_2,\\ \mp\Delta'\sin W'_1\sin W''=C'C''_2-C''C'_2,\\ \pm\Delta''\sin W_1\sin W''=C'C''_1-C''C'_1;\\[4pt] \mp\Delta_1\sin W''_1\sin W'=C_1C''_2-C''_1C_2,\\ \pm\Delta'_1\sin W'_1\sin W'=C\,C''_2-C''C_2,\\ \mp\Delta''_1\sin W_1\sin W'=C\,C''_1-C''C_1;\\[4pt] \pm\Delta_2\sin W''_1\sin W=C_1C'_2-C'_1C_2,\\ \mp\Delta'_2\sin W'_1\sin W=C\,C'_2-C'C_2,\\ \pm\Delta''_2\sin W_1\sin W=C\,C'_1-C'C_1;\end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} \pm C\sin\mathfrak{W}''\sin\mathfrak{W}''_1=\Delta'_1\Delta''_2-\Delta''_1\Delta'_2,\\ \mp C'\sin\mathfrak{W}'\sin\mathfrak{W}''_1=\Delta'\Delta''_2-\Delta''\Delta'_2,\\ \pm C''\sin\mathfrak{W}\sin\mathfrak{W}''_1=\Delta'\Delta''_1-\Delta''\Delta'_1;\\[4pt] \mp C_1\sin\mathfrak{W}''\sin\mathfrak{W}'_1=\Delta_1\Delta''_2-\Delta''_1\Delta_2,\\ \pm C'_1\sin\mathfrak{W}'\sin\mathfrak{W}'_1=\Delta\,\Delta''_2-\Delta''\Delta_2,\\ \mp C''_1\sin\mathfrak{W}\sin\mathfrak{W}'_1=\Delta\,\Delta''_1-\Delta''\Delta_1;\\[4pt] \pm C_2\sin\mathfrak{W}''\sin\mathfrak{W}_1=\Delta_1\Delta'_2-\Delta'_1\Delta_2,\\ \mp C'_2\sin\mathfrak{W}'\sin\mathfrak{W}_1=\Delta\,\Delta'_2-\Delta'\Delta_2,\\ \pm C''_2\sin\mathfrak{W}\sin\mathfrak{W}_1=\Delta\,\Delta'_1-\Delta'\Delta_1.\end{array}\right.$$

In den Gleichungen einer jeden der vorstehenden Gruppen, welche ein doppeltes Vorzeichen in sich aufgenommen haben, muss überall entweder das obere oder das untere genommen werden, je nachdem die beiden Coordinatensysteme, worauf sie sich beziehen, unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben, und da eine ganz einfache Betrachtung ausser Zweifel stellt, dass jedes aus den beiden Doppelsystemen herausgehobene Paar von einzelnen Systemen in sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf hat, so wie es ein einziges von diesen Paaren thut, so hat man in allen jenen Gleichungen gleichzeitig nur die obern oder nur die untern von den doppelten Vorzeichen zu nehmen, und ob die einen oder andern, weiss man, sobald man hinsichtlich eines einzigen von jenen Paaren einfacher Systeme sich überzeugt hat, ob dieses in sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf hat. Eben deswegen hat man es da, wo zu einem vorhandenen Systeme ein neues unbestimmtes hinzugefügt wird, schon durch die Benennung der neuen Axen in seiner Gewalt, in jenen Gleichungen nach Belieben die obern oder untern Vorzeichen eintreten zu lassen. Wir werden in solchen Fällen in der Regel die Bezeichnung der neuen Axen so gewählt voraussetzen, dass in den erwähnten Gleichungen die obern Vorzeichen genommen werden müssen.

Wir haben die Gleichungen (86. a.) bis (90. d.) in einem eigenen Paragraphen zusammengestellt, da sie den wichtigsten Theil des Apparates bilden, den der analytische Geometer,

welcher seine Untersuchungen am schiefwinkligen Systeme fortführen will, besitzen muss, weil er ohne ihn bei aller Geschicklichkeit sich doch nicht frei bewegen könnte, vielmehr an gar vielen Stellen wie von einem Netz umstrickt sich fühlen müsste. Mittelst dieser Gleichungen, welche lehren, wie sich die in den verschiedenen einfachen Systemen der beiden Doppelsysteme möglichen Projectionszahlen in einander überführen lassen, kann man fast alle frühern, und insbesondere die so wichtigen Uebertragungsformeln, welche von (59. a.) bis (62. b.) stehen, auf die mannigfaltigste Weise abändern.

§. 4.

Besondere Lagen der Richtungen oder Puncte.

47) Indem wir jetzt den besonderen Lagen der Richtungen und Puncte im beliebigen Coordinatensysteme unsere Aufmerksamkeit schenken, machen wir darauf aufmerksam, dass jede der Grundaxen sowohl als der Polaraxen eines Coordinatensystems sich von der andern, unserer bisherigen Bezeichnungsweise zur Folge, in Nichts unterscheidet, als dass dem Buchstaben, der in ihrem Zeichen noch ausser der Coordinatenspitze A vorkommt, eine andere Anzahl von Accenten beigelegt wird, während die zusammengehörigen Grund- und Polaraxen Accente in gleicher Anzahl an sich tragen; alle auf eine der Axen sich beziehenden Projectionszahlen oder Coordinaten aber tragen in ihrem Zeichen eben so viele Accente wie diese Axen, während ihr Grundzeichen bei jeder der drei Axen einer jeden Art stets das gleiche bleibt. Da wo in die Betrachtung neben dem bereits vorhandenen noch ein zweites, als neu hinzugekommen gedachtes, Coordinatensystem aufgenommen wird, lassen wir die gleiche Bezeichnungsweise auch bei diesem noch fortbestehen, und wenn die Axen des einen Systems hinsichtlich ihrer Richtungen auf die Axen des andern Systems bezogen werden sollen, geben wir allen dabei auftretenden Projectionszahlen einerlei Grundzeichen mit Accenten in solcher Anzahl, als die Axe, worauf sie sich beziehen, hat; ausserdem hängen wir aber noch diesem Grundzeichen diejenige Zahl als Index an, welche die Anzahl der Accente von derjenigen Axe ausspricht, deren Richtung auf das andere System bezogen wird. Es ist eine nothwendige Folge von dieser Bezeichnungsweise, dass jedes Resultat, an welchem die eine Axe des Systems einen andern Antheil nimmt, als die beiden andern, oder da, wo gleichzeitig mehrere Systeme in die Betrachtung aufgenommen werden, die mit gleichen Abzeichen versehenen eines jeden Systems einen andern Antheil, als die zwei mit anderen Abzeichen versehenen, während diese letztern an der Untersuchung einen völlig gleichen Antheil nehmen, einfach dadurch in dasjenige Resultat übergeführt werden kann, welches man erhielte, wenn der ungleichmässige Antheil an der Untersuchung auf eine andere Axe übergetragen würde, dass man die Zahlen der, diesen beiderlei Axen entsprechenden Accente oder Indexe wechselseitig in allen vorkommenden Zeichen mit einander vertauscht. Um in einem solchen Falle die Art der Vertauschung kurz anzeigen zu können, werden wir sie eine Vertauschung der ersten Art nennen, wenn bei allen Zeichen, wo sich kein Accent vorfindet, einer und, wo sich einer vorfindet, keiner gesetzt werden soll, oder, wenn die gleiche Verwechselung bei solchen Zeichen, die Indexe in sich aufnehmen, auch auf die Zahlen 0 und 1 der Indexe sich zu erstrecken hat; hingegen werden wir sie eine Vertauschung der zweiten Art nennen, wenn bei allen Zeichen, die keinen Accent haben, zweie, und bei allen solchen Zeichen, die zwei Accente an sich tragen, keiner gesetzt werden soll, oder, wenn die gleiche Verwechselung bei solchen Zeichen, die Indexe in sich aufnehmen, auf

die Indexzahlen 0 und 2 sich zu erstrecken hat; endlich werden wir sie eine **Vertauschung der dritten Art** nennen, wenn überall, wo die Zeichen einen Accent haben, zweie, und wo die Zeichen zweie haben, einer gesetzt werden soll, oder, wenn die gleiche Verwechselung bei solchen Zeichen, die Indexe in sich tragen, auf die Indexzahlen 1 und 2 sich zu erstrecken hat. Dabei werden wir sagen, die Vertauschung sei an den Accenten, oder an den Indexen, oder an beiden zugleich vorzunehmen, je nachdem die Verwechselung sich blos über die Accente, oder blos über die Indexe, oder über beide zugleich erstrecken soll.

Bei diesen dreierlei Vertauschungsarten hat man jedoch, wenn man nicht zu falschen Resultaten gelangen will, auf jene Abweichungen ein besonderes Augenmerk zu richten, welche Folgen der für Axenwinkel eingeführten besondern Bezeichnungsweise sind. Die Axenwinkel W, W′, W″ z. B. müssten nämlich im Sinne der allgemeinen Bezeichnungsweise eigentlich immer durch XAX′, XAX″, X′AX″ vorgestellt werden, und diese gehen durch eine Vertauschung der ersten Art in X′AX, X′AX″, XAX″ oder W, W″, W′ über, bei einer Vertauschung der zweiten Art in X″AX′, X″AX, X′AX oder W″, W′, W, bei einer Vertauschung der dritten Art in XAX″, XAX′, X″AX′ oder W′, W, W″. Man darf daher bei den hier angezeigten Abänderungen nie übersehen, dass eine Vertauschung der ersten Art

W′ in W″ und W″ in W′

umwandelt, während sie W unverändert lässt; dass eine Vertauschung der zweiten Art

W in W″ und W″ in W

umwandelt, während sie W′ ungeändert lässt; endlich dass eine Vertauschung der dritten Art

W in W′ und W′ in W

umwandelt, während sie W″ ungeändert fortbestehen lässt, woraus man sieht, dass nur bei einer Vertauschung der zweiten Art auch die gleiche an den Accenten der Axenwinkel vorgenommen werden darf, dass hingegen bei einer Vertsuschung der ersten Art die Accente der Axenwinkel eine Vertauschung der dritten Art erfahren müssen, und umgekehrt bei einer Vertauschung der dritten Art eine der ersten Art. Das Aehnliche gilt natürlich auch eben so von den Axenwinkeln W_1, W_1', W_1'', welche dem neu eingeführten Systeme angehören, und von denen 𝔚, 𝔚′, 𝔚″ oder $𝔚_1$, $𝔚_1'$, $𝔚_1''$, welche den zu diesen Grundsystemen gehörigen Polarsystemen entsprechen.

Die Bekanntschaft mit den hier angeregten Vertauschungsarten, und insbesondere die Leichtigkeit, womit man die Umstände, wodurch die eine oder die andere herbeigeführt wird, zu beurtheilen im Stande ist, sind für die analytische Geometrie im beliebigen Coordinatensysteme von besonderer Wichtigkeit, weil man durch sie in den Stand gesetzt wird, die Anzahl aller Formeln auf weniger als ein Drittheil derselben zu beschränken, was hier, wo ohnehin ein so grosser Formenreichthum herrscht, eine keineswegs zu verachtende Erleichterung verschafft.

48) Wir haben oben in Nr. 14. gesehen, dass, wenn x, x′, x″ und x_1, x_1', x_1'' die schiefen, u, u′, u″ und u_1, u_1', u_1'' die senkrechten Coordinaten zweier Puncte O und O_1 an den Axen AX, AX′, AX″ sind, und man durch a, a′, a″ die schiefen, durch c, c′, c″ die senkrechten Projectionszahlen der von O nach O_1 hinzielenden Richtung an denselben Axen, so wie durch r die Entfernung der beiden Puncte O und O_1 von einander bezeichnet, stets sei:

$$\frac{x_1 - x}{r} = a,\quad \frac{x_1' - x'}{r} = a',\quad \frac{x_1'' - x''}{r} = a'' \quad\text{und}\quad \frac{u_1 - u}{r} = c,\quad \frac{u_1' - u'}{r} = c',\quad \frac{u_1'' - u''}{r} = c''.$$

Liegen nun die beiden Puncte O und O_1

I) in der dem Grundsysteme angehörigen Coordinatenebene $X'AX''$, so ist für jeden dieser Puncte dessen zur Axe AX gehörige schiefe Coordinate null, d. h. es ist $x=0$ und $x_1=0$, was $a=0$ zur Folge hat; es ist also die schiefe Projectionszahl, welche eine in der Coordinatenebene $X'AX''$ liegende Richtung an der Axe AX giebt, immer null. Es wird aber diese Projectionszahl, wie die erste der im Eingang dieser Nummer mitgetheilten Gleichungen zeigt, nicht blos dann null, wenn $x=0$ und $x_1=0$ ist, sondern schon, wenn nur $x=x_1$ ist, und diess ist der Fall, wenn die beiden Puncte O und O_1 in einer Ebene liegen, die mit der Coordinatenebene $X'AX''$ parallel läuft, oder, was dasselbe sagt, wenn die durch O und O_1 gehende Richtung mit der genannten Coordinatenebene parallel ist; und umgekehrt zieht $a=o$ die andere Gleichung $x=x_1$ nach sich, und diese letztere giebt zu erkennen, dass die Puncte O und O_1 in einer mit der Coordinatenebene $X'AX''$ parallelen Ebene liegen, oder dass die durch O und O_1 hindurch gehende Richtung mit dieser Coordinatenebene parallel sei. Es ist mithin

$$a=0 \qquad \textbf{(91. a.)}$$

das vollständige Kennzeichen, dass die Richtung, auf welche sich die in dieser Gleichung auftretende Projectionszahl bezieht, mit der Coordinatenebene $X'AX''$ parallel laufe, so wie umgekehrt die Gleichung (91. a.) alle Resultate in sich schliesst, welche die mit $X'AX''$ parallele Lage der in der Gleichung enthaltenen Richtung nach sich zieht. Durch diese Gleichung nimmt aber die allgemeine Richtungsgleichung (11) hier die besondere Gestalt

$$1=a'c'+a''c'' \qquad \textbf{(91. b.)}$$

an, und die Gleichungen (12) gehen durch sie über in:

$$c=a'\cos W+a''\cos W', \quad c'=a'+a''\cos W'', \quad c''=a'\cos W''+a'', \qquad \textbf{(91. c.)}$$

während durch sie die Gleichungen (47. a.) sich verwandeln in:

$$0=\mathfrak{A}c+\mathfrak{A}'c'+\mathfrak{A}''c'', \quad \mathfrak{C}_1'a'=\mathfrak{A}_1c+\mathfrak{A}_1'c'+\mathfrak{A}_1''c'', \quad \mathfrak{C}_2''a''=\mathfrak{A}_2c+\mathfrak{A}_2'c'+\mathfrak{A}_2''c'', \qquad \textbf{(91. d.)}$$

von welchen letzteren die erste eine Abhängigkeit anzeigt, die zwischen den zu einer solchen Richtung gehörigen senkrechten Projectionszahlen statt findet, wie die (91. a.) es für die schiefen Projectionszahlen thut. Eliminirt man aus den Gleichungen (91. d.) die Grösse c, so findet man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1'a'=(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1'-\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1)c'+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1''-\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1)c'' \text{ und } \mathfrak{A}\mathfrak{C}_2''a''=(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2'-\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_2)c'+(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_2''-\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_2)c''$$

und diese nehmen unter Beiziehung der für das Polarsystem erhaltenen Relationen (41) und (45. a. bis c.) die einfachere Form

$$a'\sin^2 W''=c'-c''\cos W'' \quad \text{und} \quad a''\sin^2 W''=c''-c'\cos W'' \qquad \textbf{(91. e.)}$$

an, welche letztere sich noch bequemer aus denen (91. c.) herholen lassen. Liegen hingegen die beiden Puncte O und O_1

II) in der dem Polarsysteme zugehörigen Coordinatenebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, so ist für jeden dieser Puncte dessen zur Grundaxe AX gehörige senkrechte Coordinate null, d. h. es ist $u=0$ und $u_1=0$, was $c=0$ zur Folge hat; es ist also die senkrechte Projectionszahl, welche eine in der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ liegende Richtung an der Grundaxe AX giebt, immer null. Diese Projectionszahl wird aber, wie die vierte von den im Eingang zu dieser Nummer mitgetheilten Gleichungen zeigt, nicht nur dann null, wenn $u=0$ und $u_1=0$ ist, sondern schon, wenn $u=u_1$ ist, und diess ist der Fall, wenn die beiden Puncte O und O_1 in einer mit der $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallelen Ebene liegen, oder, was das Gleiche sagt, wenn die durch O und O_1 hindurch gehende Richtung mit der genannten Polarcoordinatenebene parallel läuft; und umgekehrt zieht die Gleichung $c=0$ die andere $u=u_1$ nach sich, und diese letztere giebt zu erkennen, dass

die Puncte O und O_1 in einer mit der $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallelen Ebene liegen, oder dass die durch O und O_1 hindurch gehende Richtung mit dieser Polarcoordinatenebene parallel laufe. Es ist mithin

(92. a.) $$c = 0$$

das vollständige Kennzeichen, dass die Richtung, worauf sich die in dieser Gleichung auftretende Projectionszahl bezieht, mit der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel laufe, so wie umgekehrt die Gleichung (92. a.) alle Resultate in sich schliesst, welche die mit $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallele Lage der in der Gleichung enthaltenen Richtung nach sich zieht. Durch diese Gleichung wird aber die allgemeine Richtungsgleichung (11) wieder:

(92. b.) $$1 = a'c' + a''c'';$$

die Gleichungen (12) gehen durch sie über in:

(92. c.) $$o = a + a'\cos W + a''\cos W', \quad c' = a\cos W + a' + a''\cos W'', \quad c'' = a\cos W' + a'\cos W'' + a'',$$

während die (47. a.) sich verwandeln in:

(92. d.) $$\mathfrak{C}\,a = \mathfrak{A}'c' + \mathfrak{A}''c'', \quad \mathfrak{C}_1'a' = \mathfrak{A}_1'c' + \mathfrak{A}_1''c'', \quad \mathfrak{C}_2''a'' = \mathfrak{A}_2'c' + \mathfrak{A}_2''c''.$$

Die erste der Gleichungen (92. c.) giebt eine Abhängigkeit zu erkennen, welche zwischen den schiefen Projectionszahlen einer solchen Richtung statt findet, und ist für diese schiefen Projectionszahlen, was die (92. a.) für die senkrechten ist. Eliminirt man mit ihrer Hilfe die Grösse a aus den beiden andern Gleichungen, so findet man unter Beiziehung der Gleichungen (38)

$$c' = \sin W\,(a'\sin W - a''\sin W'\cos \mathfrak{W}''), \quad c'' = \sin W'(a''\sin W' - a'\sin W\cos \mathfrak{W}''),$$

denen man auch mit Rücksicht auf die Gleichungen (45. a.) und (41) die andere Form geben kann:

(92. e.) $$c' = h\sin W\,(\mathfrak{A}_2''a' - \mathfrak{A}_2'a''), \quad c'' = h\sin W'\,(\mathfrak{A}_1'a'' - \mathfrak{A}_1''a'),$$

welche letztern Gleichungen man auch unmittelbar aus den zwei letzten Gleichungen (92. d.) herholen kann.

Wäre die Richtung nicht, wie in I) oder II) angenommen worden ist, mit der Grund- oder Polarcoordinatenebene $X'AX''$ oder $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel, sondern wäre sie mit der XAX'' oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, oder mit der XAX' oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallel, so erhielte man die hierher gehörigen Formeln aus den in I) oder II) angegebenen durch eine Vertauschung der ersten oder zweiten Art. In allen diesen Formeln kann man übrigens auch an die Stelle der Projectionszahlen mittelst der im Eingang zu dieser Nummer mitgetheilten Gleichungen die Differenzen von den gleichartigen Coordinaten zweier Puncte setzen, durch die eine solche Richtung hindurch geht, und aus diesen Differenzen verschwinden die Coordinaten des einen Punctes, wenn derselbe in der Coordiaatenspitze liegt, d. h. wenn jene Richtung in einer der genannten Grund- oder Polarcoordinatenebenen liegt und zugleich durch die Coordinatenspitze hindurch geht.

Wenn eine Richtung parallel mit der Grundcoordinatenebene $X'AX''$ läuft, so steht sie auch senkrecht auf der Polaraxe $A\mathfrak{X}$, und sie steht senkrecht auf der Grundaxe AX, wenn sie parallel mit der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ läuft, welche zwei Sätze auch umgekehrt werden können; daher sind die in dieser Nummer enthaltenen auch noch bei solchen Richtungen anwendbar, welche senkrecht auf einer der Grund- oder Polaraxen stehen.

49) Fassen wir die in der vorigen Nummer von einem beliebigen Puncte O nach einem andern beliebigen O_1 hingehende Richtung OO_1 ins Auge, und lassen wir die dort eingeführten Bezeichnungen hier wieder gelten; bedingen wir aber die Lage dieser Richtung dahin,

I) dass sie mit der Grundaxe A X parallel sein soll, so zieht diess, weil jetzt die Richtung OO_1 sowohl mit der Coordinatenebene XAX', als mit der XAX'' parallel läuft, den Ergebnissen der vorigen Nummer gemäss die beiden Gleichungen

$$a' = 0 \quad \text{und} \quad a'' = 0 \tag{93. a.}$$

nach sich, so wie umgekehrt das gleichzeitige Bestehen dieser beiden Gleichungen das Parallelsein der Richtung, auf welche sich die Gleichungen beziehen, mit der Axe A X zur Folge hat. Durch diese Gleichungen geht aber die allgemeine Richtungsgleichung (11) über in:

$$1 = ac, \tag{93. b.}$$

die Gleichungen (12) werden ihnen gemäss:

$$c = a, \quad c' = a\cos W, \quad c'' = a\cos W' \tag{93. c.}$$

und die Gleichungen (47. a.) verwandeln sich durch sie in:

$$\mathfrak{E}a = \mathfrak{A}c + \mathfrak{A}'c' + \mathfrak{A}''c'', \quad 0 = \mathfrak{A}_1c + \mathfrak{A}'_1c' + \mathfrak{A}''_1c'', \quad 0 = \mathfrak{A}_2c + \mathfrak{A}'_2c' + \mathfrak{A}''_2c'', \tag{93. d.}$$

von welchen die zwei letzten jene Abhängigkeiten aussprechen, welche zwischen den senkrechten Projectionszahlen einer so bedingten Richtung statt finden, und in Bezug auf die senkrechten Projectionszahlen dasselbe sind, was die (93. a.) in Bezug auf die schiefen. Eliminirt man aus der ersten Gleichung (93. d.) die Grössen c' und c'', Oder c und c'', oder c und c', so gelangt man wieder zu den Gleichungen (93. c.). Die Gleichung (93. b.) in Verbindung mit der ersten (93. c.) zeigt, dass in diesem Falle

$$a = c = \pm 1 \tag{93. e.}$$

ist, wo für a und c zu gleicher Zeit entweder das Vorzeichen $+$ oder das $-$ genommen werden muss.

Bedingt man aber die Richtung OO_1 dahin

II) dass sie mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}$, oder gleichzeitig mit den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ parallel sein soll, so zieht diess, den Ergebnissen der vorigen Nummer gemäss, die beiden Gleichungen

$$c' = 0 \quad \text{und} \quad c'' = 0 \tag{94. a.}$$

nach sich, so wie umgekehrt das gleichzeitige Bestehen dieser zwei Gleichungen das Parallelsein der Richtung, auf welche sich die Gleichungen beziehen, mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}$ zur Folge hat. Durch diese beiden Gleichungen geht die allgemeine Richtungsgleichung (11) über in:

$$1 = ac, \tag{94. b.}$$

die Gleichungen (12) werden ihnen gemäss:

$$c = a + a'\cos W + a''\cos W', \quad 0 = a\cos W + a' + a''\cos W'', \quad 0 = a\cos W' + a'\cos W'' + a'', \tag{94. c.}$$

und die Gleichungen (47. a.) verwandeln sich durch sie in:

$$\mathfrak{E}a = \mathfrak{A}c, \quad \mathfrak{E}'_1a' = \mathfrak{A}_1c, \quad \mathfrak{E}''_2a'' = \mathfrak{A}_2c. \tag{94. d.}$$

Die zwei letzten der Gleichungen (94. c.) sprechen eine Abhängigkeit zwischen den schiefen Projectionszahlen einer solchen Richtung aus, und sind in Bezug auf schiefe das, was die (94. a.) in Bezug auf senkrechte Projectionszahlen sind. Eliminirt man mittelst der zwei letzten Gleichungen (94. c.) aus der ersten die Grössen a' und a'' oder die a und a'' oder die a und a', so stösst man unter Berücksichtigung der für das Polarsystem erhaltenen Relationen wieder auf die Gleichungen (94. d.). Die Gleichung (94. b.) in Verbindung mit der ersten (94. d.) liefert, weil zufolge der Gleichungen (34) $\mathfrak{A}\mathfrak{E} = 1$ ist:

$$a = \pm\mathfrak{A} \quad \text{und} \quad c = \pm\mathfrak{E}, \tag{94. e.}$$

wo in beiden Fällen entweder nur das obere oder nur das untere Vorzeichen zu nehmen ist.

Die Kennzeichen der parallelen Lage der Richtung $O\,O_1$ mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}'$ oder $A\mathfrak{X}''$ ergeben sich aus den vorstehenden durch eine Vertauschung der ersten oder zweiten Art.

Bedingt man ferner die Richtung $O\,O_1$ dahin,

III. a.) dass sie gleichzeitig parallel mit den nicht zusammengehörigen Grund- und Polarcoordinatenebenen XAX' und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, oder, was dasselbe sagt, parallel mit deren Durchschnitt laufen soll, so zieht diess, den Ergebnissen der vorigen Nummer gemäss, die beiden Gleichungen

$$a'' = 0 \quad \text{und} \quad c = 0 \tag{95. a.}$$

nach sich, so wie umgekehrt das gleichzeitige Bestehen dieser zwei Gleichungen das Parallelsein der Richtung, auf welche sich die Gleichungen beziehen, mit dem Durchschnitt der zwei Ebenen XAX' und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ zur Folge hat. Durch diese beiden Gleichungen geht die allgemeine Richtungsgleichung (11) über in:

$$1 = a'c', \tag{95. b.}$$

die Gleichungen (12) werden ihnen gemäss:

$$0 = a + a'\cos W, \quad c' = a\cos W + a', \quad c'' = a\cos W' + a'\cos W'', \tag{95. c.}$$

und die Gleichungen (47. a.) verwandeln sich durch sie in:

$$\mathfrak{C}\,a = \mathfrak{A}'c' + \mathfrak{A}''c'', \quad \mathfrak{C}_1 a' = \mathfrak{A}_1' c' + \mathfrak{A}_1'' c'', \quad 0 = \mathfrak{A}_2' c' + \mathfrak{A}_2'' c''. \tag{95. d.}$$

Die erste der Gleichungen (95. c.) giebt eine Abhängigkeit zwischen den schiefen, die letzte der Gleichungen (95. d.) eine Abhängigkeit zwischen den senkrechten Projectionszahlen einer solchen Richtung zu erkennen, und diese Abhängigkeiten sind wesentlich dieselben, wie die in (95. a.) von den Projectionszahlen der entgegengesetzten Art ausgesprochenen. Sucht man aus den Gleichungen (95. c.) oder (95. d.) in Verbindung mit der (95. b.) alle der Richtung $O\,O_1$ angehörigen Projectionszahlen auf, so findet man:

$$a = \pm \operatorname{cotg} W, \quad a' = \mp \frac{1}{\sin W} \quad \text{und} \quad c'' = \pm \sin W' \cos \mathfrak{W}'', \quad c' = \mp \sin W \tag{95. e.}$$

wo überall nur die obern oder nur die untern Vorzeichen zu nehmen sind. Hätte man hingegen die Richtung $O\,O_1$ dahin bedingt,

III. b) dass sie gleichzeitig parallel mit den wechselnden Grund- und Polarcoordinatenebenen $X'AX''$ und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$, oder parallel mit deren Durchschnitt werden soll, so ergeben sich die hierher gehörigen Formeln aus denen in III. a) durch eine gleichzeitig über die Grund- und Polaraxen sich erstreckende Vertauschung der zweiten Art; sie sind nämlich:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad c'' = 0, \tag{95. α.}$$

$$1 = a'c', \tag{95. β.}$$

$$c = a'\cos W + a''\cos W', \quad c' = a' + a''\cos W'', \quad 0 = a'\cos W'' + a'', \tag{95. γ.}$$

$$0 = \mathfrak{A}\,c + \mathfrak{A}'c', \quad \mathfrak{C}_1 a' = \mathfrak{A}_1 c + \mathfrak{A}_1' c', \quad \mathfrak{C}_2 a'' = \mathfrak{A}_2 c + \mathfrak{A}_2' c', \tag{95. δ.}$$

$$a'' = \pm \operatorname{cotg} W'', \quad a' = \mp \frac{1}{\sin W''} \quad \text{und} \quad c = \pm \sin W' \cos \mathfrak{W}, \quad c' = \mp \sin W'', \tag{95. ε.}$$

wo die gleichbezeichneten, mit analogen Buchstaben versehenen Gleichungszeichen in beiden Fällen die einander entsprechenden Gleichungen bezeichnen, und es darf auch in diesen Gleichungen wieder nur entweder überall das obere oder überall das untere Vorzeichen genommen werden.

Würde man an die Richtung $O\,O_1$ die Bedingung stellen, dass sie gleichzeitig parallel laufen soll mit den Ebenen XAX' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ oder mit denen XAX'' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$, so bekäme man die hierher gehörigen Formeln durch eine Vertauschung der ersten Art im erstern Falle der Formeln in III. a), im andern Falle der in III. b) enthaltenen; oder verlangte man von jener

Richtung, dass sie mit den Ebenen XAX'' und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ oder mit denen $X'AX''$ und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ parallel laufen soll, so ergäben sich die dahin gehörigen Formeln im ersten Falle aus den in III. a), im andern Falle aus den in III. b) enthaltenen durch eine Vertauschung der dritten Art.

Bedingt man endlich die Richtung OO_1 dahin,

IV) dass sie gleichzeitig mit den zusammen gehörigen Grund- und Polarcoordinatenebenen $X'AX''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, oder, was dasselbe sagt, mit deren Durchschnitt parallel laufen soll, so zieht diess, den Ergebnissen der vorigen Nummer gemäss, die beiden Gleichungen

$$a = 0 \quad \text{und} \quad c = 0 \tag{96. a.}$$

nach sich, so wie umgekehrt das gleichzeitige Bestehen dieser zwei Gleichungen das Parallelsein der Richtung, auf welche sich diese Gleichungen beziehen, mit dem Durchschnitt der Ebenen $X'AX''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ zur Folge hat. Durch diese beiden Gleichungen geht die allgemeine Richtungsgleichung (11) über in:

$$1 = a'c' + a''c'', \tag{96. b.}$$

die Gleichungen (12) werden ihnen zufolge:

$$0 = a'\cos W + a''\cos W', \quad c' = a' + a''\cos W'', \quad c'' = a'\cos W'' + a'' \tag{96. c.}$$

und die Gleichungen (47. a.) verwandeln sich durch sie in:

$$0 = \mathfrak{A}'c' + \mathfrak{A}''c'', \quad \mathfrak{C}_1' a' = \mathfrak{A}_1' c' + \mathfrak{A}_1'' c'', \quad \mathfrak{C}_2'' a'' = \mathfrak{A}_2' c' + \mathfrak{A}_2'' c''. \tag{96. d.}$$

Die erste der Gleichungen (96. c.) giebt eine Abhängigkeit zwischen den schiefen Projectionszahlen einer solchen Richtung zu erkennen, welche mit dem übereinkommt, was die zweite Gleichung (96. a.) von den senkrechten Projectionszahlen einer solchen Richtung aussagt, und ähnlich verhalten sich die ersten Gleichungen (96. a.) und (96. d.) zu einander. Man kann sowohl aus den Gleichungen (96. c.) wie aus denen (96. d.) die sämmtlichen der Richtung OO_1 angehörigen Projectionszahlen finden und erhält so:

$$a' = \frac{\cos W'}{H}, \quad a'' = -\frac{\cos W}{H} \quad \text{und} \quad c'' = \frac{h}{H}\operatorname{cotg}\mathfrak{W}, \quad c' = -\frac{h}{H}\operatorname{cotg}\mathfrak{W}', \tag{96. e.}$$

wo der Kürze wegen

$$\sin^2 W'' - h^2 = H^2 \tag{96. f.}$$

gesetzt worden ist, und für H in allen diesen Gleichungen entweder nur sein positiver oder nur sein negativer Wurzelwerth genommen werden darf.

Hätte man von der Richtung OO_1 verlangt, dass sie gleichzeitig mit den Ebenen XAX'' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, oder mit denen XAX' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallel laufen soll, so erhält man die dahin gehörigen Formeln aus den vorstehenden, im ersten Falle durch eine Vertauschung der ersten Art, im andern Falle durch eine Vertauschung der zweiten Art, wobei man indessen nicht übersehen darf, dass diese Vertauschung sich auch über die neu eingeführte Grösse H zu erstrecken hat, und dass die Bedeutung von H' und H'' durch die Gleichungen

$$\sin^2 W' - h^2 = H'^2, \quad \sin^2 W - h^2 = H''^2 \tag{96. g.}$$

gegeben wird, nach dem, was in Nr. 47. über die Veränderungen gesagt worden ist, die den Axenwinkeln aus solchen Vertauschungen entspringen.

50) Wir verlassen diese Stelle nicht, ohne zuvor auf die sehr verschiedenen Formen aufmerksam gemacht zu haben, unter denen die Ausdrücke H, H', und H'' sich zeigen können, und die an Mannigfaltigkeit denen des Ausdrucks h, der in den Gleichungen (40), (42), (44) und (50. a.) in sehr verschiedener Gestalt sich zeigt, nichts nachgeben. Dabei können wir uns auf den einen Ausdruck H beschränken, da die H' und H'' aus diesem sich durch eine blose

Vertauschung der ersten oder zweiten Art entnehmen lassen, und selbst da sind wir gezwungen, nur einige von seinen möglichen Formen anzugeben. Setzt man in der Gleichung (96. f.), wodurch der Ausdruck H^2 bestimmt worden ist, für h^2 seinen durch die erste der Gleichungen (50. a.) gegebenen Werth, so findet man:

(97. a.) $-\sin W''(\sin W'\cos W\cos \mathfrak{W}+\sin W\cos W'\cos \mathfrak{W}')=H^2$, welcher mit Zuziehung der Gleichungen (38) übergeht in: $\cos^2 W+\cos^2 W'-2\cos W\cos W'\cos W''=H^2$.

Dividirt man die H^2 bestimmende Gleichung (96. f.) mit h^2, wodurch sie wird

$$\frac{\sin^2 W''}{h^2}-1=\frac{H^2}{h^2}$$

und setzt man auf der linken Seite dieser letzten Gleichung für h^2, den Gleichungen (42) gemäss, einmal $\sin^2 W''\sin^2 W'\sin^2 \mathfrak{W}$, ein andermal $\sin^2 W''\sin^2 W\sin^2 \mathfrak{W}'$, so kommt:

(97. b.) $\frac{h^2}{\sin^2 W'}\left(\frac{1}{\sin^2 \mathfrak{W}}-\sin^2 W'\right)=\frac{h^2}{\sin^2 W}\left(\frac{1}{\sin^2 \mathfrak{W}'}-\sin^2 W\right)=H^2$, welche nach einer leicht anzubringenden Umformung wird: $\frac{h^2}{\sin^2 W'}(\operatorname{cotg}^2 \mathfrak{W}+\cos^2 W')=\frac{h^2}{\sin^2 W}(\operatorname{cotg}^2 \mathfrak{W}'+\cos^2 W)=H^2$.

Ferner ist:

(97. c.) $h^2\operatorname{cotg}^2 \mathfrak{W}+\sin^2 W''\cos^2 W'=h^2\operatorname{cotg}^2 \mathfrak{W}'+\sin^2 W''\cos^2 W=H^2$ oder $\sin^2 W''(\sin^2 W'\cos^2 \mathfrak{W}+\cos^2 W')=\sin^2 W''(\sin^2 W\cos^2 \mathfrak{W}'+\cos^2 W)=H^2$,

wie man sogleich einsieht, wenn man in diesen Gleichungen für $\sin W''\sin W'\cos \mathfrak{W}$ und $\sin W''\sin W\cos \mathfrak{W}'$ ihre durch die Gleichungen (42) gegebenen Werthe setzt. Ferner kann man deu Ausdruck H^2 noch durch die folgenden Gleichungen darstellen:

(97. d.) $\frac{h}{\operatorname{cotg} \mathfrak{W}''}(\operatorname{cotg} \mathfrak{W}\operatorname{cotg} \mathfrak{W}'-\cos W\cos W')=H^2$, oder $h\sin \mathfrak{W}''\left(\frac{1}{\sin \mathfrak{W}\sin \mathfrak{W}'}-\sin W\sin W'\right)=H^2$,

von denen die letzte aus der vor ihr stehenden dadurch hervorgeht, dass man in dieser für $\cos W\cos W'$ seinen durch die letzte Gleichung (38) gegebenen Werth einsetzt, und für $\cos \mathfrak{W}\cos \mathfrak{W}'$ seinen aus derselben auf das Polarsystem übergetragenen Gleichung zu erhaltenden Werth; um aber die Richtigkeit dieser letzten Gleichung einzusehen, schreibe man ihre linke Seite so:

$$h\sin \mathfrak{W}''\,\frac{1-\sin W\sin W'\sin \mathfrak{W}\sin \mathfrak{W}'}{\sin \mathfrak{W}\sin \mathfrak{W}'},$$

und setze in diesen Ausdruck, den Gleichungen (42) gemäss, für $\sin W\sin \mathfrak{W}'$ und $\sin W'\sin \mathfrak{W}$ den Quotienten $\frac{h}{\sin W''}$, so wird er mit Rücksichtnahme auf die Gleichungen (43):

$$h\,\frac{\sin^2 W''-h^2}{\sin W''\sin W\sin \mathfrak{W}'},$$

und dieser geht nun mittelst eines Blickes auf die Gleichungen (42) sogleich über in:

$$\sin^2 W''-h^2,$$

was eben der Ausdruck H^2 ist. Schliesslich wollen wir noch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sin^2 W''}{\cos W''}\cos W\cos W' - \frac{h^2}{\cos W''}\operatorname{cotg}\mathfrak{W}\operatorname{cotg}\mathfrak{W}' = H^2\\ \text{und}\quad&\\ &\frac{\sin^2 W''}{\cos W''}(\cos W\cos W' - \sin W\sin W'\cos\mathfrak{W}\cos\mathfrak{W}') = H^2\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots\quad (97.\ e.)$$

mittheilen, von denen sich die eine leicht in die andere mit Zuziehung der Gleichungen (42) überführen lässt, und deren Richtigkeit man sogleich gewahr wird, wenn man in der letzten für $\sin W''\sin W\cos\mathfrak{W}'$ und $\sin W''\sin W'\cos\mathfrak{W}$ deren Werthe aus den Gleichungen (38) schreibt. Manche von den hier für H^2 gegebenen Formen liegen so weit von einander ab, dass die unmittelbare Ueberführung der einen in die andere nicht ohne einige Schwierigkeit geschehen kann.

51) Wir haben in der Nr. 48. die Eigenthümlichkeiten der Projectionszahlen einer Richtung $O O_1$, die mit einer der Grund- oder Polarcoordinatenebenen parallel läuft, kennen gelernt; jetzt wollen wir die Relationen aufsuchen, welche zwischen den Projectionszahlen der Richtung $O O_1$ statt finden müssen, wenn diese in irgend einer bestimmt gegebenen Ebene liegen oder damit parallel laufen soll. Ist die Lage dieser Ebene

I) durch zwei nicht parallele Richtungen gegeben, deren schiefe und senkrechte, an den Axen AX, AX', AX'' des Coordinatensystems sich bildende, Projectionszahlen bei der einen durch A, A', A'' und C, C', C'', bei der andern durch A_1, A_1', A_1'' und C_1, C_1', C_1'' bezeichnet werden sollen, und denken wir uns durch die Coordinatenspitze A drei neue Axen AY, AY', AY'' gelegt, von welchen die beiden ersten AY und AY' den zwei gegebenen Richtungen parallel und gleichläufig sind und deswegen an den Axen AX, AX', AX'' dieselben Projectionszahlen, wie diese beiden Richtungen selber, geben, während wir die Projectionszahlen der dritten Axe AY'' an den gleichen Axen AX, AX', AX'' durch A_2, A_2', A_2'' und C_2, C_2', C_2'' vorstellen wollen, so ist unsere Aufgabe auf die andere zurückgeführt, diejenige Richtung $O O_1$ zu bestimmen, welche mit der Coordinatenebene YAY' des neu hinzugefügten Coordinatensystems parallel läuft. Bezeichnet man nun die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung $O O_1$ an den Axen AX, AX', AX'' des ursprünglichen Systems giebt, durch a, a', a'' und c, c', c'' und die, welche sie an den Axen AY, AY', AY'' des neu hinzugekommenen Systems giebt, durch b, b', b'' und d, d', d'', so finden zwischen diesen Projectionszahlen, welche dieselbe Richtung $O O_1$ an den zweierlei Coordinatensystemen giebt, die oben in (61. a.) und (62. b.) mitgetheilten dritten Gleichungen statt, so dass man hat:

$$b'' = B''a + B_1''a' + B_2''a'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_2''b'' = (\mathcal{A}_2)c + (\mathcal{A}_2')c' + (\mathcal{A}_2'')c'',$$

wenn hier wie dort B'', B_1'', B_2'' die schiefen Projectionszahlen, welche die Axen AX, AX', AX'' an der Axe AY'' des neu hinzugekommenen Systems geben, und $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_2')$, $(\mathcal{A}_2'')$ die anzeigen, welche die zur Axe AY'' gehörige Polaraxe $A\mathfrak{Y}''$ im neu hinzugekommenen Systeme an den Axen AX, AX', AX'' des ursprünglichen Systems giebt. Weil nun den Ergebnissen der Nr. 48. zur Folge, wenn man diese auf das neue System überträgt, $b''=0$ das Parallelsein der Richtung $O O_1$ mit der Coordinatenebene YAY' zur Folge hat und umgehehrt Folge von ihm ist, so zeigen die zwei vorstehenden Gleichungen, dass sowohl

$$0 = B''a + B_1''a' + B_2''a'' \quad \text{als} \quad 0 = (\mathcal{A}_2)c + (\mathcal{A}_2')c' + (\mathcal{A}_2'')c''$$

die analytischen Ausdrücke für das Parallelsein der Richtung $O O_1$ mit der Coordinatenebene YAY', sonach auch mit der Ebene sind, die durch die beiden Richtungen geht, welche durch

die Projectionszahlen A, A', A'' oder C, C', C'' und A_1, A_1', A_1'' oder C_1, C_1', C_1'' gegeben sind. An diesen Gleichungen vermisst man die sonst gewöhnliche Reciprocität der Formen, die man ihnen jedoch folgendermassen in zweifacher Art mittheilen kann. Es ist nämlich erstens zufolge der hintersten von den Gleichungen, welche der letzten in (87) enthaltenen Gruppe angehören:

$$(\Gamma_2) = \mathfrak{D}_2'' B'', \quad (\Gamma_2') = \mathfrak{D}_2'' B_1'', \quad (\Gamma_2'') = \mathfrak{D}_2'' B_2'',$$

und setzt man die hieraus für B'', B_1'', B_2'' sich ergebenden Werthe in die vordere der vorstehenden Gleichungen, so wird sie eine andere, und man erhält im Vereine mit der hintern:

(98. a.) $$0 = (\Gamma_2)\,a + (\Gamma_2')\,a' + (\Gamma_2'')\,a'' \quad \text{oder} \quad 0 = (\Delta_2)\,c + (\Delta_2')\,c' + (\Delta_2'')\,c'',$$

welche nun völlig reciproke Formen haben und gemeinschaftlich aussagen, dass die Richtung $O\,O_1$ senkrecht steht auf der Polaraxe $A\,\mathfrak{Y}''$, und daher in einer Ebene liegt, die mit den beiden gegebenen Richtungen parallel läuft; sodann ist zweitens zufolge der untersten von den Gleichungen, welche der zweiten in (89. a.) enthaltenen Gruppe angehören:

$$\Delta'' = \frac{h\,(\Delta_2)}{\sin W''}, \quad \Delta_1'' = \frac{h\,(\Delta_2')}{\sin W'}, \quad \Delta_2'' = \frac{h\,(\Delta_2'')}{\sin W},$$

und setzt man die hieraus für (Δ_2), (Δ_2'), (Δ_2'') sich ergebenden Werthe in die hintere der genannten Gleichungen, so wird diese eine andere, welche im Vereine mit der vordern die zwei nachstehenden Gleichungen liefert:

$$0 = B''a + B_1''a' + B_2''a'' \quad \text{oder} \quad 0 = \Delta''c\sin W'' + \Delta_1''c'\sin W' + \Delta_2''c''\sin W,$$

in denen zwar die Reciprocität der Formen noch nicht vollständig hergestellt ist, es aber wird, wenn man in dieselben für B'', B_1'', B_2'' ihre aus den vordern Gleichungen (88. a.) und für $\Delta''\sin W''$, $\Delta_1''\sin W'$, $\Delta_2''\sin W$ ihre aus den vordern Gleichungen (90. d.) entnommenen Werthe einsetzt, wodurch man findet:

(98. b.) $$\begin{cases} 0 = (A'A_1'' - A''A_1')\,a + (A''A_1 - A\,A_1'')\,a' + (A\,A_1' - A'A_1)\,a'' \\ \text{und} \\ 0 = (C'C_1'' - C''C_1')\,c + (C''C_1 - C\,C_1'')\,c' + (C\,C_1' - C'C_1)\,c''. \end{cases}$$

Erfüllt die Richtung $O\,O_1$ eine von diesen zwei Bedingungen, so läuft sie mit der gegebenen Ebene parallel und umgekehrt, läuft die Richtung $O\,O_1$ mit der gegebenen Ebene parallel, so findet jede der zwei vorstehenden Gleichungen statt. Es wird zwar eine Ebene durch zwei nicht parallele Richtungen nur dann völlig bestimmt, wenn man noch einen Punct von ihr kennt, durch den man sich dann jene beiden Richtungen hindurch gehend denken kann, ausserdem ist die Ebene nur ihrer Richtung nach gegeben, was indessen hier auf die Bestimmung der Richtung $O\,O_1$ keinen Einfluss hat. Wird

II) die Lage der Ebene, mit welcher die Richtung $O\,O_1$ parallel sein soll, nicht durch zwei Richtungen bestimmt, sondern durch zwei gegebene Puncte, deren schiefe Coordinaten x_1, x_1', x_1'' und x_2, x_2', x_2'', und deren senkrechte Coordinaten u_1, u_1', u_1'' und u_2, u_2', u_2'' sind, und durch eine Richtung, deren schiefe und senkrechte Projectionszahlen A, A', A'' und C, C', C'' sind, und stellt r die Entfernung der zwei gegebenen Puncte von einander vor, so sind den im Eingange zu Nr. 48. gegebenen Gleichungen zur Folge

$$\frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \frac{x_2' - x_1'}{r}, \quad \frac{x_2'' - x_1''}{r} \quad \text{und} \quad \frac{u_2 - u_1}{r}, \quad \frac{u_2' - u_1'}{r}, \quad \frac{u_2'' - u_1''}{r}$$

die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der durch die beiden gegebenen Puncte hindurch gehenden Richtung; man hat sonach ausser jener einen unmittelbar gegebenen Richtung noch

die zweite, deren Projectionszahlen hier mittelbar erhalten worden sind, denen parallel die gesuchte Ebene liegen muss, durch welche diese Ebene bestimmt ist. Setzt man diesem gemäss in die Gleichungen (98. b.) für A_1, A'_1, A''_1 und C_1, C'_1, C''_1 die hier erhaltenen Projectionszahlen, wodurch jene Gleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} 0=[A'(x''_2-x''_1)-A''(x'_2-x'_1)]\,a+[A''(x_2-x_1)-A(x''_2-x''_1)]\,a' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[A\,(x'_2-x'_1)-A'(x_2-x_1)]\,a'' \\ \text{und} \\ 0=[C'(u''_2-u''_1)-C''(u'_2-u'_1)]\,c+[C''(u_2-u_1)-C(u''_2-u''_1)]\,c' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[C\,(u'_2-u'_1)-C'(u_2-u_1)]\,c'', \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \textbf{(98. c.)}$$

so giebt jede von diesen den analytischen Ausdruck her, welcher gleichbedeutend ist dem Parallelsein der Richtung $O\,O_1$ mit einer Ebene, die der Richtung, deren Projectionszahlen A, A', A'' oder C, C', C'' sind, parallel läuft und zugleich durch die zwei Puncte geht, deren Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 und x_2, x'_2, x''_2 oder u_2, u'_2, u''_2 sind.

Wird endlich

III) die Lage der Ebene, mit welcher die Richtung $O\,O_1$ parallel sein soll, durch die zwei in II) bezeichneten Puncte und noch ausserdem durch einen dritten Punct, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten x_3, x'_3, x''_3 und u_3, u'_3, u''_3 sein mögen, gegeben, und bezeichnet r_1 die Entfernung dieses Punctes von demjenigen der beiden andern, dessen Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 sind, so stellen

$$\frac{x_3-x_1}{r_1},\quad \frac{x'_3-x'_1}{r_1},\quad \frac{x''_3-x''_1}{r_1} \quad\text{und}\quad \frac{u_3-u_1}{r_1},\quad \frac{u'_3-u'_1}{r_1},\quad \frac{u''_3-u''_1}{r_1}$$

die schiefen und senkrechten Projectionszahlen derjenigen Richtung vor, die durch diesen andern und den bezeichneten dritten Punct geht; man kann daher die Ebene auch als durch diese Richtung und durch die beiden vorigen Puncte bestimmt ansehen, weshalb man die den jetzigen Umständen entsprechenden Bedingungsgleichungen aus den vorigen erhalten wird, wenn man in diesen für A, A', A'' oder C, C', C'' die hier angegebenen Projectionszahlen setzt. Dadurch verwandeln sie sich in:

$$\left.\begin{array}{l} 0=[(x'_3-x'_1)(x''_2-x''_1)-(x''_3-x''_1)(x'_2-x'_1)]\,a+[(x''_3-x''_1)(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(x''_2-x''_1)]\,a' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[(x_3-x_1)(x'_2-x'_1)-(x'_3-x'_1)(x_2-x_1)]\,a'' \\ \text{und} \\ 0=[(u'_3-u'_1)(u''_2-u''_1)-(u''_3-u''_1)(u'_2-u'_1)]\,c+[(u''_3-u''_1)(u_2-u_1)-(u_3-u_1)(u''_2-u''_1)]\,c' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +[(u_3-u_1)(u'_2-u'_1)-(u'_3-u'_1)(u_2-u_1)]\,c'', \end{array}\right\} \textbf{(98. d.)}$$

von denen jede der analytische Ausdruck für das Parallelsein der Richtung $O\,O_1$ mit der Ebene ist, die durch die drei Puncte gegeben wird, deren Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 und x_2, x'_2, x''_2 oder u_2, u'_2, u''_2 und x_3, x'_3, x''_3 oder u_3, u'_3, u''_3 sind.

In dem Falle, wo die gegebene Ebene durch die Coordinatenspitze A hindurch geht, kann man diese Spitze, deren Coordinaten sämmtlich null sind, zu einem der in II) oder III) gegebenen Puncte nehmen, wodurch dann die Gleichungen (98. c.) oder (98. d.) in andere viel einfachere übergehen.

52) Man kann sich immer die Richtung $O\,O_1$ und die zwei gegebenen, deren Projectionszahlen in den Gleichungen (98. b.) vorkommen, durch einen gemeinschaftlichen Punct hindurch gehend denken, weil statt jeder der gegebenen jede andere mit ihr parallele genommen werden kann, dann aber liegen sie nothwendig alle drei in einer und derselben Ebene, und umgekehrt,

liegen drei solche Richtungen in einer und derselben Ebene, so befriedigen ihre Projectionszahlen nothwendig jene Gleichungen. Setzt man in jenen Gleichungen an die Stelle der Grundzeichen A, C und A_1, C_1 die a_1, c_1 und a_2, c_2, so werden sie:

$$0 = (a_1' a_2'' - a_1'' a_2') a + (a_1'' a_2 - a_1 a_2'') a' + (a_1 a_2' - a_1' a_2) a''$$

und

$$0 = (c_1' c_2'' - c_1'' c_2') c + (c_1'' c_2 - c_1 c_2'') c' + (c_1 c_2' - c_1' c_2) c''$$

und gehen mit Hilfe der in Nr. 38. eingeführten Bezeichnungen über in:

(99) $$\overset{3}{[a]} = 0 \quad \text{und} \quad \overset{3}{[c]} = 0 .$$

Jede dieser Gleichungen ist mithin ein Criterium für den Umstand, dass die drei in ihnen vorkommenden Richtungen entweder unmittelbar in einer und derselben Ebene liegen, oder doch wenigstens es thun, wenn zwei davon mit sich selber parallel durch einen Punct der dritten gelegt werden. Umgekehrt geht aus den in Nr. 40. für $\overset{3}{[A]}$ und $\overset{3}{[C]}$ gefundenen Werthen hervor, dass, wenn die drei in einem solchen Ausdrucke enthaltenen Richtungen die Axen eines beliebigen Coordinatensystems bilden, d. h. wenn sie von einem und demselben Punct ausgehen, jedoch nicht alle drei in einer und derselben Ebene liegen, keiner von jenen Ausdrücken null sein kann; wenn also die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen dreier Richtungen die eine oder die andere Gleichung (99) nicht erfüllen, so ist diess ein sicheres Zeichen, dass diese drei Richtungen, selbst wenn sie von einem gemeinschaftlichen Punct ausgehend gedacht werden, nicht in einer und derselben Ebene liegen.

53) Es ist nun leicht, die Bedingungsgleichungen aufzustellen, in welchen das Merkmal enthalten ist, dass ein Punct in einer gegebenen Ebene liege, denn stellen x_1, x_1', x_1'' die schiefen, u_1, u_1', u_1'' die senkrechten Coordinaten eines gegebenen Punctes dieser Ebene vor, stellen ferner x, x', x'' die schiefen, u, u', u'' die senkrechten Coordinaten von irgend einem andern in dieser Ebene liegenden Puncte vor, so liegt die durch die zwei genannten Puncte gehende Richtung nothwendig in derselben Ebene, weshalb deren Projectionszahlen eine von den Gleichungen der Nr. 51. befriedigen müssen, welche aber, diess hängt davon ab, durch welche Bestimmungsstücke die Ebene selbst gegeben ist. Nun sind aber, wenn r die Entfernung der beiden so eben betrachteten Puncte von einander vorstellt, zufolge der im Eingange zu Nr. 48. gegebenen Gleichungen

$$\frac{x - x_1}{r}, \quad \frac{x' - x_1'}{r}, \quad \frac{x'' - x_1''}{r} \quad \text{und} \quad \frac{u - u_1}{r}, \quad \frac{u' - u_1'}{r}, \quad \frac{u'' - u_1''}{r}$$

die schiefen und senkrechten Projectionszahlen dieser Richtung, und setzt man diese an die Stelle von a, a', a'' und c, c', c'' in die Gleichungen der Nr. 51., so werden die (98. a.):

(100. a.) $$\begin{cases} 0 = (\Gamma_2)(x - x_1) + (\Gamma_2')(x' - x_1') + (\Gamma_2'')(x'' - x_1'') \quad \text{und} \\ 0 = (\Lambda_2)(u - u_1) + (\Lambda_2')(u' - u_1') + (\Lambda_2'')(u'' - u_1''), \end{cases}$$

die (98. b.) gehen über in:

(100. b.) $$\begin{cases} 0 = (A'A_1'' - A''A_1')(x - x_1) + (A''A_1 - A A_1'')(x' - x_1') + (A A_1' - A'A_1)(x'' - x_1'') \\ \quad \text{und} \\ 0 = (C'C_1'' - C''C_1')(u - u_1) + (C''C_1 - C C_1'')(u' - u_1') + (C C_1' - C'C_1)(u'' - u_1''), \end{cases}$$

die (98. c.) verwandeln sich in:

$$\left.\begin{aligned}0 &= [A'(x_2''-x_1'')-A''(x_2'-x_1')](x-x_1)+[A''(x_2-x_1)-A(x_2''-x_1'')](x'-x_1') \\ &\qquad +[A(x_2'-x_1')-A'(x_2-x_1)](x''-x_1'') \\ &\text{und} \\ 0 &= [C'(u_2''-u_1'')-C''(u_2'-u_1')](u-u_1)+[C''(u_2-u_1)-C(u_2''-u_1'')](u'-u_1') \\ &\qquad +[C(u_2'-u_1')-C'(u_2-u_1)](u''-u_1''),\end{aligned}\right\} \dots\dots (100.\ c.)$$

endlich nehmen die Gleichungen (98. d.) die nachstehende Form an:

$$\left.\begin{aligned}0 &= [(x_3'-x_1')(x_2''-x_1'')-(x_3''-x_1'')(x_2'-x_1')](x-x_1) \\ &\quad +[(x_3''-x_1'')(x_2-x_1)-(x_3-x_1)(x_2''-x_1'')](x'-x_1') \\ &\quad +[(x_3-x_1)(x_2'-x_1')-(x_3'-x_1')(x_2-x_1)](x''-x_1'') \\ &\text{und} \\ 0 &= [(u_3'-u_1')(u_2''-u_1'')-(u_3''-u_1'')(u_2'-u_1')](u-u_1) \\ &\quad +[(u_3''-u_1'')(u_2-u_1)-(u_3-u_1)(u_2''-u_1'')](u'-u_1') \\ &\quad +[(u_3-u_1)(u_2'-u_1')-(u_3'-u_1')(u_2-u_1)](u''-u_1'').\end{aligned}\right\} \dots\dots (100.\ d.)$$

Die Aussagen von allen diesen verschiedenen Gleichungen sind identisch mit der, dass ein Punct, dessen Coordinaten an den Axen AX, AX', AX'' durch x, x', x'' oder u, u', u'' vorgestellt werden, in einer gegebenen Ebene liege, aber die (100. a.) setzt voraus, dass die Ebene durch eine auf ihr senkrechte Richtung, die (100. b.), dass die Ebene durch zwei in ihr liegende oder mit ihr parallele Richtungen, die (100. c.), dass die Ebene durch eine solche Richtung und zwei in der Ebene liegende Puncte, die (103. d.) endlich, dass die Ebene durch drei solche Puncte gegeben werde.

Geht die Ebene durch die Coordinatenspitze A, so kann man diese Spitze als einen der in ihr liegenden Puncte nehmen, wodurch die vorstehenden Gleichungen um Vieles einfacher werden, besonders wenn man denjenigen Punct dazu auserwählt, dessen Coordinaten in ihnen am häufigsten vorkommen, weil dann diese alle null werden.

54) In der Nr. 49. haben wir die Projectionszahlen einer Richtung $O\,O_1$ zu finden gelernt, welche mit dem Durchschnitt zweier Coordinatenebenen, von denen jede eben sowohl dem Grundsysteme, wie auch dem Polarsysteme angehören kann, parallel läuft; jetzt wollen wir die Projectionszahlen der Richtung $O\,O_1$ aufsuchen, wenn diese mit dem Durchschnitt von irgend zwei gegebenen sich schneidenden Ebenen parallel laufen soll. Bedenkt man, dass eine Richtung, die mit dem Durchschnitt zweier Ebenen parallel laufen soll, gleichzeitig mit jeder von diesen Ebenen parallel laufen müsse, und dass jede dieser zwei Eigenschaften die andere nach sich zieht, mithin beide von völlig gleichem Umfange sind, so überzeugt man sich, dass die verlangte Richtung in Bezug auf jede der beiden Ebenen eine von den in Nr. 51. aufgestellten Gleichungen befriedigen muss, und dass sie die verlangte ist, so wie sie diess thut. Sind demnach A, A', A'' und A_1, A_1', A_1'' die schiefen, C, C', C'' und C_1, C_1', C_1'' die senkrechten Projectionszahlen, welche zwei in der einen Ebene liegende und sich schneidende Richtungen an den Axen AX, AX', AX'' des ursprünglichen Coordinatensystems geben, und bezeichnen a, a', a'' und a_1, a_1', a_1'' als schiefe, c, c', c'' und c_1, c_1', c_1'' als senkrechte Projectionszahlen, das Gleiche in Bezug auf zwei in der andern Ebene liegende und sich schneidende Richtungen, und denkt man sich den beiden erstern Richtungen parallel und gleichläufig zwei Richtungen AY und AY', die von der Coordinatenspitze A auslaufen, und eben solche zwei den beiden andern Richtungen parallele und gleichläufige Ay, Ay', so bilden die AY, AY' mit einer dritten Rich-

tung A Y″, die mit ihnen nicht in einer und derselben Ebene liegt, ein zweites Coordinatensystem, und eben so bilden die A y, A y′ mit irgend einer dritten A y″, die mit ihnen nicht in einer und derselben Ebene liegt, ein drittes Coordinatensystem. Bezeichnen nun B″, B_1'', B_2'' die schiefen Projectionszahlen, welche die ursprünglichen Axen A X, A X′, A X″ an der dritten Axe A Y″ des zweiten Systems geben, sowie b″, b_1'', b_2'' die, welche dieselben ursprünglichen Axen an der dritten Axe A y″ des dritten Systems geben; bezeichnen ferner (A_2), (A_2'), (A_2'') und (α_2), (α_2'), (α_2'') die schiefen Projectionszahlen, welche die den dritten Axen A Y″ und A y″ im zweiten und dritten System entsprechenden Polaraxen, d. h. die zwei auf den beiden Ebenen, mit deren Durchschnitt die Richtung $O O_1$ parallel laufen soll, senkrechten Richtungen an den Axen A X, A X′, A X″ des ursprünglichen Systems geben, so ist die Bedingung, dass die Richtung $O O_1$ mit der ersten Ebene parallel läuft, den Gleichungen (98. a.) zur Folge enthalten in:

(101. a.) $\begin{cases} 0 = (\Gamma_2)\,a_2 + (\Gamma_2')\,a_2' + (\Gamma_2'')\,a_2'' \quad \text{oder} \quad 0 = (A_2)\,c_2 + (A_2')\,c_2' + (A_2'')\,c_2''; \\ \text{und eben so ist in} \\ 0 = (\gamma_2)\,a_2 + (\gamma_2')\,a_2' + (\gamma_2'')\,a_2'' \quad \text{oder} \quad 0 = (\alpha_2)\,c_2 + (\alpha_2')\,c_2' + (\alpha_2'')\,c_2'' \end{cases}$

die Bedingung enthalten, dass die Richtung $O O_1$ mit der zweiten Ebene parallel läuft, wenn a_2, a_2', a_2'' die schiefen, c_2, c_2', c_2'' die senkrechten Projectionszahlen der verlangten Richtung $O O_1$ an den Axen A X, A X′, A X″ vorstellen, und die Grundzeichen (Γ_2) und (γ_2) den senkrechten, sowie die Grundzeichen (A_2) und (α_2) den schiefen Projectionszahlen angehören, welche die auf der einen oder andern Ebene senkrecht stehende Gerade an den Axen A X, A X′, A X″ giebt. Je eine von den auf erster Zeile stehenden Gleichungen (101. a.) giebt in Verbindung mit je einer von den auf zweiter Zeile stehenden das Kennzeichen her, dass die Richtung $O O_1$ mit jeder der beiden Ebenen, oder, was dasselbe ist, mit ihrem Durchschnitte parallel läuft. Hätte man die Bedingung, dass die gesuchte Richtung mit jeder der zwei gegebenen Ebenen parallel laufen soll, anstatt durch die Gleichungen (98. a.) durch (98. b.) ausgedrückt, so hätte man erhalten:

(101. b.) $\begin{cases} 0 = (A'A_1'' - A''A_1')\,a_2 + (A''A_1 - A\,A_1'')\,a_2' + (A\,A_1' - A'A_1)\,a_2'' \\ \text{oder} \\ 0 = (C'C_1'' - C''C_1')\,c_2 + (C''C_1 - C\,C_1'')\,c_2' + (C\,C_1' - C'C_1)\,c_2'' \end{cases}$

in Bezug auf die eine Ebene und

(101. c.) $\begin{cases} 0 = (a'a_1'' - a''a_1')\,a_2 + (a''a_1 - a\,a_1'')\,a_2' + (a\,a_1' - a'a_1)\,a_2'' \\ \text{oder} \\ 0 = (c'c_1'' - c''c_1')\,c_2 + (c''c_1 - c\,c_1'')\,c_2' + (c\,c_1' - c'c_1)\,c_2'' \end{cases}$

in Bezug auf die zweite Ebene, welche Gleichungen die Stelle der vorigen zu vertreten haben, wenn die Ebenen durch zwei in ihnen liegende und sich schneidende Richtungen gegeben sind.

Wären aber die beiden sich schneidenden Ebenen dadurch gegeben worden, dass an die Stelle von einer der sie bestimmenden Richtungen zwei in dieser Richtung liegende Puncte durch ihre Coordinaten gegeben worden wären, so müsste man die Projectionszahlen dieser Richtung durch die Coordinaten der zwei Puncte ausdrücken und diese Ausdrücke an die Stelle der Projectionszahlen dieser Richtung in diejenige der Gleichungen (101. b.) und (101. c.) einsetzen, welche der Ebene angehört, in der die gegebenen Puncte liegen, und eben so müsste man verfahren, wenn auch noch eine andere oder gar alle Richtungen durch zwei ihrer Puncte gegeben wären, was immer mit Hilfe der Gleichungen (3) auf dieselbe leichte Weise geschehen kann, wie schon mehrmals in II) und III) der Nr. 51. gezeigt worden ist. Um dabei die Anzahl der gegebenen Puncte nicht unnöthiger Weise zu vermehren, wird es gut sein, da, wo es geschehen

kann, bei jeder einzelnen Richtung immer den Punct, in welchem mehrere Richtungen zusammenlaufen, zu einem der gegebenen zu nehmen, weil so die Anzahl der in die Gleichungen eingehenden Puncte verringert wird. Es wird zwar die Lage zweier Ebenen durch vier Puncte bestimmt, von denen zwei im Durchschnitte der beiden Ebenen und je einer in diesen Ebenen ausserhalb des Durchschnitts liegen; hier aber, wo der Durchschnitt als nicht gegeben angenommen wird, hat man die Lage der beiden Ebenen im Allgemeinen als durch sechs Puncte bestimmt aufzufassen, von denen je drei in einer der beiden Ebenen liegen. In dem besondern Falle, wo die zwei gegebenen Ebenen beide oder auch nur eine von ihnen durch die Projectionsspitze A hindurch gehen, werden solche Gleichungen viel einfacher, wenn man die Spitze A zu dem Puncte macht, von welchem alle gegebenen Richtungen oder doch deren Hälfte auslaufen, weil dann, im Falle die Richtungen durch Puncte gegeben sind, die Coordinaten dieser Spitze, welche sämmtlich null sind, als dem gegebenen Puncte zugehörig angesehen werden können, wodurch eine Vereinfachung der Gleichung einer jeden Ebene bewirkt wird, von welcher Puncte gegeben sind.

55) Es ist nun leicht, die Bedingungsgleichungen anzugeben, in welchen das Merkmal enthalten ist, dass ein Punct im Durchnitt der beiden in der vorigen Nummer gegebenen Ebenen liege. Sind nämlich x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die schiefen und senkrechten Coordinaten von einem gegebenen Puncte dieses Durchschnitts und stellen x, x', x'' und u, u', u'' die Coordinaten von irgend einem andern unbestimmt gelassenen Punct desselben Durchschnitts an den Axen AX, AX', AX'' vor, so ist, wenn r die Entfernung dieser beiden Puncte von einander bezeichnet, den im Eingang zu Nr. 48. gegebenen Gleichungen zur Folge

$$\frac{x-x_1}{r}=a\,,\quad \frac{x'-x'_1}{r}=a'\,,\quad \frac{x''-x''_1}{r}=a'' \quad\text{und}\quad \frac{u-u_1}{r}=c\,,\quad \frac{u'-u'_1}{r}=c'\,,\quad \frac{u''-u''_1}{r}=c''\,,$$

vorausgesetzt, dass a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Richtung bedeuten, die von dem ersten der zwei genannten Puncte aus durch den andern hindurch geht; es gehören aber diese Projectionszahlen nicht blos dieser Richtung, sondern auch jeder mit ihr parallelen und gleichläufigen an, und stellen daher im Allgemeinen die von einer mit dem Durchschnitt der beiden Ebenen parallelen Richtung, also dasselbe vor, was in den Gleichungen der vorigen Nummer durch dieselben Zeichen vorgestellt worden ist. Setzt man nun für diese Projectionszahlen ihre hier gegebenen Werthe in jene Gleichungen ein, so werden die (101. a.):

$$\left.\begin{array}{l} 0=(\Gamma_2)(x-x_1)+(\Gamma'_2)(x'-x'_1)+(\Gamma''_2)(x''-x''_1) \text{ und } 0=(\mathfrak{A}_2)(u-u_1)+(\mathfrak{A}'_2)(u'-u'_1)+(\mathfrak{A}''_2)(u''-u''_1) \\ \quad\text{oder} \\ 0=(\gamma_2)(x-x_1)+(\gamma'_2)(x'-x'_1)+(\gamma''_2)(x''-x''_1) \text{ und } 0=(\alpha_2)(u-u_1)+(\alpha'_2)(u'-u'_1)+(\alpha''_2)(u''-u''_1) \end{array}\right\} \textbf{(102. a.)}$$

und die (101. b.) verwandeln sich in:

$$\left.\begin{array}{l} 0=(A'A''_1-A''A'_1)(x-x_1)+(A''A_1-AA''_1)(x'-x'_1)+(AA'_1-A'A_1)(x''-x''_1) \text{ oder} \\ 0=(C'C''_1-C''C'_1)(u-u_1)+(C''C_1-CC''_1)(u'-u'_1)+(CC'_1-C'C_1)(u''-u''_1) \end{array}\right\}\ldots \textbf{(102. b.)}$$

sowie die (101. c.) in:

$$\left.\begin{array}{l} 0=(a'a''_1-a''a'_1)(x-x_1)+(a''a_1+aa''_1)(x'-x'_1)+(aa'_1-a'a_1)(x''-x''_1) \text{ oder} \\ 0=(c'c''_1-c''c'_1)(u-u_1)+(c''c_1+cc''_1)(u'-u'_1)+(cc'_1-c'c_1)(u''-u''_1)\,, \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots \textbf{(102. c.)}$$

und jeder Punct, dessen Coordinaten x, x', x'' oder u, u', u'' ein auf jede der beiden Ebenen Bezug nehmendes Paar von diesen Gleichungen erfüllen, liegt in der Durchschnittslinie der zwei

gegebenen Ebenen, oder mit andern Worten in der Richtung, die theils durch die Koeffizienten der Gleichungen, theils durch den Punct, dessen Coordinaten x_1, x_1', x_1'' oder u_1, u_1', u_1'' sind, gegeben ist.

56) Da die zwei Richtungen, wodurch in Nr. 51. die Lage einer Ebene gegeben worden ist, auf unzählig viele Arten genommen werden können, indem sie keine andere Bedingung zu erfüllen brauchen als die, dass sie beide in jener Ebene liegen und sich schneiden, so kann man oft durch eine zweckmässige Wahl derselben die eine oder die andere der Gleichungen (101. b.) oder (102. b.) beträchtlich einfacher werden lassen. So kann man für die Richtung, deren Projectionszahlen dort durch A, A', A'' oder C, C', C'' vorgestellt worden sind, den Durchschnitt von einer der Coordinatenebenen des Grundsystems oder auch des Polarsystems mit der gegebenen Ebene nehmen, wo dann im erstern Falle $A=0$ oder $A'=0$ oder $A''=0$ wird, je nachdem man den Durchschnitt mit der Ebene $X'AX''$ oder XAX'' oder XAX' dazu nimmt, und im andern Falle wird $C=0$ oder $C'=0$ oder $C''=0$, je nachdem man den Durchschnitt an der Ebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ dazu wählt. Das Gleiche gilt auch von der andern Richtung, deren Projectionszahlen dort durch A_1, A_1', A_1'' oder C_1, C_1', C_1'' angedeutet worden sind, nur dass man für die zweite nicht denselben Durchschnitt nehmen darf, den man schon für die erste verbraucht hat. In dem besondern Falle, wo die gegebene Ebene mit einer der Coordinatenebenen parallel läuft, giebt diese mit ihr zwar keinen Durchschnitt, aber dann geben nothwendiger Weise die beiden andern Coordinatenebenen mit der gegebenen Ebene einen Durchschnitt, so dass man immer wieder für obige beide Richtungen solche Durchschnitte nehmen kann.

Eine noch freiere Wahl steht offen bei den in Nr. 54. besprochenen Richtungen; denn da diese Richtungen keine andere Bedingung zu erfüllen haben, als die, dass sie nicht parallel mit dem Durchschnitt der zwei Ebenen seien und dass jede in der Ebene liegen bleibe, zu deren Lagenbestimmung sie dient, so können dazu wie in dem Falle einer einzigen Ebene die Durchschnitte dieser Ebenen mit einer der Grund- oder Polar-Coordinatenebenen, falls diese nicht parallel mit dem Durchschnitt der beiden gegebenen Ebenen ist, genommen werden, wodurch eine von den Projectionszahlen einer jeden solchen Richtung null wird. Weil aber die gesuchte Richtung OO_1 hier lediglich von dem Durchschnitt der zwei gegebenen Ebenen abhängt und unzählig viele Paare von Ebenen den gleichen Durchschnitt liefern können, so erhält man dadurch für die Wahl der zwei fraglichen Richtungen einen noch grössern Spielraum als zuvor. Man kann sich von dem Umfange, in welchem hier eine geschickte Wahl der gegebenen Richtungen zur Vereinfachung der Gleichungen beitragen kann, den besten Begriff machen, wenn man erwägt, dass man zu den Axen AY' und AY'' des in Nr. 54. neu eingeführten Systems auch zwei Axen des ursprünglichen Systems und zwar sowohl Grund- als Polaraxen nehmen kann, wenn nur keine von ihnen mit dem Durchschnitt der gegebenen Ebenen parallel läuft. Wählt man hierfür z. B. die beiden Grundaxen AX', AX'', so wird $A_1=0$, $A_1'=1$, $A_1''=0$ und $A_2=0$, $A_2'=0$, $A_2''=1$ und dann nimmt das erste Paar der Gleichungen (101. b.) oder (102. b.) die Gestalt

$$0=Aa'-A'a \quad \text{und} \quad 0=Aa''-A''a$$

oder

$$0=A(x'-x_1')-A'(x-x_1) \quad \text{und} \quad 0=A(x''-x_1'')-A''(x-x_1)$$

an; wählt man aber hierfür z. B. die beiden Polaraxen $A\mathfrak{X}'$ und $A\mathfrak{X}''$, so wird $C_1=0$, $C_1'=\mathfrak{C}_1'$,

$C_1''=0$ und $C_2=0$, $C_2'=0$, $C_2''=\mathfrak{C}_2''$, wodurch das zweite Paar der Gleichungen (101. b.) oder (102. b.) die Gestalt

$$0=Cc'-C'c \quad \text{und} \quad 0=Cc''-C''c$$

oder

$$0=C(u'-u_1')-C'(u-u_1) \quad \text{und} \quad 0=C(u''-u_1'')-C''(u-u_1)$$

annimmt. Dabei hat man sich in allen vordern von diesen Gleichungen unter A, A′ und C, C′ der in Nr. 54. und Nr. 55. gemachten Bemerkung gemäss die zu irgend einer in der Ebene YAX″ oder YA𝔛″ liegenden Richtung gehörigen Projectionszahlen zu denken, so wie unter A, A″ und C, C″ in den hintern Gleichungen die zu irgend einer in der Ebene YAX′ oder YA𝔛′ liegenden Richtung gehörigen. Ueber die Vereinfachungen der so entstehenden Gleichungen werden spätere, eigens über gerade Linien angestellte Betrachtungen noch mehr Licht verbreiten.

§. 5.

Besondere Arten der Coordinatensysteme.

57) Bis daher haben wir den drei Axen der betrachteten Coordinatensysteme eine völlig beliebige Stellung gegen einander eingeräumt; jetzt aber wollen wir die Besonderheiten in Erwägung ziehen, welche den allgemeinen Formeln daraus erwachsen, dass jenen drei Axen eine besondere Stellung gegen einander angewiesen wird. Zuvörderst wollen wir dasjenige besondere System ins Auge fassen, in welchem eine Axe senkrecht auf den beiden andern steht, und dieses ein gegen diese Axe senkrechtes System nennen. Nehmen wir an, dass die Axe AX″ senkrecht auf den beiden andern AX und AX′ stehe, so verwandeln sich dadurch die beiden Axenwinkel W′ und W″ in rechte Winkel, deren Kosinuse verschwinden und deren Sinuse der Einheit gleich sind, so dass man also in diesem senkrechten Systeme

$$\cos W'=0, \ \cos W''=0 \quad \text{und} \quad \sin W'=1, \ \sin W''=1 \qquad \textbf{(103)}$$

hat, während in ihm $\cos W$ und $\sin W$ noch mit dem Winkel W sich abändernde Werthe haben können. Den besondern Gleichungen (103) gemäss nehmen in diesem Systeme die meisten früheren allgemeinen Gleichungen besondere Formen an, welche wir nun näher ins Auge fassen wollen. Den Gleichungen (103) zur Folge verwandeln sich bei diesem senkrechten Systeme die Gleichungen (38) in:

$$\cos\mathfrak{W}=-\cos W, \ \sin W\cos\mathfrak{W}'=0, \ \sin W\cos\mathfrak{W}''=0,$$

welche zeigen, dass in ihm $\mathfrak{W}$ der Nebenwinkel von W, also $\sin W=\sin\mathfrak{W}$ ist, $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{W}''$ aber rechte Winkel werden, welches letztere zu erkennen giebt, dass auch das zu dem bisher betrachteten Systeme gehörige Polarsystem, dessen Axen A𝔛, A𝔛′, A𝔛″ sind, ein senkrechtes ist, in welchem die Axe A𝔛″ senkrecht auf den beiden A𝔛 und A𝔛′ steht. Deshalb verwandeln sich bei ihm die drei Gleichungen (42) in die eine

$$h=\sin W \qquad \textbf{(104. a.)}$$

und die Gleichungen (41) geben

$$\mathfrak{C}=\sin W, \ \mathfrak{C}_1'=\sin W, \ \mathfrak{C}_2''=1, \qquad \textbf{(104. b.)}$$

sowie die (45. a.)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}=\frac{1}{\sin W},\ \mathfrak{A}'=-\operatorname{cotg}W,\ \mathfrak{A}''=0;\ \mathfrak{A}_1=-\operatorname{cotg}W,\ \mathfrak{A}_1'=\frac{1}{\sin W},\ \mathfrak{A}_1''=0;\\ \mathfrak{A}_2=0,\ \mathfrak{A}_2'=0,\ \mathfrak{A}_2''=1.\end{aligned}\right\}\ldots\ \textbf{(104. c.)}$$

Ferner gehen bei diesem Systeme die Gleichungen (12) über in:

(105. a.) $$c = a + a'\cos W\,,\quad c' = a\cos W + a'\,,\quad c'' = a''$$

und die (47. a.) nehmen in Folge der Gleichungen (104. b. und c.) die nachfolgende Gestalt an:

(105. b.) $$a\sin^2 W = c - c'\cos W\,,\quad a'\sin^2 W = c' - c\cos W\,,\quad a'' = c''\,,$$

in welchen man auch x, x', x'' an die Stelle von a, a', a'' und u, u', u'' an die Stelle von c, c', c'' den Gleichungen (15. a.) und (48. a.) gemäss setzen kann.

Ist bei zwei auf einander bezogenen, aus den Axen A X, A X', A X'' und aus denen A Y, A Y', A Y'' zusammengesetzten Systemen das erstere ein senkrechtes, in welchem die Axe A X'' senkrecht auf den zwei andern A X und A X' steht und daher die Polaraxe A 𝔛'' mit der Grundaxe A X'' zusammenfällt, so sind alle gleichnamigen Projectionszahlen, welche diese letzten zwei Axen an den Axen des zweiten Systems liefern, bei beiden dieselben, man hat daher in Gemässheit der in Nr. 23., Nr. 24. und Nr. 44. festgesetzten Bezeichnungen:

(106. a.) $$\begin{cases} B_2 = (\mathit{B}_2)\,, & B'_2 = (\mathit{B}'_2)\,, \quad B''_2 = (\mathit{B}''_2)\,; \quad D_2 = (\Delta_2)\,, \quad D'_2 = (\Delta'_2)\,, \quad D''_2 = (\Delta''_2)\,; \\ \mathit{B}_2 = (B_2)\,, & \mathit{B}'_2 = (B'_2)\,, \quad \mathit{B}''_2 = (B''_2)\,; \quad \Delta_2 = (D_2)\,, \quad \Delta'_2 = (D'_2)\,, \quad \Delta''_2 = (D''_2)\,; \end{cases}$$

ferner ist die schiefe Projectionszahl, welche irgend eine Richtung an der Axe A X'' in dem senkrechten Systeme liefert, der senkrechten Projectionszahl gleich, welche dieselbe Richtung an derselben Axe giebt, daher hat man in Bezug auf die sämmtlichen Axen des zweiten Doppelsystems in Gemässheit der gleichen Bezeichnungen:

(106. b.) $$\begin{cases} A'' = C''\,, \quad A''_1 = C''_1\,, \quad A''_2 = C''_2\,; \quad (\Delta'') = (\Gamma'')\,, \quad (\Delta''_1) = (\Gamma''_1)\,, \quad (\Delta''_2) = (\Gamma''_2)\,, \\ \text{und auch noch} \\ \Delta'' = \Gamma''\,, \quad \Delta''_1 = \Gamma''_1\,, \quad \Delta''_2 = \Gamma''_2\,; \quad (A'') = (C'')\,, \quad (A''_1) = (C''_1)\,, \quad (A''_2) = (C''_2)\,, \end{cases}$$

weil, wenn die Axe A X'' senkrecht auf den zwei andern A X und A X' steht, nothwendig auch die A 𝔛'' senkrecht auf denen A 𝔛 und A 𝔛' steht, somit das zu dem ersten Grundsystem gehörige Polarsystem in Bezug auf dessen Axe A 𝔛'' ein senkrechtes ist. — Ist hingegen bei den zwei auf einander bezogenen Systemen das letztere aus den Axen A Y, A Y', A Y'' zusammengesetzte ein senkrechtes, dessen Axe A Y'' senkrecht auf den zwei andern A Y und A Y' steht, so gelten für dieses die den Formen (106. a. und b.) analogen Gleichungen, man erhält nämlich statt der (106. a.) die:

(106. c.) $$\begin{cases} A_2 = (\Delta_2)\,, & A'_2 = (\Delta'_2)\,, \quad A''_2 = (\Delta''_2)\,; \quad C_2 = (\Gamma_2)\,, \quad C'_2 = (\Gamma'_2)\,, \quad C''_2 = (\Gamma''_2)\,; \\ \Delta_2 = (A_2)\,, & \Delta'_2 = (A'_2)\,, \quad \Delta''_2 = (A''_2)\,; \quad \Gamma_2 = (C_2)\,, \quad \Gamma'_2 = (C'_2)\,, \quad \Gamma''_2 = (C''_2)\,, \end{cases}$$

und an die Stelle derer (106. b.) treten die:

(106. d.) $$\begin{cases} B'' = D''\,, \quad B''_1 = D''_1\,, \quad B''_2 = D''_2\,; \quad (\mathit{B}'') = (\Delta'')\,, \quad (\mathit{B}''_1) = (\Delta''_1)\,, \quad (\mathit{B}''_2) = (\Delta''_2) \\ \text{und die:} \\ \mathit{B}'' = \Delta''\,, \quad \mathit{B}''_1 = \Delta''_1\,, \quad \mathit{B}''_2 = \Delta''_2\,; \quad (B'') = (D'')\,, \quad (B''_1) = (D''_1)\,, \quad (B''_2) = (D''_2)\,. \end{cases}$$

Durch die hier angezeigten, bei einem senkrechten Coordinatensysteme eintretenden besondern Beziehungen zwischen den Projectionszahlen, welche seine und die Axen eines mit ihm verbundenen beliebigen Systems wechselseitig an einander geben, kann man in einem solchen Falle den oben aufgestellten ganz allgemeinen Gleichungen, in welchen solche Projectionszahlen auftreten, mannigfach abgeänderte Gestalten geben, welche einzeln aufzuführen wir unterlassen;

nur einige wenige von ihnen wollen wir, weil sie eine oft wiederkehrende Anwendung in der Bewegungslehre finden, hier niederschreiben. Ist nämlich blos das aus den Axen AX, AX', AX'' zusammengesetzte System in Bezug auf seine Axe AX'' ein senkrechtes und setzen wir dann in den dritten hintern Gleichungen (88. a.) einer jeden Gruppe den Relationen (106. b.) zur Folge C'', C_1'', C_2'' oder D_2, D_2', D_2'' für A'', A_1'', A_2'' und zugleich der Gleichung (104. a.) gemäss $\sin W$ für h, so verwandeln sich dieselben in:

$$\pm D_2 \sin W = k(B'B_1'' - B''B_1'),\quad \pm D_2' \sin W = k(B''B_1 - BB_1''),\quad \pm D_2'' \sin W = k(BB_1' - B'B_1); \qquad \textbf{(107. a.)}$$

ist hingegen blos das aus den Axen AY, AY', AY'' zusammengesetzte System in Bezug auf seine Axe AY'' ein senkrechtes und setzen wir dieser Voraussetzung gemäss in den dritten vordern Gleichungen (88. a.) einer jeden Gruppe nach Anleitung der Gleichungen (106. d.) D'', D_1'', D_2'' oder C_2, C_2', C_2'' für B'', B_1'', B_2'' und zugleich der auf das jetzige senkrechte System übergetragenen Gleichung (104. a.) zur Folge $\sin W_1$ für k, so verwandeln sich dieselben in:

$$\pm C_2 \sin W_1 = h(A'A_1'' - A''A_1'),\quad \pm C_2' \sin W_1 = h(A''A_1 - AA_1''),\quad \pm C_2'' \sin W_1 = h(AA_1' - A'A_1). \qquad \textbf{(107. b.)}$$

Ferner erhält man, wenn man in die letzten drei vordern Gleichungen (90. d.), den letzten drei Relationen (106. a.) zur Folge, (D_2), (D_2'), (D_2'') für $\varDelta_2$, $\varDelta_2'$, $\varDelta_2''$ setzt, und hierauf wieder $\mathfrak{D}B_2$, $\mathfrak{D}_1'B_2'$, $\mathfrak{D}_2''B_2''$ anstatt (D_2), (D_2'), (D_2'') nach Aussage der Gleichungen (87), und beachtet, dass $\mathfrak{D}\sin W_1'' = \mathfrak{D}_1'\sin W_1' = \mathfrak{D}_2''\sin W_1 = k$ ist:

$$\pm kB_2 \sin W = C_1C_2' - C_1'C_2,\quad \mp kB_2' \sin W = CC_2' - C'C_2,\quad \pm kB_2'' \sin W = CC_1' - C'C_1 \qquad \textbf{(107. c.)}$$

und eben so findet man, wenn man den Relationen (106. c.) zur Folge in die hintern Gleichungen (90. c.) (C_2), (C_2'), (C_2'') für Γ_2, Γ_2', Γ_2'' setzt, und hierauf wieder $\mathfrak{C}A_2$, $\mathfrak{C}_1'A_2'$, $\mathfrak{C}_2''A_2''$ für (C_2), (C_2'), (C_2'') nach Aussage der Gleichungen (87), und beachtet, dass $\mathfrak{C}\sin W'' = \mathfrak{C}_1'\sin W' = \mathfrak{C}_2''\sin W = h$ ist:

$$\pm hA_2 \sin W_1 = D_1D_2' - D_1'D_2,\quad \mp hA_2' \sin W_1 = DD_2' - D'D_2,\quad \pm hA_2'' \sin W_1 = DD_1' - D'D_1, \qquad \textbf{(107. d.)}$$

von denen die (107. c.) wahr ist, wenn blos das aus den Axen AX, AX', AX'' gebildete System ein an der Axe AX'' senkrechtes ist, die (107. d.) hingegen, wenn blos die Axe AY'' mit denen AY und AY' rechte Winkel bildet. Man kann in diesen Gleichungen die Projectionszahlen, deren Grundzeichen C ist, durch solche ersetzen, deren Grundzeichen D ist, und umgekehrt die mit dem Grundzeichen D durch andere mit dem Grundzeichen C. Auf solche Weise werden die Gleichungen (107. c.):

$$\pm kB_2 \sin W = D'D_1'' - D_1'D'',\quad \mp kB_2' \sin W = DD_1'' - D_1D'',\quad \pm kB_2'' \sin W = DD_1' - D_1D' \qquad \textbf{(107. e.)}$$

und die Gleichung (107. d.) geht über in:

$$\pm hA_2 \sin W_1 = C'C_1'' - C_1'C'',\quad \mp hA_2' \sin W_1 = CC_1'' - C_1C'',\quad \pm hA_2'' \sin W_1 = CC_1' - C_1C'. \qquad \textbf{(107. f.)}$$

Es giebt das senkrechte System noch zu andern diesen ähnlichen Gleichungen Anlass, die wir indessen weglassen, da sie entweder schon in den vorigen enthalten sind, oder durch ein ganz ähnliches Verfahren sich erhalten lassen.

58) Das senkrechte Coordinatensystem besitzt noch eine andere Eigenthümlichkeit, von der ein häufiger Gebrauch gemacht wird, und die wir daher nicht unberücksichtigt lassen dürfen. Steht nämlich in dem Coordinatensysteme, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, die eine Axe AX'' senkrecht auf den zwei andern AX und AX', wo dann bei ihm die Gleichungen (103)

statt finden, und werden an diesem Systeme blos solche Puncte und Richtungen untersucht, die in der Ebene XAX' liegen, so befinden sich diese Puncte und Richtungen alle in dem Nr. 48. I. betrachteten Falle, und zwar schon, wenn die Richtungen auch nur parallel mit der Ebene XAX' liegen: es gelten daher für solche Puncte und Richtungen alle die dort mitgetheilten Gleichungen, nur muss an den Accenten eine Vertauschung der zweiten Art vorgenommen werden, weil hier die Ebere XAX' gewählt worden ist, während dort die $X'AX''$ in Betrachtung kam. Man hat daher mit Berücksichtigung der hier statt findenden Gleichungen (103) in Bezug auf jede mit der Ebene XAX' parallele Richtung:

(108. a.) $$\begin{cases} a''=c''=0 \quad \text{und in Folge dessen} \quad 1=ac+a'c'\,; \\ c=a+a'\cos W\,, \quad c'=a\cos W+a'\,; \quad a\sin^2 W=c-c'\cos W\,, \quad a'\sin^2 W=c'-c\cos W\,, \end{cases}$$

und in Bezug auf jeden in der Ebene XAX' liegenden Punct liefern die Gleichungen (17), (14), (15. a.) und (48. b.), da für ihn $x''=u''=0$ ist,

(108. b.) $$\begin{cases} r^2=xu+x'u', \quad r=au+a'u'=cx+c'x' \\ u=x+x'\cos W\,, \quad u'=x\cos W+x'\,; \quad x\sin^2 W=u-u'\cos W\,, \quad x'\sin^2 W=u'-u\cos W\,, \end{cases}$$

wenn x, x', x'' die schiefen, u, u', u'' die senkrechten Coordinaten dieses Punctes, r seine Entfernung von der Coordinatenspitze, und a, a' die schiefen, c, c' die senkrechten Projectionszahlen der von der Coordinatenspitze nach diesen Punct hinlaufenden Richtung an den Axen AX und AX' vorstellen. Denkt man sich zu diesem einen Puncte noch einen zweiten, dessen Coordinaten wir wie bei dem ersten, nur dass den Zeichen noch der Index 1 angehängt wird, andeuten werden, so ist in Bezug auf diese zwei Puncte, wenn a, a' die schiefen, c, c' die senkrechten Projectionszahlen der vom ersten Puncte nach dem zweiten hinlaufenden Richtung und r den Abstand der beiden Puncte von einander anzeigen, erstlich den Gleichungen (3) gemäss

(108. c.) $$\frac{x_1-x}{r}=a\,, \quad \frac{x_1'-x'}{r}=a'\,; \quad \frac{u_1-u}{r}=c\,, \quad \frac{u_1'-u'}{r}=c'\,,$$

indem die dortigen dritten Gleichungen von jeder Art $\frac{x_1''-x''}{r}=c''$ und $\frac{u_1''-u''}{r}=c$ hier zufolge der ersten Gleichungen (108. a. und b.) verloren gehen; und sodann noch im Sinne der Gleichungen (20), (19), (15. b.) und (48. c. oder d.):

(108. d.) $$\begin{cases} r^2=(x_1-x)(u_1-u)+(x_1'-x')(u_1'-u')\,, \\ r=a(u_1-u)+a'(u_1'-u')=c(x_1-x)+c'(x_1'-x')\,; \\ u_1-u=x_1-x+(x_1'-x')\cos W\,, \quad u_1'-u'=(x_1-x)\cos W+x_1'-x'\,; \\ (x_1-x)\sin^2 W=u_1-u-(u_1'-u')\cos W\,, \quad (x_1'-x')\sin^2 W=u_1'-u'-(u_1-u)\cos W\,; \end{cases}$$

ferner bleiben an diesem Systeme die von Richtungen und Puncten, die nicht schon zugleich mit dem Systeme gegeben sind, unabhängigen Gleichungen:

(108. e.) $$\begin{cases} \sin W'=\sin W''=\sin \mathfrak{W}'=\sin \mathfrak{W}''=1\,, \quad \sin W=\sin \mathfrak{W}\,, \quad \cos W=-\cos \mathfrak{W}\,; \\ h=\sin W\,, \quad \mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1'=\sin W\,, \quad \mathfrak{C}_2''=1\,; \\ \mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1'=\frac{1}{\sin W}\,, \quad \mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}'=-\operatorname{cotg} W\,, \quad \mathfrak{A}''=\mathfrak{A}_2=\mathfrak{A}_1''=\mathfrak{A}_2'=0\,, \quad \mathfrak{A}_2''=1 \end{cases}$$

wahr, welche schon in der vorigen Nummer angegeben worden sind und mit deren Hilfe sich Gleichungen, wie die (48. a., b.) oder (48. c., d.) sind, den jetzigen Umständen gemäss verändern lassen.

Denkt man sich neben dem bisher betrachteten Systeme noch ein zweites, aus den Axen A Y, A Y′, A Y″ zusammengesetztes, dessen Ebene Y A Y′ mit der X A X′ des vorigen in eine und dieselbe Ebene fällt, und dessen Axe A Y″ senkrecht auf seinen beiden andern A Y und A Y′ steht, so fallen alle Puncte, die in der Ebene X A X′ liegen, auch in die Y A Y′, und Richtungen, die mit der Ebene X A X′ parallel sind, laufen auch mit der Y A Y′ parallel; daher bleiben alle vorstehenden Gleichungen auch noch an diesem zweiten Systeme wahr, wobei wir wie immer zum Unterschiede die Grundzeichen W_1, k, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$, b, d, y, v an die Stelle derer W, h, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, a, c, x, u setzen werden, während dieselben Abzeichen an beiden dieselben Beziehungen zu den Axen A Y, A Y′, A Y″ und A X, A X′, A X″ sammt deren Polaraxen anzeigen sollen. Behalten wir zwischen diesen zwei besondern Systemen alle die Bezeichnungen wieder bei, welche in Nr. 23. für zwei allgemeine festgesetzt worden sind, so hat man, weil A X″ und A Y″ mit einander parallel laufen, und den auf erster Zeile stehenden Gleichungen (108. e.) zur Folge $\cos W' = \cos W'' = 0$ ist, bezüglich der Richtung A Y″ an dem Systeme A X, A X′, A X″ nach Aussage der Gleichungen (93. a. und c.):

$$A_2 = 0\,,\quad A_2' = 0 \quad \text{und} \quad C_2 = 0\,,\quad C_2' = 0\,,\quad \text{so wie } A_2'' = C_2'' = \pm 1 \qquad \textbf{(109. a.)}$$

nach Aussage der Gleichung (93. e.), während bezüglich der Richtung A X″ an dem Systeme A Y, A Y′, A Y″ in analoger Weise ist:

$$B_2 = 0\,,\quad B_2' = 0 \quad \text{und} \quad D_2 = 0\,,\quad D_2' = 0\,,\quad \text{so wie } B_2'' = D_2'' = \pm 1\,; \qquad \textbf{(109. b.)}$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere genommen werden muss, je nachdem die parallelen Richtungen A X″ und A Y″ nach einerlei oder nach entgegengesetzter Seite des Raumes hinzielen; ferner finden zwischen zwei so beschaffenen Systemen, wo zwei Axen des einen immer in einer Coordinatenebene des andern liegen, wenn man die ersten Gleichungen (108. a.) auf diese Axen in Anwendung bringt, noch folgende Werthbestimmungen statt:

$$A'' = A_1'' = C'' = C_1'' = 0 \quad \text{und} \quad B'' = B_1'' = D'' = D_1'' = 0\,. \qquad \textbf{(109. c.)}$$

Da die zu den zwei hier betrachteten Grundsystemen gehörigen Polarsysteme wieder in dem Falle sich befinden, dass ihre Axen A $\mathfrak{X}''$ und A $\mathfrak{Y}''$, welche mit denen A X″ und A Y″ zusammen fallen, senkrecht auf der Ebene stehen, in welcher X A X′ und Y A Y′ liegen, während ihre Coordinatenebenen $\mathfrak{X}$ A $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{Y}$ A $\mathfrak{Y}'$ in die gleiche Ebene fallen, so bleiben zwischen je zweien, aus diesen Doppelsystemen herausgehobenen einfachen Systemen wieder die, denen unter (109. a. bis c.) gegebenen analogen Beziehungen wahr; diese Gleichungen finden daher noch statt, wenn man statt der Grundzeichen A, B, C, D die $\mathit{\Lambda}$, B, $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$ setzt, oder auch diese oder jene mit Klammern umgiebt. Diesen Bestimmungen gemäss gehen nun die in Nr. 34. mitgetheilten Gleichungen für Richtungen, die mit der durch X A X′ gelegten Ebene parallel laufen, für welche der ersten Gleichung (108. a.) zur Folge immer $a'' = c'' = 0$ ist, über in:

$$\left.\begin{array}{l}
d = C\,a + C'a' = D\,a + D_1\,a'\,,\quad d' = C_1\,a + C_1'\,a' = D'a + D_1'\,a' \;\text{ und} \\
c = D\,b + D'b' = C\,b + C_1\,b'\,,\quad c' = D_1\,b + D_1'b' = C'b + C_1'\,b'\,; \\
d = A\,c + A'c'\,,\quad d' = A_1\,c + A_1'\,c' \;\text{ und }\; c = B\,d + B'\,d'\,,\quad c' = B_1\,d + B_1'\,d'\,; \\
b = B\,a + B_1\,a'\,,\quad b' = B'\,a + B_1'\,a' \;\text{ und }\; a = A\,b + A_1\,b'\,,\quad a' = A'\,b + A_1'\,b'\,; \\
a\sin W = (\mathit{B})d + (\mathit{B}')d',\ a'\sin W = (\mathit{B}_1)d + (\mathit{B}_1')d' \;\text{ und }\; b\sin W_1 = (\mathit{\Lambda})c + (\mathit{\Lambda}')c',\ b'\sin W_1 = (\mathit{\Lambda}_1)c + (\mathit{\Lambda}_1')c'\,;
\end{array}\right\} \textbf{(109. d.)}$$

und die in Nr. 35. gegebenen gehen für Puncte, die in der Ebene X A X′ liegen, in die über, welche sich aus denen (109. d.) ergeben, wenn man an die Stelle von a, b, c, d und a′, b′,

c', d' treten lässt x, y, u, v und x', y', u', v', welche wir eben deswegen nicht herzuschreiben brauchen.

Berücksichtigt man schliesslich, dass bei den hier vorgeführten besondern Doppelsystemen laut der ersten der auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (108. e.)

(110. a.) $$\mathrm{h} = \sin \mathrm{W}\ ,\quad (\mathrm{h}) = \sin \mathfrak{W} \quad \text{und} \quad \mathrm{k} = \sin \mathrm{W}_1\ ,\quad (\mathrm{k}) = \sin \mathfrak{W}_1$$

ist, und kraft der übrigen auf derselben Zeile stehenden

(110. b.) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'_1 = \sin \mathrm{W}\ ,\quad \mathfrak{E}''_2 = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_1 = \sin \mathrm{W}_1\ ,\quad \mathfrak{D}''_2 = 1\ ,$$

so gelangt man mit Zuziehung der Gleichungen (109. a. bis c.), und die auf diese folgende Verallgemeinerung beachtend, zu der Einsicht, dass die Gleichungen (87) an unsern jetzigen zwei Doppelsystemen für Richtungen, die in der Ebene XAX' liegen, sich verwandeln in:

(110. c.) $$\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{C} = \mathrm{D} = (\mathrm{A}) \sin \mathrm{W} = (\mathrm{B}) \sin \mathrm{W}_1\ , & \mathrm{C}' = \mathrm{D}_1 = (\mathrm{A}') \sin \mathrm{W} = (\mathrm{B}_1) \sin \mathrm{W}_1\ , \\
\mathrm{C}_1 = \mathrm{D}' = (\mathrm{A}_1) \sin \mathrm{W} = (\mathrm{B}') \sin \mathrm{W}_1\ , & \mathrm{C}'_1 = \mathrm{D}'_1 = (\mathrm{A}'_1) \sin \mathrm{W} = (\mathrm{B}'_1) \sin \mathrm{W}_1\ ; \\
\Gamma = \Delta = (A) \sin \mathrm{W} = (B) \sin \mathrm{W}_1\ , & \Gamma' = \Delta_1 = (A') \sin \mathrm{W} = (B_1) \sin \mathrm{W}_1\ , \\
\Gamma_1 = \Delta' = (A_1) \sin \mathrm{W} = (B') \sin \mathrm{W}_1\ , & \Gamma'_1 = \Delta'_1 = (A'_1) \sin \mathrm{W} = (B'_1) \sin \mathrm{W}_1\ ; \\
(\mathrm{C}) = (\Delta) = \mathrm{A} \sin \mathrm{W} = B \sin \mathrm{W}_1\ , & (\mathrm{C}') = (\Delta_1) = \mathrm{A}' \sin \mathrm{W} = B_1 \sin \mathrm{W}_1\ , \\
(\mathrm{C}_1) = (\Delta') = \mathrm{A}_1 \sin \mathrm{W} = B' \sin \mathrm{W}_1\ , & (\mathrm{C}'_1) = (\Delta'_1) = \mathrm{A}'_1 \sin \mathrm{W} = B'_1 \sin \mathrm{W}_1\ ; \\
(\mathrm{D}) = (\Gamma) = \mathrm{B} \sin \mathrm{W}_1 = A \sin \mathrm{W}\ , & (\mathrm{D}') = (\Gamma_1) = \mathrm{B}' \sin \mathrm{W}_1 = A_1 \sin \mathrm{W}\ , \\
(\mathrm{D}_1) = (\Gamma') = \mathrm{B}_1 \sin \mathrm{W}_1 = A' \sin \mathrm{W}\ , & (\mathrm{D}'_1) = (\Gamma'_1) = \mathrm{B}'_1 \sin \mathrm{W}_1 = A'_1 \sin \mathrm{W}\ ;
\end{array}\right.$$

ferner dass die Gleichungen (88. a. bis b.) hier die folgende Form annehmen:

(110. d.) $$\left\{\begin{array}{ll}
\pm \mathrm{B} \sin \mathrm{W}_1 = \mathrm{A}'_1 \sin \mathrm{W}\ , & \mp \mathrm{B}' \sin \mathrm{W}_1 = \mathrm{A}' \sin \mathrm{W}\ , \\
\mp \mathrm{B}_1 \sin \mathrm{W}_1 = \mathrm{A}_1 \sin \mathrm{W}\ , & \pm \mathrm{B}'_1 \sin \mathrm{W}_1 = \mathrm{A} \sin \mathrm{W}\ ; \\
\pm B \sin \mathfrak{W}_1 = A'_1 \sin \mathfrak{W}\ , & \mp B' \sin \mathfrak{W}_1 = A' \sin \mathfrak{W}\ , \\
\mp B_1 \sin \mathfrak{W}_1 = A_1 \sin \mathfrak{W}\ , & \pm B'_1 \sin \mathfrak{W}_1 = A \sin \mathfrak{W}\ ; \\
\pm (\mathrm{B}) \sin \mathfrak{W}_1 = (A'_1) \sin \mathrm{W}\ , & \mp (\mathrm{B}') \sin \mathfrak{W}_1 = (A') \sin \mathrm{W}\ , \\
\mp (\mathrm{B}_1) \sin \mathfrak{W}_1 = (A_1) \sin \mathrm{W}\ , & \pm (\mathrm{B}'_1) \sin \mathfrak{W}_1 = (A) \sin \mathrm{W}\ ; \\
\pm (B) \sin \mathrm{W}_1 = (\mathrm{A}'_1) \sin \mathfrak{W}\ , & \mp (B') \sin \mathrm{W}_1 = (\mathrm{A}') \sin \mathfrak{W}\ , \\
\mp (B_1) \sin \mathrm{W}_1 = (\mathrm{A}_1) \sin \mathfrak{W}\ , & \pm (B'_1) \sin \mathrm{W}_1 = (\mathrm{A}) \sin \mathfrak{W}\ ;
\end{array}\right.$$

wobei noch zu bemerken ist erstlich, dass von den doppelten Vorzeichen immer nur die obern oder nur die untern zu nehmen sind, je nachdem die zwei Systeme bei gleicher Richtung der senkrechten Axen einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben, während die Vorzeichen im Gegenfalle umgekehrt zu nehmen sind; zweitens, dass in allen diesen Gleichungen $\sin \mathfrak{W} = \sin \mathrm{W}$ und $\sin \mathfrak{W}_1 = \sin \mathrm{W}_1$ ist, als die allgemeine Eigenschaft senkrechter Systeme, welche schon in der vorigen Nummer angezeigt worden ist; drittens, dass aus den letzten unter jedem Buchstaben stehenden Gleichungen noch die folgenden Gleichungen sich ergeben:

(110. e.) $$\left\{\begin{array}{ll}
\pm \sin \mathrm{W}_1 = (\mathrm{A}\,\mathrm{A}'_1 - \mathrm{A}'\,\mathrm{A}_1) \sin \mathrm{W}\ , & \pm \sin \mathrm{W} = (\mathrm{B}\,\mathrm{B}'_1 - \mathrm{B}'\,\mathrm{B}_1) \sin \mathrm{W}_1\ ; \\
\pm \sin \mathfrak{W}_1 = (A A'_1 - A' A_1) \sin \mathfrak{W}\ , & \pm \sin \mathfrak{W} = (B B'_1 - B' B_1) \sin \mathfrak{W}_1\ ; \\
\pm \sin \mathfrak{W}_1 = [(A)(A'_1) - (A')(A_1)] \sin \mathrm{W}\ , & \pm \sin \mathrm{W} = [(\mathrm{B})(\mathrm{B}'_1) - (\mathrm{B}')(\mathrm{B}_1)] \sin \mathfrak{W}_1\ ; \\
\pm \sin \mathrm{W}_1 = [(\mathrm{A})(\mathrm{A}'_1) - (\mathrm{A}')(\mathrm{A}_1)] \sin \mathfrak{W}\ , & \pm \sin \mathfrak{W} = [(B)(B'_1) - (B')(B_1)] \sin \mathrm{W}_1\ ;
\end{array}\right.$$

endlich, dass die Gleichungen (90. a. bis d.) hier werden:

$$\left.\begin{array}{llll} \pm(\mathrm{D})=(\mathrm{C}_1'), & \mp(\mathrm{D}')=(\mathrm{C}'), & \mp(\mathrm{D}_1)=(\mathrm{C}_1), & \pm(\mathrm{D}_1')=(\mathrm{C}); \\ \pm(\varDelta)=(\Gamma_1'), & \mp(\varDelta')=(\Gamma'), & \mp(\varDelta_1)=(\Gamma_1), & \pm(\varDelta_1')=(\Gamma); \\ \pm\,\mathrm{D}=\Gamma_1', & \mp\,\mathrm{D}'=\Gamma', & \mp\,\mathrm{D}_1=\Gamma_1, & \pm\,\mathrm{D}_1'=\Gamma; \\ \pm\,\varDelta=\mathrm{C}_1', & \mp\,\varDelta'=\mathrm{C}', & \mp\,\varDelta_1=\mathrm{C}_1, & \pm\,\varDelta_1'=\mathrm{C}; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(110. f.)}$$

während die letzten unter jedem der hier angezogenen Buchstaben stehenden Gleichungen hier noch die geben:

$$\left.\begin{array}{ll} \pm\sin\mathrm{W}_1\sin\mathfrak{W}=(\mathrm{C})(\mathrm{C}_1')-(\mathrm{C}')(\mathrm{C}_1), & \pm\sin\mathrm{W}\sin\mathfrak{W}_1=(\mathrm{D})(\mathrm{D}_1')-(\mathrm{D}')(\mathrm{D}_1), \\ \pm\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathrm{W}=(\Gamma)(\Gamma_1')-(\Gamma')(\Gamma_1), & \pm\sin\mathfrak{W}\sin\mathrm{W}_1=(\varDelta)(\varDelta_1')-(\varDelta')(\varDelta_1), \\ \pm\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathfrak{W}=\Gamma\,\Gamma_1'-\Gamma'\,\Gamma_1, & \pm\sin\mathrm{W}_1\sin\mathrm{W}=\mathrm{D}\,\mathrm{D}_1'-\mathrm{D}'\,\mathrm{D}_1, \\ \pm\sin\mathrm{W}_1\sin\mathrm{W}=\mathrm{C}\,\mathrm{C}_1'-\mathrm{C}'\,\mathrm{C}_1, & \pm\sin\mathfrak{W}_1\sin\mathfrak{W}=\varDelta\,\varDelta_1'-\varDelta'\,\varDelta_1, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(110. g.)}$$

in welchen wiederum $\sin\mathfrak{W}=\sin\mathrm{W}$ und $\sin\mathfrak{W}_1=\sin\mathrm{W}_1$ genommen werden darf. Diess berücksichtigend gewahrt man, dass die auf der rechten Seite der Gleichungen (110. e.) in Klammern eingeschlossenen Ausdrücke bei den vordern immer den Quotienten $\pm\frac{\sin\mathrm{W}_1}{\sin\mathrm{W}}$, bei den hintern den $\pm\frac{\sin\mathrm{W}}{\sin\mathrm{W}_1}$ darstellen, und dass die auf den rechten Seiten der Gleichungen (110. g.) stehenden Ansdrücke stets dem Producte $\pm\sin\mathrm{W}\sin\mathrm{W}_1$ gleich sind, wo hier, wie überall, hinsichtlich der doppelten Vorzeichen die vorhin gegebene Regel beachtet werden muss. Bei näherer Untersnchung der hier erhaltenen Gleichungen wird man leicht gewahr, dass die (110. d.) schon in denen (110. c.) und (110. f.) enthalten sind, so wie umgekehrt die (110. f.) mittelst der (110. c.) aus denen (110. d.) hervor geholt werden können, wie denn auch die (110. e.) und (110. g.) mittelst derer (110. c.) sich in einander überführen lassen.

Geht man die in dieser Nummer erhaltenen Gleichungen einzeln durch, so wird man gewahr, dass mit Ausnahme der in (108. e.) enthaltenen:

$$\mathfrak{C}_2''=1\,,\quad \mathfrak{A}_2''=1\,,\quad \mathfrak{A}''=0\,,\quad \mathfrak{A}_2=0\,,\quad \mathfrak{A}_1''=0\,,\quad \mathfrak{A}_2'=0$$

und der in (109. a. bis c.) enthaltenen alle die Grössen verschwunden sind, welche auf die senkrechte Axe AX″ oder AY″ irgend einen Bezug haben; man kann daher in solchen Systemen, so lange sie blos zur Untersuchung von solchen Richtungen und Puncten, die in der gemeinschaftlichen Coordinatenebene liegen, benutzt werden, die dritten Axen AX″, AY″ ganz ausser Spiel lassen und die Systeme so auffassen, als wären sie blos aus den Axen AX und AX′, AY und AY′ zusammengesetzt. So aufgefasste Coordinatensysteme, welche indessen nur da eine Anwendung finden können, wo alle in die Untersuchung eingehenden Puncte in einer und derselben Ebene liegen und alle darin eingehenden Richtungen ebenfalls in dieser Ebene liegen oder doch mit ihr parallel laufen, und deren zwei Axen in dieser Ebene liegen müssen, werden wir in der Folge *ebene Systeme* nennen, während die aus drei Axen bestehenden zum Unterschied von diesen *räumliche* oder *körperliche Systeme* heissen sollen. Umgekehrt kann man in jedem Augenblicke, wenn der Hinzutritt von Puncten oder Richtungen, die nicht mehr die vorausgesetzte Eigenschaft besitzen, es nöthig machen sollte, ebene Systeme wieder als räumliche ansehen, deren dritte Axe auf den zwei andern, das ebene System bildenden, senkrecht steht; dann aber muss man statt der in dieser Nummer stehenden besondern Gleichungen die früher gegebenen allgemeinen nehmen, und in diesen die eben erst berührten Ausnahme-Gleichungen, welche im

ebenen Systeme gar nicht in Betrachtung kommen können, wieder zur Geltung kommen lassen. So behalten dann alle am ebenen Systeme aufgefundenen Resultate an dem statt seiner eingeführten senkrechten räumlichen noch ihre volle Gültigkeit, was aber nicht mehr der Fall wäre, so wie die dritte Axe des räumlichen Systems nicht mehr senkrecht auf den beiden andern, welche zuvor dem ebenen Systeme angehörten, stehend angenommen würde. Ja sogar der Begriff von Coordinate lässt sich unter solchen Umständen von der dritten Axe AX'' völlig unabhängig machen und im ebenen Systeme darstellen; denn da hier blos Coordinaten an den Grundaxen AX, AX' zur Sprache kommen und diese im senkrechten Systeme durch Ebenen abgeschnitten werden, welche durch die Puncte gehen, und welche hier immer senkrecht auf der Ebene des ebenen Systems stehen und entweder den Axen AX, AX' parallel laufen oder auf denselben senkrecht stehen, so lassen sich eben so gut dafür auch Linien substituiren, die durch die Puncte gehen und den Axen AX, AX' parallel laufen oder auf ihnen senkrecht stehen, aus dem Grunde, weil diese Puncte immer nur in der Ebene des ebenen Systems selber liegen.

59) Bilden in dem senkrechten Systeme, dessen eine Axe senkrecht auf den zwei andern steht, auch noch diese beiden andern Axen einen rechten Winkel mit einander, so macht in dem so beschaffenen Systeme jede Axe mit den zwei andern rechte Winkel, weshalb wir das so ins Besondere gezogene senkrechte System ein rechtwinkliges nennen wollen. In dem rechtwinkligen Systeme ist seiner Definition zur Folge

(111. a.) $$\sin W = \sin W' = \sin W'' = 1\ ,\quad \cos W = \cos W' = \cos W'' = 0\,,$$

wenn seine Axen AX, AX', AX'' sind, und W, W', W'' die Winkel XAX', XAX'', $X'AX''$ bedeuten. Weil im rechtwinkligen System schon jede Axe senkrecht auf den beiden andern steht, so hat es kein Polarsystem, oder besser gesagt, es ist selber sein Polarsystem, weshalb bei ihm die Winkel, welche im schiefwinkligen Systeme durch $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ bezeichnet worden sind, keine andern als die W, W', W'' sind, und man daher diese letztern mit den erstern in den Gleichungen (111. a.) vertauschen kann. Darum gehen bei ihm die Gleichungen (42), (41) und (36) über in:

(111. b.) $$\begin{cases} h = (h) = 1\ ,\quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}''_2 = \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}''_2 = 1\,. \\ \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}'_2 = \mathfrak{A}''_1 = 0\,. \end{cases}$$

Die für jegliche Richtungen und Puncte gültigen Gleichungen (12) und (15. a.) sowohl, als die (49. a.) und (49. b.) verwandeln sich diesen Bestimmungen gemäss in:

$$a = c,\quad a' = c',\quad a'' = c''\quad \text{nnd}\quad x = u,\quad x' = u',\quad x'' = u'',$$

wie denn in der That die beiderlei Projectionszahlen und Coordinaten in diesem Systeme die Natur der senkrechten annehmen; eben deswegen fällt aber in diesem Systeme der Unterschied zwischen schiefen und senkrechten Coordinaten oder Projectionszahlen ganz weg, und deren doppelte Bezeichnungsweise wird völlig überflüssig, so dass wir in der Folge die sämmtlichen Projectionszahlen blos durch c, c', c'', die sämmtlichen Coordinaten blos durch u, u', u'' vorstellen und das Beiwort schief oder senkrecht weglassen können. Thun wir diess, so nehmen die Gleichungen (11), (17) und (14) die nachstehende Form an:

(111. c.) $$1 = c^2 + c'^2 + c''^2,\quad r^2 = u^2 + u'^2 + u''^2,\quad r = cu + c'u' + c''u'',$$

wenn u, u', u'' die Coordinaten von irgend einem Puncte, r dessen absolute Entfernung von der Coordinatenspitze A, und c, c', c'' die Projectionszahlen bedeuten, welche die von A nach

diesem Puncte hinzielende Richtung an den Axen AX, AX', AX'' giebt. Die Gleichungen (9. a. und b.), (20) und (18) werden hier:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = c c_1 + c' c'_1 + c'' c''_1, \quad r^2 = (u_1 - u)^2 + (u'_1 - u')^2 + (u''_1 - u'')^2 \\ \text{und} \quad r\cos\theta = c(u_1 - u) + c'(u'_1 - u') + c''(u''_1 - u''), \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (111. d.)$$

wenn die mit dem Index 1 versehenen Zeichen einem andern Puncte und der von der Coordinatenspitze nach ihm hinzielenden Richtung angehören, und θ den Winkel bezeichnet, welchen die beiden so entstehenden Richtungen mit einander machen, r aber die absolute Entfernung der beiden Puncte von einander vorstellt.

Denkt man sich mit dem einen bisher betrachteten rechtwinkligen Coordinatensystem noch ein zweites rechtwinkliges verbunden, dessen Axen AY, AY', AY'' sind, und bezeichnet man die Coordinaten eines Punctes und die Projectionszahlen einer Richtung an diesem Systeme eben so wie die an dem vorigen, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der Grundzeichnn c, u die d, v setzt, so bleiben die Gleichungen (111. a. bis c.) auch noch an dem zweiten Systeme wahr, wenn man in ihnen statt der einen Grundzeichen die andern nimmt. Was ferner die für allgemeine Doppelsysteme in Nr. 44. aufgestellten Zeichen betrifft, wodurch die Projectionszahlen der Axen eines jeden einfachen Systems in einem der zwei Doppelsysteme an den Axen eines zum andern Doppelsystem gehörigen einfachen Systems von einander unterschieden werden, so hat man zunächst zu bedenken, dass bei zwei rechtwinkligen Systemen kein Polarsystem von seinem Grundsystem verschieden ist, indem die gleich accentuirten Axen beider in einander liegen, und dass daher die mit gleichen Abzeichen versehenen die gleichen sind, sie mögen einem der Grundzeichen A, $\mathcal{A}$, (B), ($\boldsymbol{B}$) oder einem der Grundzeichen B, $\boldsymbol{B}$, (A), ($\mathcal{A}$), so wie auch einem der Grundzeichen C, $\boldsymbol{\Gamma}$, (D), ($\varDelta$) oder einem der Grundzeichen D, $\varDelta$, (C), ($\boldsymbol{\Gamma}$) angehören, und dass eben deshalb die drei letzten von je vieren der hier neben einander geschriebenen durch das erste ersetzt werden kann, so dass blos die A, B, C, D beibehalten zu werden brauchen; bedenkt man ferner, dass am rechtwinkligen Systeme die schiefen und senkrechten Projectionszahlen in einander übergehen, und dass daher die mit gleichen Abzeichen versehenen die gleichen sind, sie mögen das Grundzeichen A, B oder das C, D an sich tragen: so sieht man ein, dass man hier mit den zwei letztern allein ausreicht, wenn die mit verschiedenen Abzeichen versehenen in der Bedeutung genommen werden, die ihnen in Nr. 23. und 24. gegeben worden ist, und selbst zwischen diesen finden noch die schon in den Gleichungen (31) ausgesprochenen Abhängigkeiten statt; es ist nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} C = D, & C' = D_1, & C'' = D_2; \\ C_1 = D', & C'_1 = D'_1, & C''_1 = D'_2; \\ C_2 = D'', & C'_2 = D''_1, & C''_2 = D''_2, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (111. e.)$$

so dass sich die sämmtlichen Projectionszahlen blos durch die mit dem Grundzeichen C versehenen ersetzen lassen. In die Gleichungen (111. e.) gehen auch alle in (86. a. und b.) und (87) aufgestellten über, so wie sich umgekehrt aus diesen letztern der Uebergang der verschiedenen Projectionszahlen in einander ableiten lässt. Die angezeigten Uebergänge und die Gleichungen (111. e.) berücksichtigend, ziehen sich immer je vier von den in (59. a. und b.) bis (62. a. und b.) mitgetheilten Gleichungen in eine einzige zusammen, und das Gleiche gilt auch von den (64. a. und b.) bis (67. a. und b.) aufgestellten. Die erstern reduciren sich im Ganzen auf:

(111. f.)
$$\begin{cases} d = C c + C' c' + C'' c'', \quad d' = C_1 c + C'_1 c' + C''_1 c'', \quad d'' = C_2 c + C'_2 c' + C''_2 c''; \\ c = C d + C_1 d' + C_2 d'', \quad c' = C' d + C'_1 d' + C'_2 d'', \quad c'' = C'' d + C''_1 d' + C''_2 d''; \\ \text{die andern auf:} \\ v = C u + C' u' + C'' u'', \quad v' = C_1 u + C'_1 u' + C''_1 u'', \quad v'' = C_2 u + C'_2 u' + C''_2 u''; \\ u = C v + C_1 v' + C_2 v'', \quad u' = C' v + C'_1 v' + C'_2 v'', \quad u'' = C'' v + C''_1 v' + C''_2 v''. \end{cases}$$

Endlich ziehen sich die von (88. a. bis d.) und von (90. a. bis d.) stehenden 16 Aggregate von je neun Gleichungen in ein einziges solches Aggregat zusammen, nämlich auf das folgende:

(111. g.)
$$\begin{cases} \pm C = C'_1 C''_2 - C''_1 C'_2, \quad \mp C_1 = C' C''_2 - C'' C'_2, \quad \pm C_2 = C' C''_1 - C'' C'_1, \\ \mp C' = C_1 C''_2 - C''_1 C_2, \quad \pm C'_1 = C C''_2 - C'' C_2, \quad \mp C'_2 = C C''_1 - C'' C_1, \\ \pm C'' = C_1 C'_2 - C'_1 C_2, \quad \mp C''_1 = C C'_2 - C' C_2, \quad \pm C''_2 = C C'_1 - C' C_1, \end{cases}$$

und es ist, wie immer, von den doppelten Vorzeichen überall nur das obere oder nur das untere zu nehmen, je nachdem die zwei rechtwinkligen Systeme, auf welche sich dieselben beziehen, unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf besitzen.

Da im rechtwinkligen Coordinatensysteme die schiefen Projectionszahlen einer Richtung sich nicht mehr von den senkrechten derselben Richtung unterscheiden lassen, und also dieselben Zahlen n, n', n'', welche das Verhalten der senkrechten Projectionszahlen c, c', c'' einer Richtung zu einander anzeigen, zugleich auch das der schiefen Projectionszahlen zu einander aussprechen, so tritt im rechtwinkligen Coordinatensysteme stets der in Nr. 21. hinter der Gleichung (25. a.) besprochene Fall ein; es ist nämlich in Bezug auf jede Richtung bei diesem Systeme nicht nur:

$$a : a' : a'' : c : c' : c'' = m : m' : m'' : n : n' : n'',$$

sondern man hat noch überdiess bei ihm:

$$m = n\,, \quad m' = n'\,, \quad m'' = n'',$$

so wie auch

$$a = c\,, \quad a' = c'\,, \quad a'' = c''$$

zu nehmen, weshalb bei ihm die letzte Gleichung (25. b.) in Bezug auf jede Richtung

$$\mu = \nu = \frac{1}{(n^2 + n'^2 + n''^2)^{\frac{1}{2}}}$$

wird, und in Folge dessen liefern bei ihm die Gleichungen (24):

(111. h.) $$a = c = \frac{n}{(n^2 + n'^2 + n''^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad a' = c' = \frac{n'}{(n^2 + n'^2 + n''^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad a'' = c'' = \frac{n''}{(n^2 + n'^2 + n''^2)^{\frac{1}{2}}},$$

welche zeigen, wie sich die Kosinuse der Winkel, die irgend eine Richtung mit den drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, finden lassen, wenn drei Zahlen gegeben sind, die unter sich dieselben Verhältnisse wie jene drei Kosinuse einhalten.

In dieser Nummer sind alle zum rechtwinkligen Coordinatensysteme erforderlichen Grundgleichungen aufgestellt worden, deren Anzahl, verglichen mit der beim schiefwinkligen Coordinatensysteme erhaltenen, ausserordentlich gering ist. Dagegen giebt diese Vergleichung zu erkennen, dass der Bau dieser vielen Gleichungen fast durchweg eben so einfach ist, wie der jener wenigen, und die später noch folgenden Anwendungen der vielen Gleichungen des schiefwinkligen Systems werden es ausser Zweifel setzen, dass bei solchen Anwendungen die vielerlei Ausdrücke sich nicht sowohl unter einander zu einem unförmlichen Klumpen zusammensetzen,

als vielmehr, wie im Contretanze die Personenpaare, sich mit einander verbinden und wieder von einander ablösen, um nirgends eine, scheinbar unvermeidliche, Verwirrung entstehen zu lassen. Die Behandlung am schiefwinkligen Systeme stellt noch entschiedener, als die am rechtwinkligen, an den Arbeiter die Forderung, dass er seinen Gegenstand scharf überblicke und im Zügel halte; sie verlangt mit einem Worte einen gewandtern Rechner, bildet ihn aber auch.

§. 6.

Bestimmung der Projectionen durch Coordinaten.

60) In einem schiefwinkligen Coordinatensysteme bildet jede seiner Grundaxen mit der ihr gegenüberliegenden Grund-Coordinatenebene ein schiefes Projectionssystem, und mit der ihr gegenüberliegenden Polar-Coordinatenebene ein senkrechtes Projectionssystem. Eben so bildet jede seiner Polaraxen mit der ihr gegenüberliegenden Polar-Coordinatenebene ein schiefes, und mit der dieser entsprechenden Grund-Coordinatenebene ein senkrechtes Projectionssystem. Es liegen also in jedem schiefwinkligen Doppelsysteme zwölf Projectionssysteme, von denen die eine Hälfte senkrechte, die andere Hälfte schiefe sind; man kann indessen die Anzahl der Projectionssysteme noch viel grösser werden lassen, wenn man auch solche Ebenen, die durch eine Grundaxe und eine Polaraxe hindurch gehen, als Projectionsebenen ins Auge fassen, und zu Projectionsaxen auch die Durchschnitte einer Grund-Coordinatenebene und einer Polar-Coordinatenebene nehmen will. Wir beschränken uns aber hier auf die Betrachtung von Projectionssystemen der ersten Art.

Bleiben wir zunächst bei demjenigen schiefen Projectionssysteme stehen, dessen Axe die Grund-Coordinatenaxe AX'', und dessen Ebene die Grund-Coordinatenebene XAX' ist, und betrachten wir in diesem Projectionssysteme irgend einen Punct O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten an den Grundaxen AX, AX', AX'' durch x, x', x'' und u, u', u'' bezeichnet werden sollen, so ist den oben (§. 1. Nr. 2.) gegebenen Definitionen zur Folge x'' die zur Projectionsaxe AX'' gehörige Ordinate des Punctes O in diesem Projectionssysteme, und die Projection P des Punctes O auf die Projectionsebene XAX' hat im Coordinatensysteme die schiefen Coordinaten x, x', 0, weil diese Projection, der oben (§. 1. Nr. 8.) von ihr gegebenen Definition gemäss, in der Ebene XAX' und zugleich in der Geraden liegt, die durch den Punct O parallel mit der Axe AX'' läuft. Was aber in Beziehung auf diesen einen Punct O gesagt worden ist, gilt eben so von jedem andern; seine zur Projectionsaxe AX'' gehörige Ordinate ist immer dessen schiefe Coordinate an der Axe AX'' im Coordinatensysteme und seine Projection auf die Projectionsebene XAX' giebt immer im Coordinatensysteme an den Axen AX und AX' dieselben schiefen Coordinaten wie er selber, an der Axe AX'' aber liefert sie die schiefe Coordinate Null, da sie in der Ebene XAX' liegt. Wenn also x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen AX, AX', AX'' von irgend einem Puncte O sind, dessen Projection auf die Ebene XAX' längs der Axe AX'' wir durch P bezeichnen, so sind

$$x\,,\ x'\,,\ 0$$

die schiefen Coordinaten der Projection P an den gleichen Axen; aus den schiefen Coordinaten

eines Punctes lassen sich aber mit Hilfe der Gleichungen (15. a.) dessen senkrechte finden. So werden die des Punctes O durch die Gleichungen

(112. a.) $\mathfrak{u} = x + x'\cos W + x''\cos W', \quad \mathfrak{u}' = x\cos W + x' + x''\cos W'', \quad \mathfrak{u}'' = x\cos W' + x'\cos W'' + x''$

dargestellt, die der Projection P hingegen werden, wenn man sie durch u, u', u'' bezeichnet, weil ihre zur Axe A X'' gehörige schiefe Coordinate null ist, durch:

(112. b.) $$u = x + x'\cos W, \quad u' = x\cos W + x', \quad u'' = x\cos W' + x'\cos W'',$$

und zieht man die Gleichungen (112. a. und b.) von einander ab, so erhält man:

(112. c.) $$\mathfrak{u} - u = x''\cos W', \quad \mathfrak{u}' - u' = x''\cos W'', \quad \mathfrak{u}'' - u'' = x'',$$

woraus sich wieder die Grössen u, u', u'' durch Coordinaten darstellen lassen. Stellt nun ϱ die Entfernung der Projection P von der Spitze A, d. h. die Länge der zu P gehörigen Speiche vor, und $\alpha, \alpha', \alpha''$; c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Speichenrichtung A P, so ist der Gleichung (17) gemäss:

(113. a.) $$\varrho^2 = x u + x' u'$$

und den Gleichungen (5) zur Folge hat man:

(113. b.) $$\alpha = \frac{x}{\varrho}, \quad \alpha' = \frac{x'}{\varrho}, \quad \alpha'' = 0 \quad \text{und} \quad c = \frac{u}{\varrho}, \quad c' = \frac{u'}{\varrho}, \quad c'' = \frac{u''}{\varrho},$$

setzt man aber in die Gleichung (113. a.) für u und u' einmal ihre Werthe aus den Gleichungen (112. b.) ein, ein andermal ihre aus den Gleichungen (112. c.) entnommenen Werthe, so erhält man:

(113. c.) $$\varrho^2 = x^2 + x'^2 + 2xx'\cos W \quad \text{oder} \quad \varrho^2 = x\mathfrak{u} + x'\mathfrak{u}' - x''(\mathfrak{u}'' - x''),$$

und die letzten drei Gleichungen (113. b.) werden durch das gleiche Verfahren:

(113. d.) $$\begin{cases} c = \dfrac{x + x'\cos W}{\varrho}, \quad c' = \dfrac{x\cos W + x'}{\varrho}, \quad c'' = \dfrac{x\cos W' + x'\cos W''}{\varrho} \\ \text{oder} \\ c = \dfrac{\mathfrak{u} - x''\cos W'}{\varrho}, \quad c' = \dfrac{\mathfrak{u}' - x''\cos W''}{\varrho}, \quad c'' = \dfrac{\mathfrak{u}'' - x''}{\varrho}. \end{cases}$$

Bedeuten jetzt a, a', a'' die schiefen, $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$ die senkrechten Projectionszahlen der Strahlenrichtung A O an den Axen A X, A X', A X'', und stellt r die Entfernung des Punctes O von der Spitze A, d. h. die Länge des zu O gehörigen Strahles vor, so ist in Gemässheit der Gleichungen (5):

(114. a.) $$a = \frac{x}{r}, \quad a' = \frac{x'}{r}, \quad a'' = \frac{x''}{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{u}}{r}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{\mathfrak{u}'}{r}, \quad \mathfrak{c}'' = \frac{\mathfrak{u}''}{r},$$

und hierdurch werden die Gleichungen (113. d.), wenn man in sie für x, x', x'' und $\mathfrak{u}, \mathfrak{u}', \mathfrak{u}''$ ihre aus den Gleichungen (114. a.) sich ergebenden Werthe einsetzt:

(114. b.) $$\begin{cases} c = \dfrac{(a + a'\cos W)\, r}{\varrho}, \quad c' = \dfrac{(a\cos W + a')\, r}{\varrho}, \quad c'' = \dfrac{(a\cos W' + a'\cos W'')\, r}{\varrho} \\ \text{oder} \\ c = \dfrac{(\mathfrak{c} - a''\cos W')\, r}{\varrho}, \quad c' = \dfrac{(\mathfrak{c}' - a''\cos W'')\, r}{\varrho}, \quad c'' = \dfrac{(\mathfrak{c}'' - a'')\, r}{\varrho}, \end{cases}$$

welche nur der Form nach von denen (113. d.) verschieden sind.

Die Gleichungen (113. c.) lehren die Länge der einem beliebigen Puncte O zugehörigen Speiche aus dessen Coordinaten finden, so wie die Gleichungen (113. d.) die Richtung dieser Speiche aus den Coordinaten des Punctes O, oder die (114. b.) aus dessen Strahlenrichtung AO auffinden lassen. Um nun noch die Grösse des Speichenwinkels in allgemeinster Weise zu erhalten, sei AZ irgend eine von A auslaufende, in der Projectionsebene XAX' liegende Richtung, auf welche die Lage der Speichenrichtungen bezogen werden soll, und $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}'_0$, $\mathfrak{a}''_0$ seien die schiefen, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$, $\mathfrak{c}''_0$ die senkrechten Projectionszahlen, welche diese Richtung AZ an den Axen AX, AX', AX'' des Coordinatensystems liefert, so ist erstlich, weil die Richtung AZ in der Coordinatenebene XAX' liegt,

$$\mathfrak{a}''_0 = 0, \qquad \textbf{(115. a.)}$$

und da auch, den Gleichungen (113. b.) zur Folge, $\mathfrak{a}'' = 0$ ist, so liefert, wenn w die Grösse des Winkels bezeichnet, den die Speichenrichtung AP mit der beliebigen, in der Projectionsebene angenommenen Richtung AZ bildet, die Gleichung (9. a. oder b.) zur Bestimmung dieses Winkels die nachstehenden Angaben:

$$\cos w = \mathfrak{c}_0 \mathfrak{a} + \mathfrak{c}'_0 \mathfrak{a}' \quad \text{oder} \quad \cos w = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{c} + \mathfrak{a}'_0 \mathfrak{c}', \qquad \textbf{(115. b.)}$$

wovon die erstere mit Zuziehung der Gleichungen (113. b.) und (114. a.) wird:

$$\cos w = \frac{\mathfrak{c}_0 x + \mathfrak{c}'_0 x'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{(\mathfrak{c}_0 \mathrm{a} + \mathfrak{c}'_0 \mathrm{a}')\, r}{\varrho}, \qquad \textbf{(115. c.)}$$

die letztere dagegen mit Zuziehung derer (113. d.) und (114. a.), wenn man zu gleicher Zeit die auf die Richtung AZ angewandten Gleichungen (112. b.) zur Hilfe nimmt:

$$\cos w = \frac{\mathfrak{a}_0 u + \mathfrak{a}'_0 u' - \mathfrak{c}''_0 x''}{\varrho} \quad \text{und} \quad \cos w = \frac{(\mathfrak{a}_0 \mathrm{c} + \mathfrak{a}'_0 \mathrm{c}' - \mathfrak{c}''_0 \mathrm{a}'')\, r}{\varrho}. \qquad \textbf{(115. d.)}$$

Durch die Gleichungen (115. c. und d.) wird der Kosinus des auf die Richtung AZ bezogenen, zum Puncte O gehörigen Speichenwinkels von den Coordinaten des Punctes O, oder theilweise von ihnen und theilweise von den Projectionszahlen der Strahlenrichtung AO abhängig gemacht; weil aber der Kosinus eines Winkels es unbestimmt lässt, ob dieser Winkel ein hohler oder ein erhabener sei, so lassen die vorstehenden Gleichungen es unentschieden, ob die Speiche nach der einen oder nach der andern Seite von der Richtung AZ hinliege. Diese Unbestimmtheit fällt indessen weg, wenn man die Speichenrichtung nicht blos auf die eine Richtung AZ, sondern gleichzeitig auch noch auf eine zweite AZ' bezieht, die von der AZ verschieden ist, aber, wie diese, in der Projectionsebene XAX' liegt. Solche zwei Richtungen AZ und AZ' kann man sich auf mehr als eine Art durch das Coordinatensystem selber angeben lassen. So wird, wenn man die Axe AX zur Richtung AZ und die Axe AX' zur Richtung AZ' wählt, bei jener:

$$\mathfrak{a}_0 = 1, \quad \mathfrak{a}'_0 = 0, \quad \mathfrak{c}_0 = 1, \quad \mathfrak{c}'_0 = \cos W, \quad \mathfrak{c}''_0 = \cos W'$$

und bei dieser:

$$\mathfrak{a}_0 = 0, \quad \mathfrak{a}'_0 = 1, \quad \mathfrak{c}_0 = \cos W, \quad \mathfrak{c}'_0 = 1, \quad \mathfrak{c}''_0 = \cos W'';$$

daher findet man, bei den vordern Formen stehen bleibend:

$$\left.\begin{aligned} \cos w &= \frac{x + x' \cos W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{u - x'' \cos W'}{\varrho} \\ \text{und} \\ \cos w' &= \frac{x \cos W + x'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \frac{u' - x'' \cos W''}{\varrho}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(115. e.)}$$

wobei w den auf die Richtung A X, w′ den auf die Richtung A X′ sich beziehenden Speichenwinkel vorstellt. Wie so eben die Durchschnitte der Grund-Coordinatenebenen X A X″ und X′A X″ mit der Projectionsebene X A X′ zu den Richtungen A Z und A Z′ genommen worden sind, so hätte man auch die Durchschnitte der Polar-Coordinatenebene 𝔛 A 𝔛″ und 𝔛′A 𝔛″ mit der Projectionsebene X A X′ dazu wählen können; dann wäre bei der ersten noch die Bestimmung $\mathfrak{c}'_0 = 0$, bis der andern noch die Bestimmung $\mathfrak{c}_0 = 0$ zu der $\mathfrak{a}''_0 = 0$ hinzugekommen, wodurch die Grössen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}'_0$, $\mathfrak{a}''_0$ und $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}'_0$, $\mathfrak{c}''_0$ in den beiden Fällen völlig bestimmte geworden wären in der Weise, wie es bei der Betrachtung besonderer Richtungen gezeigt worden ist. Man hätte den dortigen Formeln entsprechend in Bezug auf die jetzige Richtung A Z, wenn man sie nach derselben Seite hinzielen lässt, auf welcher A 𝔛 liegt:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{\sin W}\,, \quad \mathfrak{a}'_0 = -\frac{\cos W}{\sin W} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = \sin W\,, \quad \mathfrak{c}'_0 = 0\,, \quad \mathfrak{c}''_0 = -\sin W'' \cos \mathfrak{W}'$$

und in Bezug auf die jetzige Richtung A Z′, wenn man diese nach derselben Seite hinzielen lässt, auf welcher A 𝔛′ liegt:

$$\mathfrak{a}_0 = -\frac{\cos W}{\sin W}\,, \quad \mathfrak{a}'_0 = \frac{1}{\sin W} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = 0\,, \quad \mathfrak{c}'_0 = \sin W\,, \quad \mathfrak{c}''_0 = -\sin W' \cos \mathfrak{W}''$$

setzen müssen, und demgemäss erhalten:

(115. f.) $$\left\{\begin{aligned} &\cos w = \frac{x \sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{u - u' \cos W + x'' \sin W \sin W'' \cos \mathfrak{W}'}{\varrho \sin W} \\ &\text{und} \\ &\cos w' = \frac{x' \sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \frac{-u \cos W + u' + x'' \sin W \sin W' \cos \mathfrak{W}''}{\varrho \sin W}, \end{aligned}\right.$$

wo wieder w den auf die Richtung A Z, w′ den auf die Richtung A Z′ sich beziehenden Speichenwinkel vorstellt. Diese zwei Beispiele mögen genügen, zu zeigen, wie die Richtungen A Z und A Z′ in sehr verschiedener Weise durch das Coordinatensystem selber vorgezeichnet werden können.

61) Fassen wir jetzt dasjenige senkrechte Projectionssystem ins Auge, dessen Axe die Polaraxe A 𝔛″ und dessen Ebene die Grund-Coordinatenebene X A X′ ist, so sieht man sogleich ein, dass alle in der vorigen Nummer erhaltenen Resultate auch bei diesem Projectionssysteme noch Gültigkeit behalten werden, wenn man es als aus dem Coordinatensystem, dessen Axen A X, A X′ und A 𝔛″ sind, hervorgegangen ansieht. Da indessen dieses Coordinatensystem nicht das ursprünglich gegebene, aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildete ist, so müssen wir jenes als ein zu diesem neu hinzugekommenes auffassen, dessen Axen wir im Allgemeinen durch A Y, A Y′, A Y″ zu bezeichnen gewohnt sind und auch hier wieder so bezeichnen werden. Projiciren wir nun in diesem neuen Systeme irgend einen Punct O parallel mit der Axe A Y″ auf die Ebene Y A Y′, und bezeichnen wir wieder durch P den Punct, in welchem die Ebene Y A Y′ von der durch O hindurch mit der Axe A Y″ parallel gezogenen Geraden getroffen wird; bezeichnen wir ferner durch y, y′, y″ und v, v′, v″ die schiefen und senkrechten Coordinaten des Punctes O an diesem neuen Systeme, während x, x′, x″ und u, u′, u″ die desselben Punctes an den Axen A X, A X′, A X″ vorstellen sollen, so sind

$$y\,,\ y' \ \text{und}\ 0$$

die schiefen Coordinaten des Punctes P an den Axen A Y, A Y′ und A Y″, während wir die senkrechten Coordinaten des Punctes P an den Axen A Y, A Y′, A Y″ durch 𝔳, 𝔳′, 𝔳″ anzeigen

werden. Die Axenwinkel Y A Y′, Y A Y″, Y′A Y″ in diesem neuen Systeme, welche im Allgemeinen durch W_1, W_1', W_1'' von uns bezeichnet zu werden pflegen, sind X A X′, X A $\mathfrak{X}''$, X′A $\mathfrak{X}''$, weil A Y und A Y′ eins sind mit A X und A X′, während A Y″ mit der Polaraxe A $\mathfrak{X}''$ zusammenfällt, und da die Polaraxe A $\mathfrak{X}''$ auf den beiden Grundaxen A X und A X′ senkrecht steht, so werden die Axenwinkel des neuen Systemes durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$W_1 = W, \quad W_1' = 90^\circ, \quad W_1'' = 90^\circ;$$

daher verwandeln sich an diesem neuen Systeme die Gleichungen (112. a.) in:

$$v = y + y'\cos W, \quad v' = y\cos W + y', \quad v'' = y'' \qquad \textbf{(112. } \alpha.\textbf{)}$$

und die (112. b.) werden jetzt:

$$\mathfrak{v} = y + y'\cos W, \quad \mathfrak{v}' = y\cos W + y', \quad \mathfrak{v}'' = 0, \qquad \textbf{(112. } \beta.\textbf{)}$$

und anstatt derer (112. c.) findet man:

$$v - \mathfrak{v} = 0, \quad v' - \mathfrak{v}' = 0, \quad v'' - \mathfrak{v}'' = y'', \qquad \textbf{(112. } \gamma.\textbf{)}$$

und es ist die Ordinate des Punctes O an dem jetzigen Projectionssysteme y″ oder v″. Stellt nun ϱ die Entfernung des Punctes P von der Projectionsspitze A oder die Länge der zu dieser Projection P gehörigen Speiche vor, und bezeichnen wir noch durch $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Speichenrichtung A P an den neuen Axen A Y, A Y′, A Y″ giebt, so hat man hier:

$$\varrho^2 = y\,\mathfrak{v} + y'\mathfrak{v}' \qquad \textbf{(113. } \alpha.\textbf{)}$$

und

$$\mathfrak{b} = \frac{y}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{y'}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{v}}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{\mathfrak{v}'}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}'' = \frac{\mathfrak{v}''}{\varrho} = 0 \qquad \textbf{(113. } \beta.\textbf{)}$$

ganz in derselben Weise, wie sich vorhin die Gleichungen (113. a.) und (113. b.) ergeben haben, und diese letztern nehmen, weil den Gleichungen (112. β. und γ.) zur Folge $\mathfrak{v} = v$, $\mathfrak{v}' = v'$ und $\mathfrak{v}'' = 0$ ist, die folgende Gestalt an:

$$\varrho^2 = y\,v + y'v' \qquad \textbf{(113. } \gamma.\textbf{)}$$

und

$$\mathfrak{b} = \frac{y}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{y'}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d} = \frac{v}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{v'}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}'' = 0. \qquad \textbf{(113. } \delta.\textbf{)}$$

Auch ist hier wieder den Gleichungen (114. a.) analog, wenn b, b′, b″ und d, d′, d″ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Strahlenrichtung A O an den neuen Axen A Y, A Y′, A Y″ vorstellen, und r die Entfernung des Punctes O von der Spitze A ist:

$$b = \frac{y}{r}, \quad b' = \frac{y'}{r}, \quad b'' = \frac{y''}{r} \quad \text{und} \quad d = \frac{v}{r}, \quad d' = \frac{v'}{r}, \quad d'' = \frac{v''}{r} \qquad \textbf{(114. } \alpha.\textbf{)}$$

und diese Gleichungen, verglichen mit denen (113. δ.), zeigen, dass

$$\mathfrak{b} = b\frac{r}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}' = \frac{b'r}{\varrho}, \quad \mathfrak{b}'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{d} = \frac{d\,r}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}' = \frac{d'r}{\varrho}, \quad \mathfrak{d}'' = 0 \qquad \textbf{(114. } \beta.\textbf{)}$$

ist. Bezeichnen wir endlich durch $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_0'$, $\mathfrak{b}_0''$ und $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{d}_0'$, $\mathfrak{d}_0''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche irgend eine durch A hindurch gehende und in der Ebene X A X′ oder Y A Y′ liegende Richtung A Z an den Axen A Y, A Y′, A Y″ liefert, und durch w den Winkel, welchen diese Richtung mit der Speichenrichtung A P bildet, so ist erstlich

$$\mathfrak{b}_0'' = \mathfrak{d}_0'' = 0, \qquad \textbf{(115. } \alpha.\textbf{)}$$

weil die Richtung AZ in der Ebene YAY' liegt und die Axe AY'' auf dieser Ebene senkrecht steht, und in Folge dessen findet man

(115. β.) $$\cos w = \mathfrak{b}_0 \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'_0 \mathfrak{b}' \quad \text{oder} \quad \cos w = \mathfrak{b}_0 \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'_0 \mathfrak{b}'$$

oder, wenn man für $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ ihre in den Gleichungen (113. δ.) angegebenen Werthe setzt:

(115. γ.) $$\cos w = \mathfrak{b}_0 \frac{y}{\varrho} + \mathfrak{b}'_0 \frac{y'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \mathfrak{b}_0 \frac{v}{\varrho} + \mathfrak{b}'_0 \frac{v'}{\varrho}.$$

Nachdem so die Länge und Richtung der zum Puncte O gehörigen Speiche, so wie der Winkel, den diese Speichenrichtung mit einer beliebigen in der Ebene XAX' angenommenen Richtung bildet, in Coordinaten des Punctes O an den Axen AY, AY', AY'' aufgefunden worden ist, hat man nur noch die Beziehungen auf die Axen AY, AY', AY'' in Beziehungen auf die Axen AX, AX', AX'' überzutragen, um auch das jetzige Projectionssystem unmittelbar an das ursprünglich gegebene Coordinatensystem angeknüpft zu haben. Diese Uebertragung geschieht aber mittelst der früher (§. 2. Nr. 34. und 35.) mitgetheilten Relationen, wobei die dortigen Zeichen hier specielle Bedeutungen annehmen, der besondern Stellung gemäss, die den neuen Axen zu den alten angewiesen worden ist. Da nämlich hier die Axe AY mit der AX, so wie die AY' mit der AX' zusammenfällt, so ist in unserm Falle:

(116. a.) $$\begin{cases} A=1, \quad A'=0, \quad A''=0 \quad \text{und} \quad A_1=0, \quad A'_1=1, \quad A''_1=0 \\ \text{und} \\ B=1, \quad B'=0, \quad B''=0 \quad \text{und} \quad B_1=0, \quad B'_1=1, \quad B''_1=0, \end{cases}$$

und, weil die Axe AY'' mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ zusammenfällt, hat man ferner:

(116. b.) $$A_2 = \mathfrak{A}_2, \quad A'_2 = \mathfrak{A}'_2, \quad A''_2 = \mathfrak{A}''_2,$$

woraus sich die Grössen B_2, B'_2, B''_2 mit Hilfe der Gleichungen (81. a.) ergeben; da nämlich die zwei hier auf einander bezogenen Coordinatensysteme offenbar einen ähnlichen Axenlauf besitzen, so ist kraft der Gleichungen (85) $[\overset{3}{A}] = \frac{k}{h}$ oder weil hier, wo die Axe AY'' senkrecht auf den beiden andern AY und AY' steht, $k = \sin YAY' = \sin W$ ist, $[\overset{3}{A}] = \frac{\sin W}{h}$, welches den Relationen (41) zur Folge $[\overset{3}{A}] = \frac{1}{\mathfrak{C}''_2}$ giebt, und nun werden die auf der linken Seite stehenden letzten drei Gleichungen (81. a.):

(116. c.) $$B_2 = -\mathfrak{A}_2 \mathfrak{C}''_2, \quad B'_2 = -\mathfrak{A}'_2 \mathfrak{C}''_2, \quad B''_2 = \mathfrak{C}''_2.$$

In Folge dieser besondern Werthe geben aber die obigen Gleichungen (60. a.) und (61. a.):

(117. a.) $$\begin{cases} d=c, \quad d'=c', \quad d''=\mathfrak{A}_2 c + \mathfrak{A}'_2 c' + \mathfrak{A}''_2 c'' \quad \text{und} \\ b = a - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{C}''_2 a'', \quad b' = a' - \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{C}''_2 a'', \quad b'' = \mathfrak{C}''_2 a'' \\ \quad \text{und die (64. a.) und (65. a.) geben auf dieselbe Weise:} \\ v=u, \quad v'=u', \quad v''=\mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}'_2 u' + \mathfrak{A}''_2 u'' \quad \text{und} \\ y = x - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{C}''_2 x'', \quad y' = x' - \mathfrak{A}'_2 \mathfrak{C}''_2 x'' \quad y'' = \mathfrak{C}''_2 x'', \end{cases}$$

woraus folgt, dass die Ordinate des Punctes O an dem jetzigen Projectionssysteme auch durch $\mathfrak{C}''_2 x''$ dargestellt werden kann, wenn x'' dessen schiefe Coordinate an der Axe AX'' im ursprünglich gegebenen Coordinatensysteme vorstellt. Diese Gleichungen, welche in Bezug auf jeden Punct und auf jede von A aus nach ihm hinzielende Richtung Gültigkeit behalten, nehmen

eine noch einfachere Gestalt an, wenn der Puuct oder die Richtung in der Ebene XAX' liegt, weil für solche $x''=0$ der $a''=0$ wird; daher ist bezüglich der Richtung AP, wenn a, a', a'' und c, c', c'' ihre schiefen und senkrechten Projectionszahlen an den Axen AX, AX', AX'' vorstellen:

$$\mathfrak{b}=c\,,\quad \mathfrak{b}'=c'\,,\quad \mathfrak{b}''=\mathfrak{A}_2 c+\mathfrak{A}_2' c'+\mathfrak{A}_2'' c'' \quad \text{und} \quad b=a\,,\quad b'=a'\,,\quad b''=0 \qquad \textbf{(117. b.)}$$

und eben so hat man bezüglich der Richtung AZ, wenn a_0, a_0', a_0'' und c_0, c_0', c_0'' deren schiefe und senkrechte Projectionszahlen an den Axen AX, AX', AX'' anzeigen:

$$\mathfrak{b}_0=c_0\,,\quad \mathfrak{b}_0'=c_0'\,,\quad \mathfrak{b}_0''=\mathfrak{A}_2 c_0+\mathfrak{A}_2' c_0'+\mathfrak{A}_2'' c_0'' \quad \text{und} \quad b_0=a_0\,,\quad b_0'=a_0'\,,\quad b_0''=0. \qquad \textbf{(117. c.)}$$

Setzt man jetzt die Werthe von y, y' und v, v' aus den zwei letzten Zeilen der Gleichungen (117. a.) in die Gleichung (113. γ.) ein, so findet man:

$$\varrho^2=u(x-\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}_2'' x'')+u'(x'-\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{S}_2'' x''),$$

welche Gleichung mit Zuziehung der dritten in (48. a.) angegebenen übergeht in:

$$\varrho^2=u\,x+u'x'-x''(\mathfrak{S}_2''^2\,x''-u''). \qquad \textbf{(117. d.)}$$

Durch die gleiche Substitution werden die Gleichungen (113. δ.), wenn man zu gleicher Zeit für b, b', b'' und $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$ ihre in den Gleichungen (117. d.) enthaltenen Werthe einsetzt:

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{x-\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}_2'' x''}{\varrho}\,,\quad a'=\dfrac{x'-\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{S}_2'' x''}{\varrho}\,,\quad a''=0 \\ \text{und} \\ c=\dfrac{u}{\varrho}\,,\quad c'=\dfrac{u'}{\varrho}\,,\quad \mathfrak{A}_2\,c+\mathfrak{A}_2'\,c'+\mathfrak{A}_2''\,c''=0\,, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \textbf{(117. e.)}$$

und die (115. γ.) werden in Folge der gleichen Substitution, wenn man gleichzeitig für $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}_0'$ und b_0, b_0' ihre in den Gleichungen (115. e.) enthaltenen Werthe einsetzt:

$$\cos w=\frac{c_0\,x+c_0'\,x'+c_0''\,x''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w=\frac{a_0\,u+a_0'\,u'}{\varrho}. \qquad \textbf{(117. f.)}$$

Die Gleichungen (117. f.) lassen auch hier wieder unentschieden, ob die Speichenrichtung AP auf der einen oder andern Seite von der Richtung AZ liegt, und es lässt sich diese Unbestimmtheit dadurch vermeiden, dass man zu der einen Richtung AZ noch eine zweite von ihr verschiedene AZ', welche in der Ebene XAX' liegend angenommen wird, gesellt. Lässt man diese beiden Richtungen AZ und AZ' mit den Axen AX und AX'' zusammenfallen, so dass a_0, a_0' und c_0, c_0' in den beiden Fällen die ihnen vor den Gleichungen (115. e.) angewiesenen besondern Werthe annehmen, so nehmen dadurch die Gleichungen (117. f.) die nachstehenden besondern Formen an:

$$\left.\begin{array}{l} \cos w=\dfrac{x-\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}_2'' x''+(x'-\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{S}_2'' x'')\cos W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w=\dfrac{u}{\varrho} \\ \text{und} \\ \cos w'=\dfrac{(x-\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}_2'' x'')\cos W+x'-\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{S}_2'' x''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w'=\dfrac{u'}{\varrho}\,; \end{array}\right\} \cdots\cdots \textbf{(117. g.)}$$

wählt man aber zu den beiden Richtungen AZ und AZ' die, in welchen die Ebene XAX' von den Polar-Coordinatenebenen $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ durchschnitten wird, so dass a_0, a_0' und c_0, c_0' in den beiden Fällen die ihnen vor den Gleichungen (115. f.) angewiesenen besondern Werthe annehmen, so nehmen die Gleichungen (117. f.) die folgenden besondern Formen an:

(117. h.) $$\left\{\begin{aligned} \cos w &= \frac{(x - \mathfrak{A}_2\,(\mathfrak{C}_2''x''))\sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{u - u'\cos W}{\varrho \sin W} \\ &\text{und} \\ \cos w' &= \frac{(x' - \mathfrak{A}_2'\,(\mathfrak{C}_2''x''))\sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \frac{-u\cos W + u'}{\varrho\sin W}, \end{aligned}\right.$$

wo immer w den auf die Richtung AZ, w' den auf die Richtung AZ' sich beziehenden Speichenwinkel bezeichnet.

62) Den beiden vorigen Projectionssystemen, deren Projectionsebene jedesmal mit der Grund-Coordinatenebene XAX' zusammenfiel, während dieser Projectionsebene das eine Mal die Grundaxe AX'', das andere Mal die Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ als Projectionsaxe beigegeben war, schliessen sich zwei andere an, deren Projectionsebene jedesmal die Polar-Coordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ ist, während dieser Projectionsebene das eine Mal die Polaraxe $A\mathfrak{X}''$, das andere Mal die Grundaxe AX'' als Projectionsaxe beigegeben wird. Diese beiden letztern Projectionssysteme gehen aus den zwei vorangegangenen durch eine wechselseitige Vertauschung der Grund- und Polaraxen mit einander hervor, wobei die Abzeichen keiner Veränderung unterliegen; daher ergeben sich die den zwei neuen Projectionssystemen zugehörigen Resultate aus den zuvor erhaltenen sehr einfach durch die folgende Betrachtung. Weil nämlich die zwei neuen Projectionssysteme in die zwei vorigen übergehen, wenn man die Polaraxen des Coordinatensystems als Grundaxen und umgekehrt die Grundaxen als Polaraxen ansieht, so lassen sich auf die zwei neuen Projectionssysteme die vorigen Formeln einfach dadurch anwendbar machen, dass man alle Beziehungen zum Grundsysteme in Beziehungen zum Polarsysteme umkehrt, also dadurch, dass man im Sinne der in Nr. 33. eingeführten Bezeichnungen alle auf die Grundaxen sich beziehenden Bezeichnungen von Coordinaten oder Projectionszahlen mit Klammern umgiebt, was den dortigen Gleichungen (56. a. und b.) und (57. a. und b.) gemäss keine andere Folge hat, als dass an die Stelle der senkrechten Coordinaten oder Projectionszahlen an den Axen AX, AX', AX'' die mit $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ multiplicirten schiefen an den gleichen Axen, und an die Stelle der schiefen die mit $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ dividirten senkrechten treten, wobei man indessen zu beachten hat, dass die Grössen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ selber so wie die ϱ, r und w sich während dieser Umwandlung nicht verändern, die Axenwinkel W, W', W'' verwandeln sich dabei in $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$, so wie diese in jene, und die mit dem Grundzeichen $\mathfrak{A}$ versehenen Grössen nehmen andere Werthe an, die sich aus den Gleichungen (45. a. oder b.) durch wechselseitige Vertauschung der Grundzeichen W und $\mathfrak{W}$ mit einander ergeben und eben die sind, welche in den Gleichungen (46. a.) stehen, so dass wir sie unter Berücksichtigung dieser Gleichungen hier wie dort dadurch bezeichnen können, dass wir die zum Grundzeichen $\mathfrak{A}$ gehörigen mit Klammern umgeben. Auf diese Weise erhält man:

a) für den Fall, dass $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ zur Projectionsebene und $A\mathfrak{X}''$ zur Projectionsaxe genommen wird, welcher dem in Nr. 60. behandelten analog ist, und in welchem die Ordinate eines beliebigen Punctes (x'') oder $\frac{u''}{\mathfrak{C}_2''}$ wird, aus den Gleichungen (113. b.):

(118. a.) $$\mathfrak{c} = \frac{u}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{u'}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{x}}{\varrho}, \quad \mathfrak{a}' = \frac{\mathfrak{x}'}{\varrho}, \quad \mathfrak{a}'' = \frac{\mathfrak{x}''}{\varrho},$$

wenn ϱ die in dem jetzigen Projectionssysteme zum Puncte O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten an den Axen AX, AX', AX'' wieder x, x', x'' und u, u', u'' sind, gehörige Speichenlänge und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}''$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen ihrer

Richtung an den gleichen Axen AX, AX', AX'', $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ die schiefen Coordinaten der Projection P des Punctes in dem jetzigen Projectionssysteme an denselben Axen vorstellen; ferner aus den Gleichungen (113. c.):

$$\varrho^2 = \frac{u^2}{\mathfrak{E}^2} + \frac{u'^2}{\mathfrak{E}_1'^2} + 2\frac{u}{\mathfrak{E}}\frac{u'}{\mathfrak{E}_1'}\cos\mathfrak{W} \quad \text{oder} \quad \varrho^2 = xu + x'u' - u''\left(x'' - \frac{u''}{\mathfrak{E}_2''^2}\right) \qquad \textbf{(118. b.)}$$

und aus denen (113. d.):

$$\varrho\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{a} = \frac{u}{\mathfrak{E}} + \frac{u'}{\mathfrak{E}_1'}\cos\mathfrak{W}\,, \quad \varrho\,\mathfrak{E}_1'\,\mathfrak{a}' = \frac{u}{\mathfrak{E}}\cos\mathfrak{W} + \frac{u'}{\mathfrak{E}_1'}\,, \quad \varrho\,\mathfrak{E}_2''\,\mathfrak{a}'' = \frac{u}{\mathfrak{E}}\cos\mathfrak{W}' + \frac{u'}{\mathfrak{E}_1'}\cos\mathfrak{W}''$$

oder

$$\varrho\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{E}\,x - \frac{u''}{\mathfrak{E}_2''}\cos\mathfrak{W}'\,, \quad \varrho\,\mathfrak{E}_1'\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{E}_1'\,x' - \frac{u''}{\mathfrak{E}_2''}\cos\mathfrak{W}''\,, \quad \varrho\,\mathfrak{E}_2''\,\mathfrak{a}'' = \mathfrak{E}_2''\,x'' - \frac{u''}{\mathfrak{E}_2''}\,,$$

die sich mit Zuziehung der Gleichungen (41) und (45. a.) auch so schreiben lassen:

$$\left.\begin{array}{lll} \varrho\,\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{a} = u + u'\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{A}'\,, & \varrho\,\mathfrak{E}_1'^2\,\mathfrak{a}' = u\,\mathfrak{E}_1'\,\mathfrak{A}_1 + u'\,, & \varrho\,\mathfrak{E}_2''\,\mathfrak{a}'' = u\,\mathfrak{A}_2 + u'\,\mathfrak{A}_2' \\ \varrho\,\mathfrak{a} = x - u''\dfrac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}_2''}\,, & \varrho\,\mathfrak{a}' = x' - u''\dfrac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{E}_2''}\,, & \varrho\,\mathfrak{a}'' = x'' - u''\dfrac{1}{\mathfrak{E}_2''^2}\,; \end{array}\right\} \qquad \textbf{(118. c.)}$$

endlich gehen die ersten Gleichungen (115. c. und d.) über in:

$$\cos w = \frac{\mathfrak{a}_0 u + \mathfrak{a}_0' u'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{\mathfrak{c}_0 x + \mathfrak{c}_0' x' - \mathfrak{a}_0'' u''}{\varrho}\,. \qquad \textbf{(118. d.)}$$

Lässt man die Richtung AZ einmal in die Polaraxe $A\mathfrak{X}$, das andere Mal in die Polaraxe $A\mathfrak{X}'$ fallen, so wird im ersten Falle

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{A}\,, \quad \mathfrak{a}_0' = \mathfrak{A}'\,, \quad \mathfrak{a}_0'' = \mathfrak{A}'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = \mathfrak{E}\,, \quad \mathfrak{c}_0' = 0\,, \quad \mathfrak{c}_0'' = 0\,,$$

im andern Falle

$$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{A}_1\,, \quad \mathfrak{a}_0' = \mathfrak{A}_1'\,, \quad \mathfrak{a}_0'' = \mathfrak{A}_1'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = 0\,, \quad \mathfrak{c}_0' = \mathfrak{E}_1'\,, \quad \mathfrak{c}_0'' = 0\,;$$

daher werden die Gleichungen (118. d.) das eine Mal:

$$\left.\begin{array}{l} \cos w = \dfrac{\mathfrak{A}u + \mathfrak{A}'u'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \dfrac{\mathfrak{E}\,x - \mathfrak{A}''u''}{\varrho} \\ \text{das andere Mal:} \\ \cos w' = \dfrac{\mathfrak{A}_1 u + \mathfrak{A}_1' u'}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \dfrac{\mathfrak{E}_1' x' - \mathfrak{A}_1'' u''}{\varrho}\,, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(118. e.)}$$

wo w den Speichenwinkel mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}$, w' den mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}'$ vorstellt; nimmt man zur Richtung AZ einmal die, in welcher die Polarebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ von der Grundebene XAX'', ein ander Mal die, in welcher die Ebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ von der $X'AX''$ geschnitten wird, so werden dadurch die Grössen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0'$, $\mathfrak{a}_0''$ und $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_0'$, $\mathfrak{c}_0''$ bestimmt, man hat nämlich im ersten Falle (§. 4. Nr. 49.), wenn die Durchschnittsrichtung mit AX nach einerlei Seite hinzielend aufgefasst wird:

$$\mathfrak{a}_0 = \frac{1}{\sin W'}\,, \quad \mathfrak{a}_0' = 0\,, \quad \mathfrak{a}_0'' = -\frac{\cos W'}{\sin W'} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = \sin W'\,, \quad \mathfrak{c}_0' = -\sin W''\cos\mathfrak{W}\,, \quad \mathfrak{c}_0'' = 0\,,$$

im andern Falle dagegen, wenn die Durchschnittsrichtung mit AX' nach einerlei Seite hinzielend angenommen wird:

$$\mathfrak{a}_0 = 0\,, \quad \mathfrak{a}_0' = \frac{1}{\sin W''}\,, \quad \mathfrak{a}_0'' = -\frac{\cos W''}{\sin W''} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c}_0 = -\sin W'\cos\mathfrak{W}\,, \quad \mathfrak{c}_0' = \sin W''\,, \quad \mathfrak{c}_0'' = 0\,,$$

und in Folge dieser besondern Werthe nehmen die Gleichungen (118. d.) die nachstehende Form an:

(118. f.)
$$\begin{cases} \cos w = \dfrac{u}{\varrho \sin W'} \quad \text{oder} \quad \cos w = \dfrac{x \sin W' - x' \sin W'' \cos \mathfrak{W} + u'' \operatorname{cotg} W'}{\varrho} \\ \text{und} \\ \cos w' = \dfrac{u'}{\varrho \sin W''} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \dfrac{-x \sin W' \cos \mathfrak{W} + x' \sin W'' + u'' \operatorname{cotg} W''}{\varrho}, \end{cases}$$

wo wie in den Gleichungen (118. f.) w auf die in der Ebene X A X″, w′ dagegen auf die in der Ebene X′A X″ liegende Richtung A Z sich bezieht. Sodann erhält man:

b) für den Fall, dass $\mathfrak{X} A \mathfrak{X}'$ zur Projectionsebene und A X″ zur Projectionsaxe genommen wird, welcher dem in Nr. 61. behandelten analog ist, und in welchem die Ordinate eines beliebigen Punctes O jetzt $\mathfrak{C}_2''(x'')$ oder u″ wird, aus der Gleichung (117. d.):

(119. a.)
$$\varrho^2 = u x + u' x' - u''(u'' - x'');$$

ferner aus den Gleichungen (117. e.)

$$\mathfrak{c} = \frac{u - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}\, u''}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}' = \frac{u' - (\mathfrak{A}_2')\,\mathfrak{C}_1'\, u''}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}'' = 0$$

und

$$\mathfrak{a} = \frac{x}{\varrho}, \quad \mathfrak{a}' = \frac{x'}{\varrho}, \quad (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{A}_2')\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{a}' + (\mathfrak{A}_2'')\,\mathfrak{C}_2''\,\mathfrak{a}'' = 0,$$

welche, weil in Gemässheit der Gleichungen (41) und (46. b.) $(\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C} = \cos W'$, $(\mathfrak{A}_2')\,\mathfrak{C}_1' = \cos W''$ und $(\mathfrak{A}_2'')\,\mathfrak{C}_2'' = 1$ ist, sich auch so schreiben lassen:

(119. b.)
$$\begin{cases} \mathfrak{c} = \dfrac{u - u'' \cos W'}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}' = \dfrac{u' - u'' \cos W''}{\varrho}, \quad \mathfrak{c}'' = 0 \\ \text{und} \\ \mathfrak{a} = \dfrac{x}{\varrho}, \quad \mathfrak{a}' = \dfrac{x'}{\varrho}, \quad \mathfrak{a} \cos W' + \mathfrak{a}' \cos W'' + \mathfrak{a}'' = 0; \end{cases}$$

endlich erhält man aus den Gleichungen (117. f.) mit Zuziehung der vor den Gleichungen (119. b.) angezeigten Auswerthungen:

(119. c.)
$$\cos w = \frac{\mathfrak{a}_0 u + \mathfrak{a}_0' u' + \mathfrak{a}_0'' u''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{\mathfrak{c}_0 x + \mathfrak{c}_0' x'}{\varrho}.$$

Lässt man die Richtung A Z einmal in die Polaraxe $A\mathfrak{X}$, ein anderes Mal in die Polaraxe $A\mathfrak{X}'$ fallen, so nehmen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0'$, $\mathfrak{a}_0''$ und $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_0'$, $\mathfrak{c}_0''$ die ihnen unmittelbar vor den Gleichungen (118. e.) beigelegten besondern Werthe an, zufolge welcher die Gleichungen (119. c.) im ersten Falle werden:

(119. d.)
$$\begin{cases} \cos w = \dfrac{\mathfrak{A} u + \mathfrak{A}' u' + \mathfrak{A}'' u''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w = \dfrac{\mathfrak{C} x}{\varrho} \\ \text{und im andern Falle:} \\ \cos w' = \dfrac{\mathfrak{A}_1 u + \mathfrak{A}_1' u' + \mathfrak{A}_1'' u''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \dfrac{\mathfrak{C}_1' x'}{\varrho}; \end{cases}$$

nimmt man hingegen zur Richtung A Z einmal die, in welcher die Ebene $\mathfrak{X} A \mathfrak{X}'$ von der X A X″ geschnitten wird, und ein ander Mal die, in welcher die Ebene $\mathfrak{X} A \mathfrak{X}'$ von der X′A X″ geschnitten wird, so nehmen die Grössen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_0'$, $\mathfrak{a}_0''$ und $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{c}_0'$, $\mathfrak{c}_0''$ die besondern Werthe an,

welche unmittelbar vor den Gleichungen (118. f.) angegeben worden sind, und dadurch verändern sich die Gleichungen (119. c.) in:

$$\left.\begin{aligned} \cos w &= \frac{u - u'' \cos W'}{\varrho \sin W'} \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{x \sin W' - x' \sin W'' \cos \mathfrak{W}}{\varrho} \\ \text{und} \\ \cos w' &= \frac{u' - u'' \cos W''}{\varrho \sin W''} \quad \text{oder} \quad \cos w' = \frac{-x \sin W'' \cos \mathfrak{W} + x' \sin W''}{\varrho}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (119.\ e.)$$

und es bezieht sich hier, wie in den Gleichungen (119. d.), w auf die in der Ebene X A X'; w' dagegen auf die in der Ebene X'A X'' liegende Richtung A Z.

63) Die bisher erhaltenen Resultate lassen sich auf die Projectionssysteme, welche A X' oder A 𝔛' zur Projectionsaxe und die diesen Axen gegenüberliegende Grund- oder Polar-Coordinatenebene zur Projectionsebene haben, durch eine Vertauschung der dritten Art übertragen, so wie sie durch eine Vertauschung der zweiten Art auf solche Projectionssysteme anwendbar gemacht werden, deren Projectionsaxe entweder A X oder A 𝔛 ist, und deren Projectionsebene mit der diesen Axen gegenüberliegenden Grund- oder Polar-Coordinatenebene zusammenfällt.

Obgleich im Vorstehenden blos die Projectionen eines beliebigen Punctes O auf die Projectionsaxe sowohl, als auf die Projectionsebene zur Sprache gekommen sind, so ist damit doch zugleich auch alles das gegeben, was zur Auffindung der Projectionen von Geraden auf die Projectionsaxe oder auf die Projectionsebene erforderlich ist; denn da die Projection einer Geraden auf die Axe, der Nr. 3. gemäss, die Differenz der zu dieser Axe gehörigen Ordinaten ihrer Endpuncte ist, so ergiebt sich dieselbe sogleich aus den auf die vorstehende Weise ausgedrückten Ordinaten von Puncten, und was die Projection der Geraden auf die Projectionsebene betrifft, so lässt sich diese ihrer Richtung und Grösse nach sogleich aus den Formeln des ebenen Coordinatensystems, dessen beide Axen in der Projectionsebene liegen, ableiten, da man die Coordinaten ihrer Endpuncte in diesem ebenen Systeme mittelst der vorstehenden Formeln immer leicht auffinden kann, weil diese Endpuncte nichts anders sind, als die Projectionen von den Endpuncten der Geraden auf die Projectionsebene.

Die in den vorigen drei Nummern mitgetheilten Formeln werden höchst einfach, wenn das Coordinatensystem ein senkrechtes ist, und man die Projectionen ins Auge fasst, welche parallel mit der Axe gebildet werden, die senkrecht auf den beiden andern steht. Da nämlich in diesem Systeme die senkrechte Grundaxe mit der zu ihr gehörigen Polaraxe zusammenfällt und auch die dieser Axe gegenüber liegenden Grund- und Polar-Coordinatenebenen in einander liegen, so ziehen sich die vielerlei Projectionssysteme, welche zwei zusammen gehörige Axen mit ihren beiden gegenüber liegenden Coordinatenebenen bilden, und die bisher betrachtet worden sind, bei ihm, wenn hier die in einander fallenden Axen und Coordinatenebenen zur Bildung der Projectionssysteme genommen werden, in ein einziges zusammen, dessen Formeln man aus jedem der vorigen Fälle ableiten kann, wenn man in ihnen die dem senkrechten Systeme eigenthümlichen Relationen geltend macht. Ist nämlich A X'' die senkrechte Axe, so sind W' und W'' rechte Winkel und man hat in Bezug auf jeden Punct $x'' = u''$. Dadurch werden die Gleichungen (112. c.):

$$u = u, \quad u' = u', \quad u'' = 0, \qquad (120.\ a.)$$

die (113. c.) verwandeln sich in:

$$\varrho^2 = x^2 + x'^2 + 2 x x' \cos W, \quad \varrho^2 = x u + x' u', \qquad (120.\ b.)$$

die (113. d.) gehen über in:

(120. c.) $$\mathfrak{c}=\frac{x+x'\cos W}{\varrho},\quad \mathfrak{c}'=\frac{x\cos W+x'}{\varrho}\quad \text{oder}\quad \mathfrak{c}=\frac{u}{\varrho},\quad \mathfrak{c}'=\frac{u'}{\varrho}\quad \text{und}\quad \mathfrak{c}''=0\,,$$

und die vordern in (115. c.) und (115. d.) enthaltenen nehmen die folgende Form an:

(120. d.) $$\cos w=\frac{\mathfrak{c}_0 x+\mathfrak{c}_0' x'}{\varrho}\quad \text{oder}\quad \cos w=\frac{\mathfrak{a}_0 u+\mathfrak{a}_0' u'}{\varrho}\,.$$

Alle diese Gleichungen erhält man ganz eben so, wenn man sie aus einem der drei übrigen Projectionssysteme ableitet, welche in Nr. 61. und Nr. 62. abgehandelt worden sind.

64) Nachdem wir im Vorigen die Mittel angegeben haben, wodurch sich Projectionen von Puncten und Geraden auf die Projectionsaxe oder auf die Projectionsebene durch Coordinaten an dem Coordinatensysteme, aus welchem jene Projectionssysteme hervorgehoben worden sind, bestimmen lassen, bleibt noch die ähnliche Untersuchung in Bezug auf Projectionen von ebenen Figuren anzustellen übrig. Bezeichnen wir durch F den Flächeninhalt irgend einer beliebig wie im Raume liegenden ebenen Figur, und denken wir uns die Lage der Ebene, in welcher diese Figur liegt, durch eine auf ihr senkrechte Richtung gegeben, welche auf ein beliebiges aus den Axen AX, AX′, AX″ zusammengesetztes Coordinatensystem bezogen, an diesen Axen die schiefen Projectionszahlen p, p′, p″ und die senkrechten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ liefert, so bildet diese Richtung mit den zu dem gewählten Coordinatensysteme gehörigen Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ Winkel, welche die gleichen sind wie die, welche die Ebene der Figur bezüglich mit den Grund-Coordinatenebenen X′AX″, XAX″, XAX′ macht, und eben so bildet jene Richtung mit den Grundaxen AX, AX′, AX″ Winkel, die denen gleich sind, welche die Ebene der Figur bezüglich mit den Polar-Coordinatenebenen $\mathfrak{X}'$A$\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}'$ macht, wie man sogleich gewahr wird, wenn man sich die ebene Figur und die gewählte auf ihr senkrechte Richtung mit sich selber parallel fortbewegt vorstellt, bis beide durch die Coordinatenspitze A hindurch gehen, wobei in der Grösse aller Winkel keine Aenderung vorfällt. Denkt man sich jetzt durch die beiden Richtungen AZ und A$\mathfrak{X}''$ hindurch eine Ebene gelegt, so steht diese senkrecht auf der Ebene der Figur und zugleich auch auf der Ebene XAX′, mithin auch auf der Geraden AR, in welcher diese letztern Ebenen sich begegnen, und es schneidet jene Ebene diese beiden in zwei Geraden AS, AS′, welche senkrecht auf der AR stehen und daher den Neigungswinkel der beiden Ebenen hergeben; weil ferner die Geraden AS, AS′ mit den Richtungen AZ, A$\mathfrak{X}''$ in rechten Winkeln zusammenhängen und alle vier in einer Ebene liegen: so ist der Winkel, den die Richtungen AZ und A$\mathfrak{X}''$ mit einander machen, gleich einem von den beiden Nebenwinkeln, welche aus den Geraden AS und AS′ hervorgehen, folglich auch gleich einem von den beiden Nebenwinkeln, welche die Ebene der Figur und die Ebene XAX′ mit einander machen. So wie hier gezeigt worden ist, dass die Richtung AZ mit der Polaraxe A$\mathfrak{X}''$ einen Winkel einschliesst, der entweder dem spitzen oder dem stumpfen Winkel gleich ist, den die Ebene der Figur mit der jener Polaraxe gegenüber liegenden Grund-Coordinatenebene bildet, eben so lässt sich auch das analoge Verhalten der zur Figur gehörigen Ebene und der auf dieser senkrechten Richtung zu einer andern Coordinatenebene und der auf ihr senkrechten Polaraxe darthun. Diess vorausgeschickt folgt nun sogleich, dass $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die Kosinuse von einem der beiden Nebenwinkel sind, welche die Ebene der Figur bezüglich mit den Polar-Coordinatenebenen $\mathfrak{X}'$A$\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}$A$\mathfrak{X}'$ bildet, da die senkrechten Projectionszahlen nichts anders sind, als die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung AZ mit den Grundaxen AX, AX′, AX″ bildet, und

eben so sind $\mathfrak{C}\,p$, $\mathfrak{C}_1 p'$, $\mathfrak{C}_2 p''$ die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung A Z mit den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ bildet, und eben desshalb auch die Kosinuse von einem der beiden Nebenwinkel, welche die Ebene der Figur bezüglich mit den Grund-Coordinatenebenen $X'AX''$, XAX'', XAX' bildet, was eine unmittelbare Folge der Gleichungen (56. a.) ist, welche die senkrechten Projectionszahlen, die eine Richtung an den Polaraxen giebt, aus den schiefen Projectionszahlen, welche dieselbe Richtung an den Grundaxen giebt, zu finden lehren. Verbindet man die Bedeutung dieser Kosinuse mit dem durch die Gleichung (2. a.) ausgesprochenen Satze, durch den erwiesen ist, dass die Flächengrösse von der senkrechten Projection einer beliebigen ebenen Figur auf irgend eine Ebene aus der Flächengrösse dieser Figur gefunden wird, indem man diese mit dem Kosinus des Winkels multiplicirt, den die Ebene der Figur mit der Projectionsebene macht, so überzeugt man sich ohne alle Mühe, dass

$$\mathfrak{p}F\,,\quad \mathfrak{p}'F\,,\quad \mathfrak{p}''F$$

die Flächengrössen von den senkrechten Projectionen der ebenen Figur auf die Polar-Coordinatenebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ sind, und eben so, dass

$$\mathfrak{C}\,pF\,,\quad \mathfrak{C}_1 p'F\,,\quad \mathfrak{C}_2 p''F$$

die Flächengrössen von den senkrechten Projectionen der ebenen Figur auf die Grund-Coordinatenebenen $X'AX''$, XAX'', XAX' sind, wenn F den Flächeninhalt der ebenen Figur vorstellt.

Aus diesen senkrechten Projectionen, von welchen die ersten durch projicirende Gerade, die den Grundaxen AX, AX', AX'' parallel laufen, die andern durch projicirende Gerade, die den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, an denen ihnen senkrecht gegenüber stehenden Coordinatenebenen abgeschnitten werden, lassen sich nun leicht die schiefen Projectionen finden, welche durch dieselben projicirenden Geraden an den ihnen schief gegenüber stehenden Coordinatenebenen abgeschnitten werden, mittelst des Satzes (2. b.) ableiten, welcher aussagt, dass man die schiefe Projection einer ebenen Figur aus der durch die gleichen projicirenden Geraden gebildeten senkrechten findet, indem man diese durch den Kosinus des Winkels dividirt, den die zu einerlei projicirenden Geraden gehörigen senkrechten und schiefen Projectionsebenen einschliessen. Erwägt man nämlich, dass unserer Anordnung des Polarsystems zur Folge $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ die Kosinuse der spitzen Winkel sind, welche die Coordinatenebenen $X'AX''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, XAX'' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, XAX' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ mit einander machen, so folgt sogleich kraft des angeführten Satzes aus den obigen zuerst aufgestellten senkrechten Projectionen, dass

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{C}}F\,,\quad \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{C}_1}F\,,\quad \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{C}_2}F$$

die Flächengrössen von denjenigen schiefen Projectionen der ebenen Figur F sind, welche durch projicirende Gerade, die mit den Grundaxen AX, AX', AX'' parallel laufen, an den Grund-Coordinatenebenen $X'AX''$, XAX'', XAX' abgeschnitten werden, und eben so folgt, dass

$$pF\,,\quad p'F\,,\quad p''F$$

die Flächengrössen von denjenigen schiefen Projectionen der ebenen Figur F sind, welche durch projicirende Gerade, die mit den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, an den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ abgeschnitten werden. Bezeichnen daher

P, P', P'' die mit den Grundaxen AX, AX', AX'' parallelen schiefen Projectionen auf die Grundebenen $X'AX''$, XAX'', XAX';

(P), (P'), (P'') die mit den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ parallelen schiefen Projectionen auf die Polarebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$;

Q, Q', Q'' die mit den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ parallelen senkrechten Projectionen auf die Grundebenen $X'AX''$, XAX'', XAX';

(Q), $(Q'$, (Q'') die mit den Grundaxen AX, AX', AX'' parallelen senkrechten Projectionen auf die Polarebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$:

so hat man in Gemässheit der vorstehenden Betrachtungen:

(121. a.)
$$\left\{\begin{array}{lll} P = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{C}}F, & P' = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{C}_1'}F, & P'' = \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{C}_1''}F; \\ (P) = p\,F, & (P') = p'\,F, & (P'') = p''\,F; \\ Q = \mathfrak{C}pF, & Q' = \mathfrak{C}_1'p'F, & Q'' = \mathfrak{C}_2''p''F; \\ (Q) = \mathfrak{p}\,F, & (Q') = \mathfrak{p}'\,F, & (Q'') = \mathfrak{p}''\,F. \end{array}\right.$$

Da $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2''$ wesentlich positive Grössen sind, so haben, wenn die Grösse F in absoluter Bedeutung genommen wird, P, P', P'' und (Q), (Q'), (Q'') mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, so wie Q, Q', Q'' und (P), (P'), (P'') mit p, p', p'' einerlei Vorzeichen, es stellen sich sonach die Projectionen der ebenen Figuren als positive oder negative Grössen dar, wenn sie mit den Grundaxen parallel geschehen, je nachdem die auf der Ebene der Figur senkrecht stehende Richtung an diesen Grundaxen positive oder negative senkrechte Projectionszahlen erzeugt; wenn sie aber parallel mit den Polaraxen geschehen, je nachdem jene Richtung an den Grundaxen positive oder negative schiefe Projectionszahlen erzeugt; weil indessen von den zwei einander entgegengesetzten Richtungen, welche senkrecht auf der Ebene der Figur stehen, jede mit dem gleichen Rechte als die angesehen werden kann, welche den Gleichungen (121. a.) zu Grunde liegt, und die Projectionszahlen dieser beiden Richtungen zwar an Grösse gleich, ihrem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind, so sieht man ein, dass die Gegensetzung jener Richtung eine Umkehrung der Vorzeichen gleichzeitig bei allen Projectionen der ebenen Figur, welche parallel mit einer Grund- oder Polaraxe eines Coordinatensystems auf die gegenüber liegende Coordinatenebene gebildet werden, diese mag dem Grund- oder Polarsystem angehören, zu Stande bringt. Die vorstehenden Gleichungen lehren, wie alle solche Projectionen der Figur aus der Lage ihrer Ebene, welche durch eine auf dieser Ebene senkrechte Gerade gegeben ist, gefunden werden können. Man kann diese Gleichungen, wenn man die oben aufgefundenen Relationen (56. a.) und (56. b.) zur Hilfe nimmt, auch so schreiben:

(121. b.)
$$\left\{\begin{array}{lll} P = (p)F, & P' = (p')F, & P'' = (p'')F; \\ (P) = p\,F, & (P') = p'\,F, & (P'') = p''\,F; \\ Q = (\mathfrak{p})F, & Q' = (\mathfrak{p}')F, & Q'' = (\mathfrak{p}'')F; \\ (Q) = \mathfrak{p}\,F, & (Q') = \mathfrak{p}'\,F, & (Q'') = \mathfrak{p}''\,F; \end{array}\right.$$

in welchen (p), (p'), (p'') und $(\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{p}')$, $(\mathfrak{p}'')$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen vorstellen, welche dieselbe auf der Ebene der Figur senkrechte Richtung an den Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ des Polarsystems liefert.

Multiplicirt man die ersten und vierten unter einander stehenden Gleichungen (121. a.) kreuzweise mit einander und thut man dasselbe später auch bei den zweiten und dritten, so erhält man:

(122. a.)
$$\left\{\begin{array}{lll} (Q) = \mathfrak{C}\,P, & (Q') = \mathfrak{C}_1'\,P', & (Q'') = \mathfrak{C}_2''\,P'' \quad \text{und} \\ Q = \mathfrak{C}(P), & Q' = \mathfrak{C}_1'(P'), & Q'' = \mathfrak{C}_2''(P'') \end{array}\right.$$

multiplicirt man ferner sowohl die auf erster und dritter, als die auf zweiter und vierter Zeile unter einander stehenden Gleichungen (121. b.) mit einander, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} P\;Q = (p)(\mathfrak{p})F^2,\quad P'\;Q' = (p')(\mathfrak{p}')F^2,\quad P''\;Q'' = (p'')(\mathfrak{p}'')F^2 \text{ und} \\ (P)(Q) = p\;\mathfrak{p}\;F^2,\quad (P')(Q') = p'\;\mathfrak{p}'\;F^2,\quad (P'')(Q'') = p''\;\mathfrak{p}''\;F^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(122. b.)}$$

wobei zu merken ist, dass nach Aussage der Gleichungen (58. a.)

$$(p)(\mathfrak{p}) = p\,\mathfrak{p}\,,\quad (p')(\mathfrak{p}') = p'\,\mathfrak{p}',\quad (p'')(\mathfrak{p}'') = p''\,\mathfrak{p}'',$$

und daher auch

$$P\,Q = (P)(Q)\,,\quad P'\,Q' = (P')(Q')\,,\quad P''\,Q'' = (P'')(Q'') \quad \textbf{(122. c.)}$$

ist. Addirt man die drei auf jeder Zeile stehenden Gleichungen (122. b.) zu einander und beachtet man, dass der jeder Richtung angehörigen Gleichung (11) zur Folge sowohl

$$p\,\mathfrak{p} + p'\,\mathfrak{p}' + p''\,\mathfrak{p}'' = 1 \quad \text{als} \quad (p)(\mathfrak{p}) + (p')(\mathfrak{p}') + (p'')(\mathfrak{p}'') = 1$$

ist, so gelangt man zu den nachstehenden Gleichungen:

$$P\,Q + P'\,Q' + P''\,Q'' = F^2 \quad \text{und} \quad (P)(Q) + (P')(Q') + (P'')(Q'') = F^2. \quad \textbf{(122. d.)}$$

65) Wählt man in der auf der Ebene der Figur senkrecht stehenden Richtung zwei Puncte, von welchen der eine, in der Richtung rückwärts liegende, an den Grundaxen AX, AX', AX'' x, x', x'' und u, u', u'', und an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ (x), (x'), (x'') und (u), (u'), (u'') zu schiefen und senkrechten Coordinaten hat, während die des andern, in der Richtung mehr vorwärts liegenden, Punctes an den Grundaxen x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' und an den Polaraxen (x_1), (x_1'), (x_1'') und (u_1), (u_1'), (u_1'') sein sollen, so hat man im Sinne der oben aufgestellten Gleichungen (3), wenn r den positiv genommenen Abstand der beiden Puncte von einander bezeichnet:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 - x}{r} = p\,,\quad \dfrac{x_1' - x'}{r} = p'\,,\quad \dfrac{x_1'' - x''}{r} = p'' \text{ und } \dfrac{u_1 - u}{r} = \mathfrak{p}\,,\quad \dfrac{u_1' - u'}{r} = \mathfrak{p}',\quad \dfrac{u_1'' - u''}{r} = \mathfrak{p}'' \\ \text{sowohl, als auch:} \\ \dfrac{(x_1) - (x)}{r} = (p)\,,\quad \dfrac{(x_1') - (x')}{r} = (p')\,,\quad \dfrac{(x_1'') - (x'')}{r} = (p'') \text{ und } \dfrac{(u_1) - (u)}{r} = (\mathfrak{p})\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{(u_1') - (u')}{r} = (\mathfrak{p}')\,,\quad \dfrac{(u_1'') - (u'')}{r} = (\mathfrak{p}'')\,, \end{array}\right\} \quad \textbf{(123. a.)}$$

und setzt man die hier statt der Projectionszahlen gegebenen Quotienten in die Gleichungen (121. b.) ein, so lassen sich diese sogleich in die folgende Form bringen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{P}{F} = \dfrac{(x_1) - (x)}{r}\,,\quad \dfrac{P'}{F} = \dfrac{(x_1') - (x')}{r}\,,\quad \dfrac{P''}{F} = \dfrac{(x_1'') - (x'')}{r}\,; \\ \dfrac{(P)}{F} = \dfrac{x_1 - x}{r}\,,\quad \dfrac{(P')}{F} = \dfrac{x_1' - x'}{r}\,,\quad \dfrac{(P'')}{F} = \dfrac{x_1'' - x''}{r}\,; \\ \dfrac{Q}{F} = \dfrac{(u_1) - (u)}{r}\,,\quad \dfrac{Q'}{F} = \dfrac{(u_1') - (u')}{r}\,,\quad \dfrac{Q''}{F} = \dfrac{(u_1'') - (u'')}{r}\,; \\ \dfrac{(Q)}{F} = \dfrac{u_1 - u}{r}\,,\quad \dfrac{(Q')}{F} = \dfrac{u_1' - u'}{r}\,,\quad \dfrac{(Q'')}{F} = \dfrac{u_1'' - u''}{r}\,. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(123. b.)}$$

Denkt man sich die auf der Ebene der Figur senkrecht gestellte Richtung durch die Coordinatenspitze gelegt, so kann man diese zu einem der zwei in der Richtung gewählten Puncte nehmen, dann sind dessen Coordinaten sämmtlich null, und es werden die vorigen Gleichungen, wenn man sich die Richtung von dieser Spitze aus nach dem zweiten in der Richtung gewählten Puncte hinlaufend denkt:

(123. c.)
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{P}{F}=\frac{(x_1)}{r},\quad \frac{P'}{F}=\frac{(x_1')}{r},\quad \frac{P''}{F}=\frac{(x_1'')}{r};\\
\frac{(P)}{F}=\frac{x_1}{r},\quad \frac{(P')}{F}=\frac{x_1'}{r},\quad \frac{(P'')}{F}=\frac{x_1''}{r};\\
\frac{Q}{F}=\frac{(u_1)}{r},\quad \frac{Q'}{F}=\frac{(u_1')}{r},\quad \frac{Q''}{F}=\frac{(u_1'')}{r};\\
\frac{(Q)}{F}=\frac{u_1}{r},\quad \frac{(Q')}{F}=\frac{u_1'}{r},\quad \frac{(Q'')}{F}=\frac{u_1''}{r}.
\end{array}\right.$$

Die Gleichungen (123. b.) schliessen einen Satz in sich, durch welchen die ganze Natur der Projectionen einer ebenen Figur in allen, aus einem Coordinatensysteme herausgehobenen Projectionssystemen sehr einfach ausgesprochen wird. Erinnert man sich nämlich an das, was oben (Nr. 3.) von den Projectionen einer Geraden auf die Axe eines beliebigen Projectionssystems gesagt worden ist, dass nämlich

$(x_1)-(x)$, $(x_1')-(x')$, $(x_1'')-(x'')$ die mit den Ebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallelen schiefen Projectionen auf die Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$,

x_1-x, $x_1'-x'$, $x_1''-x''$ die mit den Ebenen $X'AX''$, XAX'', XAX' parallelen schiefen Projectionen auf die Axen AX, AX' AX'',

$(u_1)-(u)$, $(u_1')-(u')$, $(u_1'')-(u'')$ die mit den Ebenen $X'AX''$, XAX'', XAX' parallelen senkrechten Projectionen auf die Axen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$,

u_1-u, $u_1'-u'$, $u_1''-u''$ die mit den Ebenen $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallelen senkrechten Projectionen auf die Axen AX, AX', AX''

von der auf der ebenen Figur senkrechten Geraden sind, deren Länge r ist, und vergleicht man die hier erhaltenen Projectionssysteme, worin die Projectionen der Geraden von der Länge r sich erzeugen, mit denen, in welchen sich diejenigen Projectionen der ebenen Figur bilden, die mit den Projectionen der Geraden in den Gleichungen (123. b.) verbunden sind, so wird man gewahr, dass sie bei senkrechten Projectionen die gleichen sind, bei schiefen Projectionen dagegen stehen sowohl die Coordinatenaxen, welche die Projectionsaxen bilden, als die Coordinatenaxen, durch welche hindurch die Projectionsebenen gelegt sind, im Verhältniss von Grund- und Polaraxen zu einander; nennen wir daher so von einander abhängige Projectionssysteme Gegensysteme, so lassen sich jene Gleichungen wie folgt aussprechen:

Das Verhältniss der Projection zum Projicirten ist bei einer ebenen Figur und bei einer auf dieser senkrecht stehenden Geraden ein und dasselbe, wenn beide Projectionen schiefe sind und Gegensystemen angehören, oder wenn beide Projectionen senkrechte sind und einem und demselben Systeme angehören.

66) Wählt man zu der in Nr. 64. behandelten ebenen Figur ein Dreieck, dessen Seiten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ den Winkel φ einschliessen, so ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks $\frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 \sin\varphi$; man erhält daher die Grösse der Projectionen dieses Dreiecks, welche in den verschiedenen, aus einem Coordinatensystem hervorgehobenen Projectionssystemen entstehen, wenn man in den Gleichungen (121. a.) $F=\frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin\varphi$ setzt, und allen dortigen Zeichen ihre frühere Bedeutung lässt, wornach also p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen einer auf der Ebene des Dreiecks, dessen Inhalt $\frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin\varphi$ ist, senkrechten Richtung vorstellen. Diese Richtung, welche man sich von dem Puncte auslaufend denken kann, in welchem die Seiten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ des betrachteten Dreiecks zusammenstossen, bildet mit den zwei Rich-

tungen, worin die Seiten $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ des Dreiecks liegen, ein senkrechtes Coordinatensystem, auf welches im Zusammenhalt mit dem ursprünglich gegebenen, die für ein senkrechtes System oben gegebenen Gleichungen (107. b. und f.) ihre Anwendung finden. Bezeichnen nämlich a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die in der einen Seite $\mathfrak{l}$ des Dreiecks angenommene Richtung an den Axen AX, AX', AX'' des Coordinatensystems, worin die Projectionen geschehen, liefert, a_1, a'_1, a''_1 und c_1, c'_1, c''_1 dasselbe in Bezug auf die andere in der Seite $\mathfrak{l}_1$ des Dreiecks angenommene Richtung und sieht man diese beiden Richtungen als den Axen AY, AY' des neu einzuführenden Systems entsprechend an, so hat man p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ in ihrer bisherigen Bedeutung als die der Axe AY'' entsprechenden schiefen und senkrechten Projectionszahlen an den Grundaxen anzusehen; man hat daher in jenen Gleichungen blos statt der mit den Grundzeichen A, A_1 und C, C_1 versehenen Grössen hier die mit den Grundzeichen a, a_1 und c, c_1 versehenen, und statt der mit dem Grundzeichen A_2 und C_2 versehenen hier die mit den Grundzeichen p und $\mathfrak{p}$ versehenen zu setzen, so wie statt des dort durch W_1 bezeichneten Axenwinkels YAY' hier den φ zu nehmen. Durch diese Substitutionen verwandeln sich die Gleichungen (107. b.) in:

$$\pm\mathfrak{p}\sin\varphi = h(a'a''_1 - a''a'_1)\,,\quad \pm\mathfrak{p}'\sin\varphi = h(a''a_1 - a\,a''_1)\,,\quad \pm\mathfrak{p}''\sin\varphi = h(a\,a'_1 - a'a_1)\,,$$

und die in (107. f.) gegebenen werden:

$$\pm h\,p\sin\varphi = c'c''_1 - c''c'_1\,,\quad \pm h\,p'\sin\varphi = c''c_1 - c\,c''_1\,,\quad \pm h\,p''\sin\varphi = c\,c'_1 - c'c_1\,;$$

setzt man aber die hieraus für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und p, p', p'' sich ergebenden Werthe und zugleich $\frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin\varphi$ für F in die Gleichungen (121. a.), so nehmen diese, wenn man zu gleicher Zeit berücksichtigt, dass $\frac{h}{\mathfrak{C}} = \sin W''$, $\frac{h}{\mathfrak{C}'_1} = \sin W'$, $\frac{h}{\mathfrak{C}''_2} = \sin W$ ist, die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin W''(a'a''_1 - a''a'_1)\,, & P' &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin W'(a''a_1 - a a''_1)\,, & P'' &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\sin W(a a'_1 - a'a_1)\,;\\
(P) &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c'c''_1 - c''c'_1}{h}\,, & (P') &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c''c_1 - c\,c''_1}{h}\,, & (P'') &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c\,c'_1 - c'c_1}{h}\,;\\
Q &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c'c''_1 - c''c'_1}{\sin W''}\,, & Q' &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c''c_1 - c\,c''_1}{\sin W'}\,, & Q'' &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{c\,c'_1 - c'c_1}{\sin W}\,;\\
(Q) &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 h(a'a''_1 - a''a'_1)\,, & (Q') &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 h(a''a_1 - a\,a''_1)\,, & (Q'') &= \pm\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 h(a\,a'_1 - a'a_1)\,.
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(124. a.)}$$

Diese Gleichungen liefern die sämmtlichen Projectionen des aus den Seiten $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_1$ und dem eingeschlossenen Winkel φ gebildeten Dreiecks, wenn die Lagen und Grössen von zwei Seiten dieses Dreiecks bekannt sind. Lässt man in diesem Dreieck $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 = 1$ werden, wodurch sein Inhalt in den halben Inhalt des an dasselbe angeknüpften neuen Coordinatensystems übergeht, so ziehen sich die vorstehenden Gleichungen in die folgenden zurück:

$$\left.\begin{aligned}
P &= \pm\tfrac{1}{2}\sin W''(a'a''_1 - a''a'_1)\,, & P' &= \pm\tfrac{1}{2}\sin W'(a''a_1 - a\,a''_1)\,, & P'' &= \pm\tfrac{1}{2}\sin W(a\,a'_1 - a'a_1)\,;\\
(P) &= \pm\frac{1}{2h}(c'c''_1 - c''c'_1)\,, & (P') &= \pm\frac{1}{2h}(c''c_1 - c\,c''_1)\,, & (P'') &= \pm\frac{1}{2h}(c\,c'_1 - c'c)\,;\\
Q &= \pm\frac{1}{2\sin W''}(c'c''_1 - c''c'_1)\,, & Q' &= \pm\frac{1}{2\sin W'}(c''c_1 - c\,c''_1)\,, & Q'' &= \pm\frac{1}{2\sin W}(c\,c'_1 - c'c_1)\,;\\
(Q) &= \pm\tfrac{1}{2}h(a'a''_1 - a''a'_1)\,, & (Q') &= \pm\tfrac{1}{2}h(a''a_1 - a\,a''_1)\,, & (Q'') &= \pm\tfrac{1}{2}h(a\,a'_1 - a'a_1)\,;
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(124. b.)}$$

und es müssen immer auf den rechten Seiten von allen diesen Gleichungen stets nur die obern

oder nur die untern Vorzeichen genommen werden, je nachdem das an das Dreieck angeknüpfte und das ursprüngliche Coordinatensystem unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben.

Nimmt man die Projectionszahlen in die Betrachtung auf, welche die Axen des ursprünglichen Systems an den Axen des an das Dreieck angeknüpften Systems geben, und stellen, unserer eingeführten Bezeichnungsweise analog, b'', b_1'', b_2'' die schiefen Projectionszahlen vor, welche die Axen AX, AX', AX'' an der dritten Axe des an das Dreieck angeknüpften Systems geben, welche Axe senkrecht auf der Ebene des Dreiecks steht, und in analoger Weise δ'', δ_1'', δ_2'' die senkrechten Projectionszahlen, welche die Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ des ursprünglichen Systems an der Polaraxe $A\mathfrak{Y}''$ des an das Dreieck angeknüpften Systems in diesem Systeme geben, so hat man, den vordern Gleichungen (88. a.) zur Folge, weil hier $k = \sin W_1 = \sin\varphi$ wird:

(125. a.) $\quad \pm b''\sin\varphi = h(a'a_1'' - a''a_1')\,,\quad \pm b_1''\sin\varphi = h(a''a_1 - a\,a_1'')\,,\quad \pm b_2''\sin\varphi = h(a\,a_1' - a'a_1)\,.$

und den vordern Gleichungen (90. d.) zur Folge, wenn man φ an die Stelle von W_1 setzt:

(125. b.) $\quad \pm\delta''\sin\varphi = \frac{1}{\sin W''}(c'c_1'' - c''c_1')\,,\quad \pm\delta_1''\sin\varphi = \frac{1}{\sin W'}(c''c_1 - c\,c_1'')\,,\quad \pm\delta_2''\sin\varphi = \frac{1}{\sin W}(c\,c_1' - c'c_1)\,,$

wobei zu merken ist, dass von den doppelten Vorzeichen, die in den Gleichungen (125. a. und b.) vorkommen, wieder überall die obern oder überall die untern genommen werden müssen, je nachdem das ursprüngliche System und das an das Dreieck angeknüpfte einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben. Mittelst der Gleichungen (125. a. und b.) verwandeln sich nun die in (124. a.) aufgestellten, mit Rücksichtsnahme auf die Gleichungen $\frac{h}{\sin W''} = \mathfrak{S}$, $\frac{h}{\sin W'} = \mathfrak{S}_1'$, $\frac{h}{\sin W} = \mathfrak{S}_2''$, in:

(125. c.) $$\begin{cases} P = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{b''}{\mathfrak{S}}\sin\varphi\,, & P' = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{b_1''}{\mathfrak{S}_1'}\sin\varphi\,, & P'' = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{b_2''}{\mathfrak{S}_2''}\sin\varphi\,; \\ (P) = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{\delta''}{\mathfrak{S}}\sin\varphi\,, & (P') = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{\delta_1''}{\mathfrak{S}_1'}\sin\varphi\,, & (P'') = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\frac{\delta_2''}{\mathfrak{S}_2''}\sin\varphi\,; \\ Q = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\delta''\sin\varphi\,, & Q' = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\delta_1''\sin\varphi\,, & Q'' = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1\delta_2''\sin\varphi\,; \\ (Q) = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 b''\sin\varphi\,, & (Q') = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 b_1''\sin\varphi\,, & (Q'') = \frac{1}{2}\mathfrak{l}\mathfrak{l}_1 b_2''\sin\varphi\,; \end{cases}$$

in welchen die doppelten Vorzeichen verschwunden sind, und die, wenn man $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_1 = 1$ nimmt, übergehen in:

(125. d.) $$\begin{cases} P = \frac{1}{2}\frac{b''}{\mathfrak{S}}\sin\varphi\,, & P' = \frac{1}{2}\frac{b_1''}{\mathfrak{S}_1'}\sin\varphi\,, & P'' = \frac{1}{2}\frac{b_2''}{\mathfrak{S}_2''}\sin\varphi\,; \\ (P) = \frac{1}{2}\frac{\delta''}{\mathfrak{S}}\sin\varphi\,, & (P') = \frac{1}{2}\frac{\delta_1''}{\mathfrak{S}_1'}\sin\varphi\,, & (P'') = \frac{1}{2}\frac{\delta_2''}{\mathfrak{S}_2''}\sin\varphi\,; \\ Q = \frac{1}{2}\delta''\sin\varphi\,, & Q' = \frac{1}{2}\delta_1''\sin\varphi\,, & Q'' = \frac{1}{2}\delta_2''\sin\varphi\,; \\ (Q) = \frac{1}{2}b''\sin\varphi\,, & (Q') = \frac{1}{2}b_1''\sin\varphi\,, & (Q'') = \frac{1}{2}b_2''\sin\varphi\,; \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht in die (121. a.) zurückführen, so, dass man von ihnen aus auf den Punct zurückkommen kann, von welchem man ausgegangen ist. Es lässt sich nämlich sehr leicht zeigen, das hier $b'' = \mathfrak{p}$, $b_1'' = \mathfrak{p}'$, $b_2'' = \mathfrak{p}''$ und $\delta' = \mathfrak{S}\,p$, $\delta_1'' = \mathfrak{S}_1'\,p'$, $\delta_2'' = \mathfrak{S}_2''\,p''$ ist.

§. 7.

Verstellung des Coordinatensystems.

67) In der Regel stellt man sich die Axen eines Coordinatensystems, auf welche man die Puncte und Richtungen im Raume zu beziehen gedenkt, unabänderlich an ihre Stellen gebunden vor, wodurch dann die ans Coordinatensystem geknüpften Puncte und Richtungen nicht nur eine bestimmte relative Stellung gegen einander erhalten, sondern auch unveränderliche Stellen im Raume einnehmen; zuweilen indessen sieht man sich bewogen, von dieser Regel abzugehen, und dann wird man zu den Betrachtungen hingetrieben, welche den Gegenstand dieses Paragraphen ausmachen. Zuvörderst fällt nun unmittelbar in die Augen, dass die Beziehungen der Puncte und Richtungen zum Coordinatensysteme keine Aenderung erleiden, wenn jene und dieses gleichzeitig auf solche Weise im Raume fortbewegt werden, dass die gegenseitige Stellung beider stets die gleiche bleibt, so nämlich, wie wenn jene Puncte und Richtungen mit dem Systeme zu einem festen Ganzen vereinigt wären; wenn aber das Coordinatensystem bewegt wird, ohne dass die Puncte und Richtungen an dieser Bewegung Antheil nehmen, oder wenn die Puncte und Richtungen eine Lagenänderung erleiden, ohne dass das Coordinatensystem seine Stellung im Raume verlässt, so zieht diess Aenderungen in den Beziehungen der Puncte und Richtungen zum Coordinatensysteme nach sich, deren Art und Weise wir in Bezug auf jedes beliebige Coordinatensystem jetzt näher kennen lernen wollen. Vor Allem bemerken wir, dass die Aenderungen in den Beziehungen von der gleichen Beschaffenheit sind, man mag sich die fest unter sich vereinigt gedachten Puncte und Richtungen bewegt, das System dagegen in Ruhe bleibend denken, oder man mag sich das System mit Beibehaltung seiner Axenwinkel in umgekehrtem Sinne bewegt, die Puncte und Richtungen hingegen im Raume ruhend vorstellen. Um diess einzusehen, denke man sich die fest unter sich verbundenen Puncte und Richtungen beliebig wie im Raume fortbewegt, das System aber an seiner Stelle, die sein erster Ort heissen mag, bleibend, so werden dadurch die Beziehungen der aus ihren Stellen getretenen Puncte und Richtungen zu diesem Systeme andere geworden sein, als die waren, welche ihnen angehörten, bevor sie noch bewegt worden waren; diese Aenderungen würden jedoch ausgeblieben sein, wenn das System mit jenen Puncten und Richtungen fest verknüpft gewesen wäre und an ihrer Bewegung Theil genommen hätte, wodurch ihm dann eine andere Stelle, die wir seinen zweiten Ort nennen wollen, angewiesen worden wäre. Da die Beziehungen der bewegten Puncte und Richtungen zu dem an seinem zweiten Orte befindlichen Systeme ganz die gleichen sind wie die der noch unbewegten Puncte und Richtungen zu dem an seinem ersten Orte befindlichen Systeme, so werden alle die Resultate, welche durch die Untersuchung der Puncte und Richtungen an dem Systeme, als beide noch an ihrem ersten Orte waren, erhalten worden sind, auch noch ganz so wahr bleiben, wenn man sich beide zugleich an ihren zweiten Ort gelangt vorstellt. Würde aber jetzt das System aus seinem zweiten Orte auf dieselbe Weise wie es in diesen gelangt ist, wieder rückwärts in seinen ersten Ort bewegt, ohne dass die bewegten Puncte und Richtungen ihre neu eingenommenen Stellen verlassen, so wäre offenbar alles wieder gerade so wie zuvor, als die Puncte und Richtungen bewegt, das System aber ruhend gedacht worden waren. Es bringt sonach diese rückgängige Bewegung des Systems, an welcher die Puncte und Richtungen keinen Antheil nehmen, genau die gleichen Wirkungen hervor, wie die anfängliche, vorwärts schreitende Bewegung der Puncte und Richtungen, an

der das System keinen Antheil nahm, vorausgesetzt, dass man sich diese beiderlei Bewegungen von demselben Umfange einander geradezu entgegenlaufend denkt. Durch die hier gewonnene Einsicht werden wir berechtigt, entweder nur solche Beziehungsänderungen zu betrachten, welche Folge von einer einseitigen, mit den fest unter sich verbundenen Puncten und Richtungen vorgenommenen Bewegung ist, oder nur solche, welche eine einseitige Bewegung des in sich unveränderlichen Systems nach sich zieht. Wir werden nun Aenderungen der letztern Art ausführlich untersuchen und dabei zunächst voraussetzen, dass die Spitze des Coordinatensystems während der Bewegung des letztern stets einen und denselben Punct im Raume einnehme, oder mit andern Worten, dass das Coordinatensystem sich um seine Spitze beliebig drehe.

68) Fassen wir zuvörderst ein senkrechtes System ins Auge, welches um diejenige seiner drei Axen, die senkrecht auf den zwei übrigen steht, so gedreht wird, dass seine Spitze dabei ihren Ort nicht verlässt, so bleibt im Laufe dieser Bewegung sowohl diese senkrechte Axe, als auch die Ebene, in welcher die zwei übrigen Axen liegen, unverrückt an ihrer Stelle. Obwohl aber diese Axe und diese Ebene ihren Ort nicht ändern, und die beiden andern Axen stets in dieser Ebene liegen bleiben, so ändern doch diese andern Axen ihre Stellen im Raume und gelangen während der Drehung in immer neue Lagen, während beide bewegte Axen, verglichen mit ihrer anfänglichen Stellung, wenn die Axenwinkel des Systems, wie wir voraussetzen, unausgesetzt die gleichen bleiben, Winkel beschreiben, welche in jedem Augenblicke bei beiden Axen die gleichen sind, weshalb wir die Grösse dieses Winkels zum Maas der Drehung wählen und durch λ bezeichnen wollen. Stellt AX'' die senkrechte Axe vor, um welche das System gedreht wird, und zeigen vor der Drehung AX und AX', nach der Drehung AX_1 und AX'_1 die beiden andern Axen an, welche sich während der Drehung des Systems in der durch A senkrecht auf AX'' gelegten Ebene fortbewegt haben, so bilden also AX und AX_1 sowohl, als AX' und AX'_1 unter sich den Winkel λ.

Denken wir uns nun einen beliebigen Punct O und bezeichnen wir einmal durch x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten dieses Punctes, durch a, a', a'' und c, c', c'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der Richtung AO an den Axen AX, AX', AX'' in der Stellung, die sie vor der Drehung des Systems einnahmen; bezeichnen wir sodann durch x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die schiefen und senkrechten Coordinaten desselben Punctes O, durch a_1, a'_1, a''_1 und c_1, c'_1, c''_1 die schiefen und senkrechten Projectionszahlen derselben Richtung AO an den Axen AX_1, AX'_1, AX''_1 in der Stellung, die sie nach der Drehung des Systems einnehmen; denken wir uns ferner den Punct O durch eine mit der Axe AX'' parallele Gerade auf die während der Drehung ruhende durch AX und AX' hindurch gelegte Ebene in P projicirt, und bezeichnen wir durch ϱ und w, w' die zu P gehörige Speichenlänge und die Winkel, welche die Richtung dieser Speiche mit den Axen AX, AX' des noch ungedrehten Systems bildet, durch ϱ_1 und w_1, w'_1 die zu P gehörige Speichenlänge und die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen AX_1, AX'_1 des bereits um den Winkel λ gedrehten Systems bildet, so ist in Gemässheit der für ein senkrechtes System gültigen Gleichungen (120. b. und d.) sowohl

$$\varrho^2 = xu + x'u' \quad \text{und} \quad \varrho \cos w = cr\,, \quad \varrho \cos w' = c'r$$

als auch

$$\varrho_1^2 = x_1u_1 + x'_1u'_1 \quad \text{und} \quad \varrho_1 \cos w_1 = c_1 r\,, \quad \varrho_1 \cos w'_1 = c'_1 r\,,$$

wenn r die Entfernung des Punctes O von der Coordinatenspitze A, die vor und nach der Drehung stets die gleiche bleibt, vorstellt. Da w und w' die Winkel bezeichnen, welche die

Speichenrichtung AP mit den Axen AX und AX′ bildet, und diese drei Richtungen in der durch AX und AX′ gelegten Projectionsebene liegen, während AX und AX′ den Winkel W mit einander machen, so ist ohne Ausnahme $w = w' + W$, wenn man die beiden Winkel w und w′ immer von AX und AX′ aus nach der Seite hin erzeugt sich denkt, auf welcher man von AX aus über die Coordinatenebene XAX′ hinweg zu AX′ hingelangt, oder sie als negative Grössen in die Rechnung einführt, falls man sie sich von AX und AX′ aus nach der entgegengesetzten Seite hin erzeugt vorstellt. Aus dem gleichen Grunde ist auch $w_1 = w'_1 + W$, wenn man die Winkel w_1 und w'_1 von AX_1 und AX'_1 aus nach der gleichen Seite hin erzeugt sich vorstellt. Bedenkt man noch, dass sowohl die Projectionsaxe wie auch die Projectionsebene des aus der Axe AX″ und aus der auf ihr senkrechten durch AX und AX′ gelegten Ebene gebildeten Projectionssystems während der Drehung des Coordinatensystems unverrückt an ihrer Stelle bleiben, weshalb $\varrho = \varrho_1$ ist, und dass, worauf schon vorhin aufmerksam gemacht worden ist, die Axen AX und AX′ vor der Drehung von denen AX_1 und AX'_1 nach der Drehung um den Winkel λ abliegen, weshalb $w = w_1 + \lambda$ und $w' = w'_1 + \lambda$ ist, wenn man sich den Winkel λ von AX oder AX′ aus durch eine Bewegung gebildet denkt, die in derselben Richtung geschieht, in welcher man von AX aus über die Coordinatenebene XAX′ hinweg zu AX′ gelangt, oder ihn, wenn seine Erzeugung die umgekehrte ist, als negative Grösse in die Rechnung einführt, so lassen sich mittelst der so eben festgestellten Relationen die vier Winkel w, w′ und w_1, w'_1 durch einen derselben darstellen; man findet so z. B.

$$w' = w - W\,,\quad w_1 = w - \lambda\,,\quad w'_1 = w - W - \lambda\,.$$

Setzt man aber in die zuvor gefundenen zwei Zeilen von Gleichungen für w′, w_1, w'_1 ihre hier gegebenen Werthe und zugleich für cr und c′r ihre Werthe u und u′, so wie für $c_1 r$ und und $c'_1 r$ die u_1 und u'_1, und erinnert man sich, dass $\varrho = \varrho_1$ ist, so gehen dieselben über in:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho^2 = x\,u + x'u' \text{ und } \varrho\cos w = u\,,\quad \varrho\cos(w - W) = u' \\ \text{und} \\ \varrho^2 = x_1 u_1 + x'_1 u'_1 \text{ und } \varrho\cos(w-\lambda) = u_1\,,\quad \varrho\cos(w - \lambda - W) = u'_1\,. \end{array}\right\} \quad \text{(126. a.)}$$

Die letzten Gleichungen auf jeder dieser Zeilen geben, wenn man cos(w — W) nach Sinus und Kosinus von w und W, und cos(w — λ — W) nach denen von w — λ und W entwickelt und für $\varrho\cos w$ und $\varrho\cos(w-\lambda)$ ihre Werthe aus den ihnen voranstehenden Gleichungen setzt:

$$\varrho \sin w = \frac{u' - u\cos W}{\sin W} \quad \text{und} \quad \varrho\sin(w-\lambda) = \frac{u'_1 - u_1\cos W}{\sin W}\,,$$

welche Gleichungen, wenn man erwägt, dass da in unserm jetzigen senkrechten System W′ und W″ rechte Winkel sind, den im senkrechten Systeme gültigen Gleichungen (105. a.) und (105. b.) zur Folge, die, nachdem man in dieselben $\frac{u}{r}$, $\frac{u'}{r}$, $\frac{u''}{r}$ für c, c′, c″ und $\frac{x}{r}$, $\frac{x'}{r}$, $\frac{x''}{r}$ für a, a′, a″ gesetzt hat

$$\left.\begin{array}{l} u = x + x'\cos W\,,\quad u' = x\cos W + x'\,,\quad u'' = x'' \\ \text{und} \\ u' - u\cos W = x'\sin^2 W \quad \text{und} \quad u - u'\cos W = x\sin^2 W \end{array}\right\} \quad \text{(126. b.)}$$

geben, und noch gültig bleiben, wenn den Coordinatenzeichen der Index 1 beigelegt wird, weil die Axenwinkel im System vor und nach der Drehung dieselben bleiben, sich verwandeln in:

(126. c.) $$\left\{\begin{array}{l} \varrho \sin w = x' \sin W \quad \text{und} \quad \varrho \sin(w-\lambda) = x'_1 \sin W\,, \\ \quad \text{denen} \\ \varrho \cos w = u \quad \text{und} \quad \varrho \cos(w-\lambda) = u_1 \end{array}\right.$$

gegenüberstehen, welche letztern die mittlern Gleichungen (126. a.) sind. Entwickelt man in den hintern dieser Gleichungen $\sin(w-\lambda)$ und $\cos(w-\lambda)$ nach Sinus und Kosinus von w und λ, so erhält man, für $\varrho \cos w$ und $\varrho \sin w$ ihre Werthe aus den vordern setzend:

(126. d.) $$\left\{\begin{array}{l} x'_1 = x' \cos\lambda - u \dfrac{\sin\lambda}{\sin W} \quad \text{und} \quad u_1 = u \cos\lambda + x' \sin W \sin\lambda\,, \\ \quad \text{denen analog die} \\ x_1 = x \cos\lambda + u' \dfrac{\sin\lambda}{\sin W} \quad \text{und} \quad u'_1 = u' \cos\lambda - x \sin W \sin\lambda \end{array}\right.$$

sind, welche sich ergeben, wenn man die auf jeder Zeile vordersten Gleichungen (126. b.), nachdem man ihren Coordinatenzeichen den Index 1 gegeben hat, so schreibt:

$$x_1 = u_1 - x'_1 \cos W \quad \text{und} \quad u'_1 = u_1 \cos W + x'_1 \sin^2 W\,,$$

und nun für u_1 und x'_1 ihre Werthe aus den obern Gleichungen (126. d.) setzt, worauf sie mit Berücksichtigung derselben ohne Index geschriebenen Gleichungen ohne Weiters die auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (126. d.) geben. Fügt man zu diesen Gleichnngen noch die:

(126. e.) $$x''_1 = u''_1 = x'' = u''\,,$$

welche Folgen der obern dritten Gleichung (126. b.) verbunden mit dem Umstande sind, dass die der Axe AX″ zugehörigen Coordinaten sich während der Drehung des Systems nicht ändern, so hat man Alles, was zur Bestimmung der durch die Drehung veranlassten Coordinatenänderungen erforderlich ist.

69) Mittelst der in voriger Nummer erhaltenen Uebertragungsformeln, die dem senkrechten System angehören, lassen sich nun leicht die auffinden, welche sich auf ein beliebiges System beziehen, das um eine seiner Grund- oder Polaraxen gedreht wird. Wir betrachten hierbei successive die folgenden zwei Fälle:

I) Wird das beliebige System um eine seiner Polaraxen gedreht, wozu wir die der Grundaxe AX″ entsprechende A𝔛″ nehmen wollen, und denken wir uns an die Stelle des ursprünglichen aus den Axen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten beliebigen Systems ein neues gesetzt, dessen Axen wir durch AY, AY′, AY″ bezeichnen und dergestalt anordnen, dass die AY und AY′ bezüglich mit denen AX und AX′ zusammenfallen, die AY″ hingegen in die zum ursprünglichen System gehörige Polaraxe A𝔛″ fällt, so ist dieses neue System ein zur Axe AY″ oder A𝔛″ senkrechtes und befindet sich daher genau in dem zuvor behandelten Falle; bezeichnen daher y, y′, y″ und v, v′, v″ die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen AY, AY′, AY″ von dem Puncte O, der im ursprünglichen System die Coordinaten x, x′, x″ und u, u′, u″ hat, beides bevor noch die Systeme irgend eine Drehung erlitten haben, und stellt man die Coordinaten desselben Punctes O an den Systemen, die aus den vorigen durch eine gemeinschaftliche Drehung derselben um die Axe AY″ oder A𝔛″ hervorgehen, durch die gleichen aber mit dem Index 1 versehenen Zeichen vor, so hat man nach Anleitung der Gleichungen (126. d. und e.), da in unsern jetzigen beiden Systemen XAX′ = YAY′ = W ist:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = y'\cos\lambda - v\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin W}\,,\quad v_1 = v\cos\lambda + y'\sin W\sin\lambda \\ \text{und} \\ y_1 = y\cos\lambda + v'\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin W}\,,\quad v'_1 = v'\cos\lambda - y\sin W\sin\lambda \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(a.)}$$

so wie auch

$$y''_1 = v''_1 = y'' = v'', \qquad \text{(b.)}$$

wobei man sich unter λ den Winkel vorzustellen hat, den eine durch die Axe A Y″ oder A 𝔛″ gelegte und mit den Systemen fest verbundene Ebene während der, beiden Systemen gemeinschaftlichen, Drehung beschreibt.

Da die zwei Axen A Y und A Y′ vom neuen System in den Axen A X und A X′ des ursprünglichen liegen und die Axe A Y″ von jenem mit der Polaraxe A 𝔛″ von diesem zusammenfällt, so befinden sich diese zwei Systeme genau in dem Falle der zwei in Nr. 61. betrachteten, weshalb die mit den Grundzeichen A und B versehenen Projectionszahlen, welche die Axen des einen Systems an den Axen des andern Systems liefern, hier wie dort durch die Gleichungen (116. a. bis c.) gegeben werden. Setzt man aber diese Werthe für jene Projectionszahlen in die Gleichungen (65. a.) und (66. a.) ein, wodurch die Abhängigkeit zwischen den Coordinaten von einem und demselben Puncte an zwei beliebigen Systemen ausgesprochen wird, so zeigen diese, dass man bei unsern jetzigen Systemen hat;

$$v = u\ ,\quad v' = u'\ ,\quad v'' = \mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}'_2 u' + \mathfrak{A}''_2 u'' \quad \text{oder} \quad v'' = \mathfrak{C}''_2 x'',$$

(letzteres der dritten Gleichung (48. a.) zur Folge) und

$$y = x - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{C}''_2 x'',\quad y' = x' - \mathfrak{A}'_2\,\mathfrak{C}''_2 x'',\quad y'' = \mathfrak{C}''_2 x'',$$

welche Gleichungen noch wahr bleiben, wenn man allen Coordinatenzeichen den Index 1 beilegt, weil die beiden Systeme vor und nach der Drehung ihre Stellung gegen einander nicht verändern. Durch diese für v, v', v'' und y, y', y'', so wie auch für v_1, v'_1, v''_1 und y_1, y'_1, y''_1 erhaltenen Werthe nun nehmen die vorstehenden Gleichungen (a) und (b) die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 - \mathfrak{A}'_2\,\mathfrak{C}''_2 x''_1 = (x' - \mathfrak{A}'_2\,\mathfrak{C}''_2 x'')\cos\lambda - u\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin W}\,,\quad u_1 = u\cos\lambda + (x' - \mathfrak{A}'_2\,\mathfrak{C}''_2 x'')\sin W\sin\lambda \\ \text{und} \\ x_1 - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{C}''_2 x''_1 = (x - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{C}''_2 x'')\cos\lambda + u'\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin W}\,,\quad u'_1 = u'\cos\lambda - (x - \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{C}''_2 x'')\sin W\sin\lambda \end{array}\right\} \cdot\cdot \text{(127. a.)}$$

so wie

$$x''_1 = x''. \qquad \text{(127. b.)}$$

Da nach Aussage der dritten Gleichung (15. a.)

$$u''_1 = x_1\cos W' + x'_1\cos W'' + x''_1$$

ist, so erhält man noch, wenn man für x_1 und x'_1 ihre in den vordern Gleichungen (127. a.) enthaltenen Werthe setzt, und auf die Gleichung (127. b.) Rücksicht nimmt:

$$u''_1 = x''_1 + \mathfrak{C}''_2 x''_1(\mathfrak{A}_2\cos W' + \mathfrak{A}'_2\cos W'') + [x\cos W' + x'\cos W'' - \mathfrak{C}''_2 x''(\mathfrak{A}_2\cos W' + \mathfrak{A}'_2\cos W'')]\cos\lambda$$
$$+ (u'\cos W' - u\cos W'')\,\frac{\sin\lambda}{\sin W}\,,$$

welche Gleichung einfacher wird, wenn man beachtet, dass den Gleichungen (15. a.) zur Folge

$$x\cos W' + x'\cos W'' = u'' - x'' \quad \text{und}$$

$$u'\cos W' - u\cos W'' = x(\cos W\cos W' - \cos W'') - x'(\cos W\cos W'' - \cos W')$$

und der letzten Gleichung (33) gemäss

$$\mathfrak{A}_2\cos W' + \mathfrak{A}'_2\cos W'' = \mathfrak{C}''_2 - \mathfrak{A}''_2$$

ist, wodurch sie sich, weil $\mathfrak{A}''_2\mathfrak{C}''_2 = 1$ und den Gleichungen (38) gemäss

$$\cos W\cos W' - \cos W'' = \sin W\sin W'\cos\mathfrak{W}''$$

und

$$\cos W\cos W'' - \cos W' = \sin W\sin W''\cos\mathfrak{W}'$$

ist, umgestaltet in:

(127. c.) $$u''_1 = \mathfrak{C}''^2_2 x''_1 + (u'' - \mathfrak{C}''^2_2 x'')\cos\lambda + (x\sin W'\cos\mathfrak{W}'' - x'\sin W''\cos\mathfrak{W}')\sin\lambda.$$

Die Gleichungen (127. a. bis c.) lassen sich noch in bessere Formen bringen, was wir jedoch hier übergehen, da sich sogleich der Gegenstand in allgemeinster Weise und in den zweckmässigsten Formen herausstellen wird.

II) Wird das beliebige System um eine seiner Grundaxen, wozu wir die AX″ nehmen wollen, in solcher Weise gedreht, dass dessen Spitze A ihre Stelle nicht verlässt, so fällt diese Bewegung des Systems mit der in I) betrachteten zusammen, so wie man das Polarsystem, dessen Axen A𝔛, A𝔛′, A𝔛″ sind, zum Grundsysteme macht, dessen Polarsystem dann das vorige aus den Axen AX, AX′, AX″ gebildete Grundsystem wird. Man erhält diesem nach die hierher gehörigen Formeln unmittelbar aus den in I) aufgestellten dadurch, dass man in diesen alle Beziehungen zum Grundsystem in die analogen zum Polarsystem und umgekehrt alle Beziehungen zum Polarsystem in die analogen zum Grundsystem umändert. Bezeichnen wir daher nach der schon in Nr. 33. gewählten Art die Coordinaten eines beliebigen Punctes O an den Polaraxen ganz so wie die gleichnamigen desselben Punctes an den entsprechenden Grundaxen, nur mit dem Unterschiede, dass wir diese Zeichen mit Klammern umgeben, so gestalten sich die Gleichungen (127. a. bis c.) durch diese Umänderung und dadurch, dass wir die Grundzeichen W und 𝔚 mit einander vertauschen, (wodurch die Grössen $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$ andere Werthe annehmen werden, die wir durch $(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}'_2)$ bezeichnen wollen, während die Grösse $\mathfrak{C}''_2$, die den Kosinus des von den Axen AX″ und A𝔛″ gebildeten Winkels vorstellt, durch die hier vorgenommene durchgängige Verwechselung des Grund- und Polarsystems, eines mit dem andern, gar keine Aenderung erleidet), in folgende andere um. Die Gleichungen (127. a.) werden:

(127. a.) $$(x'_1) - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x''_1) = [(x') - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x'')]\cos\lambda - (u)\frac{\sin\lambda}{\sin\mathfrak{W}},$$

$$(u_1) = (u)\cos\lambda + [(x') - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x'')]\sin\mathfrak{W}\sin\lambda$$

(127. b.) und

$$(x_1) - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x''_1) = [(x) - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x'')]\cos\lambda + (u')\frac{\sin\lambda}{\sin\mathfrak{W}},$$

$$(u'_1) = (u')\cos\lambda - [(x) - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}''_2\,(x'')]\sin\mathfrak{W}\sin\lambda\;;$$

die (127. b.) liefert:

$$(x''_1) = (x'')$$

und die (127. c.) verwandelt sich in:

$$(u''_1) = \mathfrak{C}''^2_2\,(x''_1) + [(u'') - \mathfrak{C}''^2_2\,(x'')]\cos\lambda + [(x)\sin\mathfrak{W}'\cos W'' - (x')\sin\mathfrak{W}''\cos W']\sin\lambda\,,$$

wobei wieder λ den Winkel vorstellt, den eine durch die Axe AX″, um welche das System gedreht wird, gelegte und mit diesem fest verbundene Ebene während der Drehung beschreibt. Drückt man aber die auf das Polarsystem sich beziehenden Coordinaten nach Anleitung der

Gleichungen (57. a.) und (57. b.) durch die auf das Grundsystem sich beziehenden aus, so nehmen die vorstehenden Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l} u'_1 - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}'_1\, u''_1 = (u' - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}'_1\, u'')\cos\lambda - \mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1\, x\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin\mathfrak{W}}\,, \\ x_1 = x\cos\lambda + \dfrac{1}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1}(u' - (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}'_1\, u'')\sin\mathfrak{W}\sin\lambda \\ \text{und} \\ u_1 - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}\, u''_1 = (u - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}\, u'')\cos\lambda + \mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1\, x'\,\dfrac{\sin\lambda}{\sin\mathfrak{W}}\,, \\ x'_1 = x'\cos\lambda - \dfrac{1}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1}(u - (\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}\, u'')\sin\mathfrak{W}\sin\lambda\,, \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a.)}$$

$$u''_1 = u''; \quad \text{(b.)}$$

$$x''_1 = u''_1 + (x'' - u'')\cos\lambda + \frac{1}{\mathfrak{C}''_2}\left(u\,\frac{\sin\mathfrak{W}'\cos W''}{\mathfrak{C}} - u'\,\frac{\sin\mathfrak{W}''\cos W'}{\mathfrak{C}'_1}\right)\sin\lambda\,. \quad \text{(c.)}$$

Die in den vorstehenden Gleichungen vorkommenden Grössen $(\mathfrak{A}_2)$ und $(\mathfrak{A}'_2)$ ergeben sich aus $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{A}'_2$ durch Vertauschung der Grundzeichen W und $\mathfrak{W}$ mit einander, sie sind daher dieselben, wie die in (46. a.) vorkommenden gleich bezeichneten, so dass man hat:

$$(\mathfrak{A}_2) = \frac{\cos W'}{\sin W'\sin\mathfrak{W}} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}'_2) = \frac{\cos W''}{\sin W''\sin\mathfrak{W}}\,,$$

hieraus findet man, weil die Gleichungen (41) und (42)

$$\mathfrak{C} = \sin W'\sin\mathfrak{W} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}'_1 = \sin W''\sin\mathfrak{W} \quad \text{geben,}$$

$$(\mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C} = \cos W' \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}'_2)\,\mathfrak{C}'_1 = \cos W''; \quad \text{(d.)}$$

ferner geben die Gleichungen (41):

$$\frac{\sin\mathfrak{W}}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1} = \frac{\sin W''\sin W'\sin\mathfrak{W}}{h^2}\,, \quad \frac{\sin\mathfrak{W}'}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}''_2} = \frac{\sin W''\sin W\sin\mathfrak{W}'}{h^2}\,, \quad \frac{\sin\mathfrak{W}''}{\mathfrak{C}'_1\,\mathfrak{C}''_2} = \frac{\sin W\sin W'\sin\mathfrak{W}''}{h^2}\,,$$

oder in Hinblick auf die Gleichungen (42):

$$\frac{\sin\mathfrak{W}}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'_1} = \frac{1}{h}\,, \quad \frac{\sin\mathfrak{W}'}{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}''_2} = \frac{1}{h}\,, \quad \frac{\sin\mathfrak{W}''}{\mathfrak{C}'_1\,\mathfrak{C}''_2} = \frac{1}{h}\,. \quad \text{(e.)}$$

Mittelst der in den Gleichungen (d), (e) ausgesprochenen Relationen gehen nun die Gleichungen (a) über in:

$$\left.\begin{array}{l} u'_1 = u''_1\cos W'' + (u' - u''\cos W'')\cos\lambda - h\,x\sin\lambda\,, \\ x_1 = x\cos\lambda + \dfrac{1}{h}(u' - u''\cos W)\sin\lambda \\ \text{und} \\ u_1 = u''_1\cos W' + (u - u''\cos W')\cos\lambda + h\,x'\sin\lambda\,, \\ x'_1 = x'\cos\lambda - \dfrac{1}{h}(u - u''\cos W')\sin\lambda\,; \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(128. a.)}$$

die Gleichung (b) bleibt:

$$u''_1 = u''; \quad \text{(128. b.)}$$

die (c) aber giebt:

$$x''_1 = u''_1 + (x'' - u'')\cos\lambda + \frac{1}{h}(u\cos W'' - u'\cos W')\sin\lambda\,. \quad \text{(128. c.)}$$

70) Wir gehen jetzt daran, die Coordinatenänderungen, welche aus der Drehung eines beliebigen Systems um dessen Spitze hervorgehen, in allgemeinster Weise darzulegen. Zu dem Ende denken wir uns durch die Spitze A eines aus den Axen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten schiefwinkligen Coordinatensystems eine Richtung AZ ganz nach Willkühr gelegt und mit dem Systeme fest verbunden, und hierauf dem Systeme eine Drehung um diese mit ihm fest verbundene beliebige Richtung AZ von der Grösse λ ertheilt, wobei λ den Winkel bezeichnet, den eine durch AZ gelegte, mit dem Systeme ebenfalls in fester Verbindung stehende Ebene während der Drehung beschreibt. Um das Ergebniss einer solchen Drehung leicht beurtheilen zu können, führen wir neben dem ursprünglichen Systeme, dessen Axen AX, AX′, AX″ sind, noch ein neues aus den Axen AY, AY′, AY″ gebildetes ein, das wir wie folgt anordnen. Die beiden Axen AY und AY′ vom neuen System sollen bezüglich mit den zwei Axen AX und AX′ vom ursprünglichen System zusammenfallen, und die dritte Axe AY″ des neuen Systems soll die beliebig eingeführte Richtung AZ werden. Bei dieser Beschaffenheit des neuen Systems befindet sich dasselbe während der Drehung des ursprünglichen Systems um die mit ihm fest vereinigte Richtung AZ in dem Falle II) der vorigen Nummer, weshalb die dort erhaltenen in (128. a. bis c.) aufgestellten Relationen auf es ihre volle Anwendung finden, wenn man in ihnen an die Stelle der dortigen auf das ursprüngliche System sich beziehenden Grössen hier die analogen auf das neue System sich beziehenden setzt; bezeichnen wir daher diese in der Weise, dass wir ihnen hier die Grundzeichen W_1, y, v beilegen, wo dort die W, x, u standen, diesen Grundzeichen hier wie dort die gleichen Abzeichen lassend, und durch k vorstellend, was aus h wird, wenn W_1, W_1', W_1'' und $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_1''$ an die Stelle von W, W′, W″ und $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ treten, wobei $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_1'$, $\mathfrak{W}_1''$ im neuen System wie $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ im alten sich auf die zu den Grundaxen gehörigen Polaraxen beziehen, so liefern jene Gleichungen für unser jetziges neues System unmittelbar die folgenden Relationen. Die (128. a.) geben:

(a.)
$$\left\{\begin{aligned} v_1' &= v_1''\cos W_1'' + (v' - v''\cos W_1'')\cos\lambda - k\,y\sin\lambda\,, \\ y_1 &= y\cos\lambda + \frac{1}{k}(v' - v''\cos W_1'')\sin\lambda \\ &\text{und} \\ v_1 &= v_1''\cos W_1' + (v - v''\cos W_1')\cos\lambda + k\,y'\sin\lambda\,, \\ y_1' &= y'\cos\lambda - \frac{1}{k}(v - v''\cos W_1')\sin\lambda\,; \end{aligned}\right.$$

die (128. b.) liefert:

(b.)
$$y_1'' = v''$$

und die (128. c.) wird hier:

(c.)
$$y_1'' = v_1'' + (y'' - v'')\cos\lambda + \frac{1}{k}(v\cos W_1'' - v'\cos W_1')\sin\lambda\,.$$

Bedienen wir uns für die Projectionszahlen, welche die Axen des neuen Systems an den Axen des ursprünglichen Systems oder diese an jenen geben, wieder der in Nr. 23. eingeführten Zeichen, so ist hier, wo die Axen AY und AY′ vom neuen System in denen AX und AX′ vom ursprünglichen liegen:

(129. a.)
$$\left\{\begin{aligned} &A = 1\,,\quad A' = 0\,,\quad A'' = 0 \quad\text{und}\quad B = 1\,,\quad B' = 0\,,\quad B'' = 0\,, \\ &A_1 = 0\,,\quad A_1' = 1\,,\quad A_1'' = 0 \quad\text{und}\quad B_1 = 0\,,\quad B_1' = 1\,,\quad B_1'' = 0\,; \end{aligned}\right.$$

bezeichnen wir ferner die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung AZ an den Axen AX, AX′, AX″ giebt, jener Bezeichnungsweise entsprechend, weil die Richtung AZ

und die Axe AY'' hier in einander liegen, durch A_2, A_2', A_2'' und C_2, C_2', C_2'', und suchen wir die diesen Werthen entsprechenden Grössen B_2, B_2', B_2'' den vordern Gleichungen (81. a.) gemäss auf, so giebt uns deren letzte Gruppe — wenn wir nach Anleitung der Gleichungen (84. c.) $[\overset{3}{A}] = \pm\frac{k}{h}$ setzen, und nur das obere Vorzeichen beibehalten, was stets erlaubt ist, da diess nach den Erörterungen der Nr. 41. nichts weiter verlangt, als dass die Richtung AZ mit der AX'' auf einerlei Seite von XAX' liege, und die Resultate der Drehung völlig die gleichen bleiben, wenn man auch die Richtung AZ mit der vertauscht, die mit dieser in einer und derselben Geraden liegt, aber ihr entgegengesetzt ist — für diese Grössen die nachstehenden Resultate:

$$B_2 = -\frac{h}{k}A_2\,, \quad B_2' = -\frac{h}{k}A_2'\,, \quad B_2'' = \frac{h}{k}\,. \qquad \textbf{(129. b.)}$$

Setzt man diese unsern beiden Systemen zukommenden besondern Werthe an die Stelle der Projectionszahlen, deren Grundzeichen A und B ist, in die Gleichungen (65. a.) und (66. a.), welche die Relationen zwischen den zu einem und demselben Punct gehörigen Coordinaten in zwei allgemein auf einander bezogenen Systemen aussprechen, so geben diese in Bezug auf die zwei hier ins Auge gefassten besondern:

$$\left.\begin{aligned} &v = u\,, \quad v' = u'\,, \quad v'' = A_2 u + A_2' u' + A_2'' u''\,, \\ \text{und}\quad & \\ &y = x - \frac{h}{k}A_2 x''\,, \quad y' = x' - \frac{h}{k}A_2' x''\,, \quad y'' = \frac{h}{k}x''\,, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \textbf{(129. c.)}$$

in welchen die Coordinaten sich auf einen und denselben beliebigen Punct O im ursprünglichen und im neuen Systeme vor eingetretener Drehung um die Richtung AZ beziehen. Da aber diese beiden Systeme während der Drehung stets die gleiche relative Stellung zu einander behalten, so finden die gleichen Relationen auch noch bei diesen zwei Systemen in der Lage statt, die sie nach vollendeter Drehung um die Richtung AZ einnehmen; bezeichnet man daher die Coordinaten desselben Punctes O an den zwei in dieser letztern Lage befindlichen Systemen gerade so, wie die zur ersten Lage gehörigen, jedoch mit dem Unterschiede, dass man ihren Grundzeichen den Index 1 anhängt, so ist eben so:

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = u_1\,, \quad v_1' = u_1'\,, \quad v_1'' = A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1''\,, \\ \text{und}\quad & \\ &y_1 = x_1 - \frac{h}{k}A_2 x_1''\,, \quad y_1' = x_1' - \frac{h}{k}A_2' x_1''\,, \quad y_1'' = \frac{h}{k}x_1''\,. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \textbf{(129. d.)}$$

Durch die hier in den Gleichungen (129. a. bis d.) aufgestellten Relationen nun nehmen die vorhin gegebenen (a) bis (c) die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} &u_1' - (A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1'')\cos W_1'' = [u' - (A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'')\cos W_1'']\cos\lambda - (kx - hA_2 x'')\sin\lambda\,, \\ &k x_1 - h A_2 x_1'' = (kx - hA_2 x'')\cos\lambda + [u' - (A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'')\cos W_1'']\sin\lambda\,, \\ &\text{und} \\ &u_1 - (A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1'')\cos W_1' = [u - (A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'')\cos W_1']\cos\lambda + (kx' - hA_2' x'')\sin\lambda\,, \\ &k x_1' - h A_2' x_1'' = (kx' - hA_2' x'')\cos\lambda - [u - (A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'')\cos W_1']\sin\lambda\,; \end{aligned}\right\} \textbf{(130. a.)}$$

$$A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1'' = A_2 u + A_2' u' + A_2'' u''\,; \qquad \textbf{(130. b.)}$$

$$h x_1'' - k(A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1'') = [hx'' - k(A_2 u + A_2' u' + A_2'' u'')]\cos\lambda + (u\cos W_1'' - u'\cos W_1')\sin\lambda\,. \quad \textbf{(130. c.)}$$

71) Um die in der vorigen Nummer mitgetheilten allgemeinen Gleichungen (130. a. bis c.) in eine für deren Anwendung bequemere Form zu bringen, haben wir den Einfluss zu beachten, den die Besonderheit der zwei ihnen unterliegenden Systeme auf sie hat. Zuvörderst machen wir darauf aufmerksam, dass

(a.) $$\cos W'_1 = C_2\,, \quad \cos W''_1 = C'_2 \quad \text{und} \quad W_1 = W$$

ist, weil unserer Bezeichnung gemäss C_2 und C'_2 die senkrechten Projectionszahlen vorstellen, welche die Richtung AZ an den Axen AX und AX′ giebt, und diese nichts anders sind, als die Kosinuse der Winkel XAZ und X′AZ oder, weil AZ und AY″ in einander liegen, der Winkel XAY″ und X′AY″, welche, weil AY und AY′ bezüglich in AX und AX′ liegen, keine andern als die YAY″ und Y′AY″ oder W'_1 und W''_1 sind. Hierauf bemerken wir, dass den Gleichungen (9. a. und b.) zur Folge $\mathfrak{A}_2 C_2 + \mathfrak{A}'_2 C'_2 + \mathfrak{A}''_2 C''_2$ der Kosinus des Winkels ist, den die zur Grundaxe AX″ gehörige Polaraxe A$\mathfrak{X}''$ im ursprünglichen Systeme mit der Richtung AZ bildet; weil aber die zu AX″ gehörige Polaraxe A$\mathfrak{X}''$ im ursprünglichen System und die zu AY″ gehörige Polaraxe A$\mathfrak{Y}''$ im neuen System in einander fallen, da die Coordinatenebene XAX′ von jenem in der Coordinatenebene YAY′ von diesem liegt, und beide Systeme bei der ihnen hier gewordenen Verschmelzung eine ähnliche Axenstellung haben, so ist der Winkel $\mathfrak{X}''$AZ dem $\mathfrak{Y}''$AZ oder, weil AY″ in AZ liegt, dem $\mathfrak{Y}''$AY″ gleich, dessen Kosinus nichts Anders ist, als die Grösse in Bezug auf das neue System, welche im alten Systeme das Zeichen $\mathfrak{C}''_2$ hat, und die wir beim neuen durch $\mathfrak{D}''_2$ bezeichnen wollen, wornach also

$$\mathfrak{A}_2 C_2 + \mathfrak{A}'_2 C'_2 + \mathfrak{A}''_2 C''_2 = \mathfrak{D}''_2$$

ist. Die dritte Gleichung (47. a.) aber zeigt, wenn man sie auf die AZ in Anwendung bringt, dass

$$\mathfrak{A}_2 C_2 + \mathfrak{A}'_2 C'_2 + \mathfrak{A}''_2 C''_2 = \mathfrak{C}''_2 A''_2$$

ist, und diese gibt in Verbindung mit der vorigen:

$$\mathfrak{C}''_2 A''_2 = \mathfrak{D}''_2.$$

Erwägt man nun, dass den Gleichungen (41) zur Folge $\mathfrak{C}''_2 = \frac{h}{\sin W}$ ist, und dass, da $\mathfrak{D}''_2$ in Bezug auf das neue System dieselbe Grösse wie $\mathfrak{C}''_2$ in Bezug auf das ursprüngliche vorstellt, $\mathfrak{D}''_2 = \frac{k}{\sin W_1}$ oder, nach Aussage der letzten Gleichung (a), $\mathfrak{D}''_2 = \frac{k}{\sin W}$ ist, so verwandelt sich die eben gefundene Gleichung $\mathfrak{C}''_2 A''_2 = \mathfrak{D}''_2$ in:

(b.) $$h A''_2 = k\,.$$

Fügt man zu den bisherigen Bemerkungen noch die Betrachtung, dass in Gemässheit der Gleichung (13)

(c.) $$A_2 u + A'_2 u' + A''_2 u'' = r \cos\theta$$

ist, wenn r die Entfernung des Punctes O, dem die senkrechten Coordinaten u, u′, u″ im ursprünglichen Coordinatensysteme angehören, von dessen Spitze, und θ den Winkel vorstellen, den die Richtungen AO und AZ einschliessen, so nehmen die Gleichungen (130. a. bis c.), wenn man in sie für $\cos W'_1$, $\cos W''_1$, k und $A''_2 u + A'_2 u' + A''_2 u''$ ihre hier in (a), (b), (c) mitgetheilten Werthe einsetzt, eine ungleich übersichtlichere Gestalt an. Man findet nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= A_2 r\cos\theta + (x - A_2 r\cos\theta)\cos\lambda + \frac{1}{h}(u' C_2'' - u'' C_2')\sin\lambda\,,\\
x_1' &= A_2' r\cos\theta + (x' - A_2' r\cos\theta)\cos\lambda + \frac{1}{h}(u'' C_2 - u\, C_2'')\sin\lambda\,,\\
x_1'' &= A_2'' r\cos\theta + (x'' - A_2'' r\cos\theta)\cos\lambda + \frac{1}{h}(u\, C_2' - u' C_2)\sin\lambda\,,\\
&\text{und}\\
u_1 &= C_2 r\cos\theta + (u - C_2 r\cos\theta)\cos\lambda + h(x' A_2'' - x'' A_2')\sin\lambda\,,\\
u_1' &= C_2' r\cos\theta + (u' - C_2' r\cos\theta)\cos\lambda + h(x'' A_2 - x\, A_2'')\sin\lambda\,,\\
u_1'' &= C_2'' r\cos\theta + (u'' - C_2'' r\cos\theta)\cos\lambda + h(x\, A_2' - x' A_2)\sin\lambda\,;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(131. a.)}$$

wobei wir noch bemerken wollen, dass sich die letzte dieser Gleichungen aus der (130. b.), welche mit Rücksicht auf die hier in (c) stehende Relation

$$A_2 u_1 + A_2' u_1' + A_2'' u_1'' = r\cos\theta$$

wird, ergiebt, wenn man in diese für u_1 und u_1' ihre Werthe aus den beiden vorletzten Gleichungen (131. a.) einsetzt, und dabei beachtet, dass $A_2 C_2 + A_2' C_2' + A_2'' C_2'' = 1$ ist. Man kann den vorstehenden Gleichungen, wenn man

$$x_1 - x = \Delta x,\; x_1' - x' = \Delta x',\; x_1'' - x'' = \Delta x'' \text{ und } u_1 - u = \Delta u,\; u_1' - u' = \Delta u',\; u_1'' - u'' = \Delta u'' \quad \textbf{(131. b.)}$$

schreibt, wo dann Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$ und Δu, $\Delta u'$, $\Delta u''$ die aus der Drehung des Systems entsprungenen Coordinatenänderungen anzeigen, auch noch die andere Form geben:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x &= (A_2 r\cos\theta - x\,)(1 - \cos\lambda) + \frac{1}{h}(u' C_2'' - u'' C_2')\sin\lambda\,,\\
\Delta x' &= (A_2' r\cos\theta - x'\,)(1 - \cos\lambda) + \frac{1}{h}(u'' C_2 - u\, C_2'')\sin\lambda\,,\\
\Delta x'' &= (A_2'' r\cos\theta - x'')(1 - \cos\lambda) + \frac{1}{h}(u\, C_2' - u' C_2)\sin\lambda\\
&\text{und}\\
\Delta u &= (C_2 r\cos\theta - u\,)(1 - \cos\lambda) + h(x' A_2'' - x'' A_2')\sin\lambda\,,\\
\Delta u' &= (C_2' r\cos\theta - u'\,)(1 - \cos\lambda) + h(x'' A_2 - x\, A_2'')\sin\lambda\,,\\
\Delta u'' &= (C_2'' r\cos\theta - u'')(1 - \cos\lambda) + h(x\, A_2' - x' A_2)\sin\lambda\,.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(131. c.)}$$

Die Gleichungen (131. a.) und (131. c.) liefern die Coordinaten eines Punctes oder deren Aenderungen, wie sie im Gefolge einer Drehung des Systems von der Grösse λ um eine beliebige Richtung, die an den Axen des Systems die schiefen und senkrechten Projectionszahlen A_2, A_2', A_2'' und C_2, C_2', C_2'' giebt, sind, ausgedrückt in den Coordinaten, die derselbe Punct an dem Systeme vor der Drehung hat. Es ist bemerkenswerth, dass diese Gleichungen bei allen Systemen den gleichen Bau besitzen und sich daher bei keinem besondern Systeme, nicht einmal beim rechtwinkligen, zusammenziehen lassen. Giebt man in diesen Gleichungen allen Coordinatenzeichen, die keinen Index haben, den Index 1, und nimmt man diesen Index von jenen weg, die ihn haben, zu gleicher Zeit $-\lambda$ für λ setzend, so erhält man die Gleichungen, welche die Coordinaten oder deren Aenderungen, die einem Puncte im Systeme noch vor der Drehung angehören, durch die Coordinaten ausdrücken, welche demselben Puncte im Systeme nach der Drehung angehören, wie schon daraus hervorgeht, dass das System aus seinem zweiten Orte durch

eine Drehung von derselben Grösse, aber von entgegengesetzter Richtung in seinen ersten Ort zurückgeführt wird, als die ist, wodurch es aus diesem Ort in jenen gebracht worden ist.

72) Es ist bei den Betrachtungen, wie wir sie in diesem Paragraphen anstellen, der Umstand wesentlich, dass das beliebige Coordinatensystem durch eine einzige Drehung von der in voriger Nummer beschriebenen Art in jede Stelle übergeführt werden kann, die es überhaupt, ohne dass die gegenseitige Lage seiner Axen sich ändert und ohne dass seine Spitze ihren Ort verlässt, einnehmen kann. Um diess einzusehen, wollen wir uns das System, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, durch eine Reihe von beliebigen Bewegungen um dessen Spitze A von der gedachten Art in irgend eine andere Lage gekommen vorstellen, in welcher seine Axen bezüglich die Richtungen AX_1, AX'_1, AX''_1 einnehmen, und nun die Richtung AZ und den Winkel λ aufsuchen, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Axen AX, AX', AX'' des ursprünglichen Systems durch eine einzige Drehung von der Grösse λ um die Richtung AZ in die Lagen AX_1, AX'_1, AX''_1 kommen. Zu diesem Ende halbire man den Winkel XAX_1 in AS_1 und lege durch diese Halbirungslinie AS_1 eine Ebene P_1, welche senkrecht auf der Ebene des Winkels XAX_1 steht, so bildet jede in der Ebene P_1 liegende, von A auslaufende Richtung mit den beiden Richtungen AX und AX_1 gleiche Winkel. Halbirt man nun ebenso den Winkel $X'AX'_1$ in AS_2 und legt durch AS_2 eine Ebene P_2 senkrecht auf die Ebene $X'AX'_1$, so bildet auch jede in der Ebene P_2 liegende und von A auslaufende Richtung mit denen AX' und AX'_1 gleiche Winkel; daher bildet jede von den zweien dem Durchschnitt der beiden Ebenen P_1 und P_2 angehörigen Richtungen AZ sowohl mit den Richtungen AX und AX_1, als mit denen AX' und AX'_1 gleiche Winkel, so dass also

(a.) $$ZAX = ZAX_1 \quad \text{und} \quad ZAX' = ZAX'_1$$

ist. Giebt man nun dem aus den Axen AX, AX', AX'' zusammengesetzten Systeme eine Drehung um die so erhaltene, mit ihm fest vereinigte Richtuug AZ, deren Grösse durch den Winkel bestimmt wird, den die Ebenen XAZ und X_1AZ mit einander machen, so werden dadurch die ursprünglichen Axen AX, AX', AX'' in die vorgeschriebenen Richtungen AX_1, AX'_1, AX''_1 übergeführt, wie sich so einsehen lässt. Nimmt man nämlich die beiden körperlichen Dreiecke in Betrachtung, deren Kanten einerseits AX, AX', AZ und andrerseits AX_1, AX'_1 und AZ sind, so sind in ihnen die beiden an AZ anliegenden Seiten, den Gleichungen (a.) gemäss, gleich, und ausserdem ist auch noch die dritte Seite XAX' im einen der dritten Seite $X_1AX'_1$ im andern gleich, weil nach der Voraussetzung die Axenwinkel in dem Systeme vor und nach der Drehung die gleichen sind; es sind demnach in diesen zwei körperlichen Dreiecken auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich. Wird nun das System aus den Axen AX, AX', AX'' um AZ gedreht, so dass dadurch AX in AX_1 übergeführt wird, so muss dabei nothwendig auch AX' in AX'_1 fallen; denn fiele die Axe AX' nicht in AX'_1, so müsste dieselbe in eine Lage AX'_2 kommen, so dass AX'_2 und AX'_1 nach den entgegengesetzten Seiten der Ebene ZAX_1 hinausgingen und beide sowohl mit der Richtung AX_1, als auch mit der Richtung AZ gleiche Winkel machten; es müsste dann also die Ebene, welche den an AZ liegenden Winkel des gleichschenkeligen körperlichen Dreiecks, dessen Kanten AX, AZ und AX_1 sind, halbirt zugleich auch den Winkel an AZ in dem gleichschenkeligen körperlichen Dreieck aus den Kanten AX', AX'_1, AZ halbiren und daher auf den beiden Ebenen XAX_1 und $X'AX'_1$ zugleich senkrecht stehen und diese Ebenen nach Geraden schneiden, welche die Winkel XAX_1 und $X'AX'_1$ halbiren, d. h. es müssten die beiden Ebenen P_1 und P_2 in einander liegen. So wie daher die Ebenen P_1 und P_2 eine Durchschnittslinie haben und man dreht das aus den Axen

A X, A X′, A X″ gebildete System um dieselbe so lange, bis A X in AX_1 zu liegen kommt, so muss gleichzeitig auch A X′ mit AX_1' und in Folge dessen dann auch A X″ mit AX_1'' zusammenfallen. — In dem Ausnahmsfalle aber, wo die beiden Ebenen P_1 und P_2 in eine Ebene Q zusammenfallen, also eine Durchschnittslinie nicht liefern, überzeugt man sich leicht, dass diese Ebene Q von den Ebenen X A X′ und $X_1 A X_1'$ in einer und derselben Geraden geschnitten werden muss, so dass, wenn wir irgend eine von den Richtungen dieser Geraden durch AZ_1 bezeichnen, dann die Winkel $Z_1 A X$ und $Z_1 A X_1$, so wie auch die $Z_1 A X'$ und $Z_1 A X_1'$ einander gleich werden und daher das aus den Axen A X, A X′, A X″ gebildete System durch eine einzige Drehung um AZ_1, die macht, dass A X in AX_1, oder A X′ in AX_1' fällt, in die verlangte Lage übergeführt werden kann.

Man hat diese Eigenschaft der schiefwinkligen Coordinatensysteme durch eine einzige Drehung um eine in jedem besondern Falle bestimmte Richtung A Z in jede Stellung übergeführt werden zu können, die es überhaupt bei ruhender Spitze durch eine willkührliche Reihe von solchen Bewegungen am Ende annehmen kann, um so mehr festzuhalten, da es die einzige den Coordinatensystemen allgemein zukommende ist. Das rechtwinklige lässt sich durch drei successive Drehungen um jede seiner Axen in jede mögliche Lage bringen, die es bei ruhender Spitze einnehmen kann; dieser Satz ist aber nicht mehr allgemein wahr bei schiefwinkligen Coordinatensystemen, weder in Bezug auf ihre drei Grundaxen, noch in Bezug auf ihre drei Polaraxen. Soll jener Satz auch noch für schiefwinklige Systeme gültig bleiben, so muss er in der Weise gefasst sein, dass zwei von den Drehungen um zwei Grundaxen, die dritte aber um die zur dritten Grundaxe gehörige Polaraxe geschieht, oder dass zwei von den Drehungen um zwei Polaraxen geschehen, die dritte aber um die der dritten Polaraxe entsprechende Grundaxe.

73) Bis hierher haben wir bei eintretender Bewegung eines Coordinatensystems stets vorausgesetzt, dass dabei dessen Spitze ihren Ort im Raume nicht verlasse; es ist indessen leicht, die erhaltenen Resultate so zu erweitern, dass sie auch noch den Fall in sich einschliessen, wo dessen Spitze an der Bewegung Antheil nimmt. Denken wir uns nämlich das Coordinatensystem irgend wie auf solche Weise bewegt, dass dessen Axen ihre Stellung zu einander während der ganzen Bewegung nicht abändern und nehmen wir an, dass auch die Spitze des Systems während der Bewegung ihren Ort verlassen hat, so ist leicht einzusehen, dass, durch welche Reihe von Bewegungen das System auch an seinen neuen Ort gelangt sein mag, man es immer auch blos durch zwei Bewegungen an denselben Ort wird bringen können, in deren einer die Axen sich stets parallel bleiben und die Spitze in gerader Linie sich fortbewegt, bis sie in ihren neuen Ort gekommen ist, die andere hingegen eine Drehung des Systems um eine angebbare Richtung A Z von bestimmbarer Grösse sein muss; die Coordinatenänderungen, welche diese nach sich zieht, lassen sich nach den Formeln der Nr. 71. angeben, und die, welche jene Bewegung des Systems nach sich zieht, ergeben sich schon aus den Formeln (7) der Nr. 15.

§. 8.

Von den Centralcoordinaten.

74) Wir haben in Nr. 63. gesehen, dass im senkrechten Coordinatensysteme, dessen Axe A X″ senkrecht auf den beiden andern A X und A X′ steht, die mit A X″ parallel erzeugten Projectionen von Puncten auf die durch A X und A X′ hindurch gehende Projectionsebene Speichenlängen und Speichenwinkel liefern, die sich aus den Coordinaten dieser Puncte nach Anleitung der dort mitgetheilten Gleichungen (120. a. bis d.) auffinden lassen. Bezeichnen nämlich x, x′, x″ und u, u′, u″ die schiefen und senkrechten Coordinaten eines Punctes O an den

Axen AX, AX′, AX″ und stellt ϱ die Länge der zur senkrechten Projection des Punctes O auf die durch AX und AX′ hindurch gelegte Ebene gehörigen Speiche vor, während w und w′ die Winkel bedeuten, welche die Richtung dieser Speiche mit den Axen AX und AX′ bildet, und beachtet man, dass den Gleichungen (5) zur Folge $cr = u$, $c'r' = u'$ ist, so hat man nach Anleitung der Gleichungen (120. b. und d.):

(132. a.) $$\varrho^2 = xu + x'u', \quad \varrho \cos w = u, \quad \varrho \cos w' = u'.$$

Da aber im senkrechten Systeme, worauf sich diese Gleichungen beziehen, W′ und W″ rechte Winkel sind, was $\cos W' = 0$ und $\cos W'' = 0$ zur Folge hat, so zeigen die Gleichungen (15. a.), dass in diesem Systeme

(132. b.) $$u = x + x'\cos W, \quad u' = x\cos W + x', \quad u'' = x''$$

ist, woraus man sofort ganz so wie aus denen (91. c.) die (91. e.) noch weiter findet

$$x\sin^2 W = u - u'\cos W \quad \text{und} \quad x'\sin^2 W = u' - u\cos W,$$

welche Gleichungen schon in Nr. 68. zur Sprache gekommen sind.

Macht man es sich zur Regel, die Winkel w und w′ von AX und AX′ aus immer nur nach der Seite hin erzeugt sich vorzustellen, nach welcher man von AX aus über den Axenwinkel XAX′ hinweg zu AX′ hingelangt, oder, was damit gleichbedeutend ist, führt man diese Winkel als negative Grössen in die Rechnung ein, so wie man sie als nach der entgegengesetzten Seite hin erzeugt aufgefasst hat, so ist stets $w' = w - W$. Durch diesen Werth von w′ geht dann die letzte Gleichung (132. a.) zunächst in $\varrho\cos(w - W) = u'$ über, und giebt, wenn man $\cos w \cos W + \sin w \sin W$ an die Stelle von $\cos(w - W)$, und gleichzeitig für $\cos w$ seinen Werth aus der vorletzten Gleichung (132. a.) einsetzt:

$$\varrho \sin w \sin W = u' - u\cos W,$$

welche mit Rücksicht auf die untern Gleichungen (132. b.) wird:

(132. c.) $$\varrho \sin w = x'\sin W,$$

so, dass man anstatt der Gleichungen (132. a.) jetzt die setzen kann:

(132. d.) $$\varrho^2 = xu + x'u', \quad \cos w = \frac{u}{\varrho}, \quad \sin w = \frac{x'\sin W}{\varrho},$$

welche in Verbindung mit der Gleichung $x'' = u''$ alle vorigen ersetzen. Diese letztern Gleichungen zeigen, wie sich die Länge und Richtung der zur Projection eines Punctes O gehörigen Speiche einfach aus den Coordinaten dieses Punctes im senkrechten Systeme herholen lassen, wobei man zu beachten hat, dass, da durch diese Gleichungen sowohl $\cos w$ als $\sin w$ gefunden wird, die Vorzeichen dieser trigonometrischen Verhältnisse hinsichtlich der Speichenrichtung auch nicht die geringste Unbestimmtheit gestatten, wenn der Winkel w stets als nach der vorhin festgesetzten Seite hin erzeugt aufgefasst wird, wie diese letztern Gleichungen voraussetzen.

Umgekehrt kann man aus der zum Projectionssystem gehörigen Ordinate x″ eines Punctes O und aus der Speichenlänge ϱ und dem Speichenwinkel w, die der Projection dieses Punctes angehören, die sämmtlichen schiefen und senkrechten Coordinaten desselben Punctes im senkrechten Coordinatensysteme herholen. Zunächst hat man nämlich in Gemässheit der letzten obern Gleichung (132. b.) und der zwei letzten Gleichungen (132. d.):

(133. a.) $$x'' = u'', \quad u = \varrho\cos w, \quad x' = \frac{\varrho \sin w}{\sin W},$$

und in Folge dieser giebt die erste obere und die letzte untere von den Gleichungen (132. b.):

$$x = \varrho \cos w - \frac{\varrho \sin w \cos W}{\sin W} \quad \text{und} \quad u' = \varrho \cos w \cos W + \varrho \sin w \sin W,$$

welche beide sich sogleich auf die einfachere Form bringen lassen:

$$x = -\varrho \frac{\sin(w - W)}{\sin W} \quad \text{und} \quad u' = \varrho \cos(w - W). \qquad \textbf{(133. b.)}$$

75) In dem Projectionssysteme, welches in der vorigen Nummer in Verknüpfung mit dem dort vorausgesetzten senkrechten Coordinatensysteme aufgefasst worden ist, wird die Projection eines Punctes O als der Durchschnitt P einer durch O mit der Axe A X″ parallel gelegten Geraden mit der durch A X und A X′ gelegten Projectionsebene erhalten; desswegen und weil A X″ senkrecht auf der Projectionsebene steht, ist O P A ein bei P rechtwinkliges Dreieck, in welchem O P die im Projectionssystem zur Axe A X″ gehörige Ordinate x″ und A P die Speichenlänge ϱ ist, welche zur Projection P des Punctes O gehört. Stellt also r die Länge der zu diesem rechtwinkligem Dreieck gehörigen Hypotenuse A O und χ den Winkel vor, welchen die von A nach O hinzielende Richtung A O mit der Speichenrichtung A P bildet, welcher Winkel zugleich der spitze Neigungswinkel zwischen der Richtung A O und der Projectionsebene ist, so hat man:

$$x'' = r \sin \chi \quad \text{und} \quad \varrho = r \cos \chi, \qquad \textbf{(134. a.)}$$

woraus sich weiter

$$r^2 = \varrho^2 + x''^2 \quad \text{und} \quad \sin \chi = \frac{x''}{r}, \quad \cos \chi = \frac{\varrho}{r} \qquad \textbf{(134. b.)}$$

finden lässt. In diesen Gleichungen hat man r und ϱ stets als positive Grössen aufzufassen, weshalb auch $\cos \chi$ immer positiv, sonach χ immer spitz ist; aber $\sin \chi$ ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem x″ positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem der Punct O auf der positiven oder negativen Seite von der Projectionsebene liegt. Da sich aus den Gleichungen (134. a.) die Projectionsgrössen x″ und ϱ in völlig bestimmter Weise finden lassen, wenn die Grössen r und χ gegeben sind, und da umgekehrt diese mittelst der Gleichungen (134. b.) sich in völlig bestimmter Weise finden lassen, wenn jene gegeben sind, so wird die Lage eines Punctes im Raume durch die drei Grössen r, χ und w eben so bestimmt festgestellt, wie durch die drei x″, ϱ und w. Wird die Lage von Puncten im Raume dadurch festgestellt, dass für jeden die auf ihn sich beziehenden drei Grössen r, χ, w angegeben werden, nämlich: seine Entfernung r von einem fest im Raume angenommenen Puncte A, welche Entfernung der zum Puncte A gehörige S t r a h l oder Radius vector heisst; der spitze Winkel χ, den die von A nach ihm hinzielende Richtung mit einer durch A hindurch gehenden unveränderlich angenommenen Ebene, die die G l e i c h e r e b e n e heisst, bildet, welcher Winkel als positive oder negative Grösse anzusehen ist, je nachdem der Punct auf der einen (positiven) oder auf der andern (negativen) Seite von dieser Ebene liegt; endlich der Winkel w, den die Ebene des Winkels χ, welche die M e r i d i a n e b e n e oder der Meridian des Punctes heisst, auf den sie sich bezieht, mit einer andern durch A hindurch gelegten und senkrecht auf der Gleicherebene stehenden unveränderlichen Ebene bildet, die man den e r s t e n Meridian zu nennen pflegt, welcher Flächenwinkel mit dem Winkel der Durchschnittslinien der Gleicherebene mit dem Meridian des Punctes und dem ersten Meridian übereinkommt, so wird der spitze positive oder negative Winkel χ, den die Richtung A O mit der Gleicherebene macht, die positive oder negative B r e i t e

des Punctes O, so wie der Winkel w, den der zu O gehörige Meridian mit dem ersten Meridian macht, die Länge des Punctes O genannt. Die zu einem Puncte gehörigen Grössen r, χ, w heissen auch hier wieder dessen Coordinaten, doch werden wir die jetzigen zum Unterschiede von den früheren Centralcoordinaten nennen, während jene zum Unterschied von diesen die Parallelcoordinaten heissen mögen. Der Punct A wird hier wie dort die Coordinatenspitze genannt. Den Durchschnitt des ersten Meridians mit der Gleicherebene werden wir noch die Grundrichtung dieser Ebene nennen.

So wie die Gleichungen (134. a. und b.) zur Uebertragung der Projectionsgrössen in Centralcoordinaten oder dieser in jene dienen, so lassen sich auch die Gleichungen angeben, wodurch sich die gewöhnlichen oder Parallelcoordinaten in Centralcoordinaten und umgekehrt diese in jene überführen lassen. Im erstern Falle dienen die Gleichungen (134. b.) in Verbindung mit der zweiten und dritten Gleichung (133. a.) und der letzten (133. b.), nämlich:

(135. a.)
$$\begin{cases} r^2 = \varrho^2 + x''^2, \quad \sin\chi = \frac{x''}{r}, \quad \cos\chi = \frac{\varrho}{r} \\ \cos w = \frac{u}{\varrho}, \quad \sin w = \frac{x'\sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos(w-W) = \frac{u'}{\varrho}, \\ \text{wenn man sich unter } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \varrho^2 = xu + x'u' \end{cases}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse vorstellt; die im andern Falle erforderlichen Gleichungen ergeben sich aus denen (133. a. und b.) in Verbindung mit denen (134. a.). Man findet so

(135. b.)
$$\begin{cases} x'' = u'' = r\sin\chi, \quad u = \varrho\cos w, \quad x' = \frac{\varrho\sin w}{\sin W} \\ x = -\varrho\frac{\sin(w-W)}{\sin W}, \quad u' = \varrho\cos(w-W), \\ \text{in welchen man sich unter } \varrho \text{ die durch die Gleichung} \\ \varrho = r\cos\chi \end{cases}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse zu denken hat. Die Gleichungen (135. a.) lehren die Centralcoordinaten aus den Parallelcoordinaten zu finden, wenn beide einerlei Spitze haben, und die durch die Axen A X und A X′ gehende Ebene zur Gleicherebene, so wie die Coordinatenebene X A X″ zum ersten Meridian genommen wird; die Gleichungen (135. b.) hingegen lehren die schiefen und senkrechten Coordinaten aus den Centralcoordinaten zu finden, wenn beide einerlei Spitze haben, der Durchschnitt des ersten Meridians mit der Gleicherebene zur Axe A X, die um den Winkel W der Richtung, in welcher die positiven Längen gezählt werden, weiter vorwärts liegende Richtung zur Axe A X′, und die auf diesen beiden Axen senkrechte in die positive Seite der Gleicherebene hineinragende Richtung zur Axe A X″ genommen wird.

Liegen in einem besondern Falle alle Puncte, deren Stellen im Raume durch solche Centralcoordinaten festgestellt werden sollen, in der Gleicherebene selbst, so ist für alle diese Puncte

(136. a.) $$\sin\chi = 0 \quad \text{und} \quad \cos\chi = 1,$$

was zur Folge hat

(136. b.) $$x'' = u'' = 0 \quad \text{und} \quad r = \varrho;$$

es verschwindet daher in diesem Falle der Breitenwinkel χ mit der Coordinate x″ oder u″ zu-

gleich, und die Speichenlänge wird zum Radiusvector; sieht man dann von der verschwundenen Breite und Coordinate gänzlich ab, so verwandeln sich die Gleichungen (135. a.) in:

$$r^2 = x u + x' u', \quad \cos w = \frac{u}{r} \quad \text{und} \quad \sin w = \frac{x' \sin W}{r} \qquad \textbf{(136. c.)}$$

und die Gleichungen (135. b.) werden:

$$u = r \cos w\,, \quad u' = r \cos(w - W)\,, \quad x = -r \frac{\sin(w - W)}{\sin W}\,, \quad x' = r \frac{\sin w}{\sin W}\,. \qquad \textbf{(136. d.)}$$

Da dieser Fall mit dem oben in Nr. 58. betrachteten übereinkommt, wo wir das dort ihm anbequemte Coordinatensystem ein ebenes genannt haben, so werden wir auch das Centralcoordinatensystem, für welches die Formeln (136. c. und. d.) allgemeine Gültigkeit behalten, ein **ebenes** nennen.

76) Gehören die Parallelcoordinaten, welche mit Centralcoordinaten verglichen werden sollen, keinem senkrechten Systeme an, und soll die durch die Axen AX und AX′ gelegte Ebene dieses Systems die Gleicherebene der Centralcoordinaten werden, so wie AX der Durchschnitt des ersten Meridians mit dieser Gleicherebene, so hat man nur neben dem ursprünglichen Systeme, dessen Axen AX, AX′, AX″ sind, ein neues sich zu denken, dessen Axen wir durch AY, AY′, AY″ bezeichnen und so anordnen wollen, dass die zwei Axen AY und AY′ vom neuen System mit den beiden AX und AX′ des ursprünglichen Systems zusammen fallen, die AY″ aber die zur Grundaxe AX″ gehörige Polaraxe A𝔛″ wird. So angeordnet ist das neue System ein senkrechtes, auf welches alle Formeln der vorigen Nummer volle Anwendbarkeit behalten; bezeichnet man daher die Coordinaten eines beliebigen Punctes O an den Axen AY, AY′, AY″ analog denen des gleichen Punctes an den Axen AX, AX′, AX″, nur an die Stelle der Grundzeichen x und u die y und v setzend und das Grundzeichen für den Axenwinkel W mit dem W_1 vertauschend, so hat man den Gleichungen (135. a.) gemäss:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = \varrho^2 + y''^2, \quad \sin\chi = \frac{y''}{r}, \quad \cos\chi = \frac{\varrho}{r} \quad \text{und} \\ \cos w = \frac{v}{\varrho}, \quad \sin w = \frac{y' \sin W_1}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos(w - W_1) = \frac{v'}{\varrho}, \\ \text{in welchen } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \qquad \varrho^2 = y v + y' v' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(a.)}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse ist. Eben so hat man den Gleichungen (135. b.) zur Folge:

$$\left.\begin{array}{l} y'' = v'' = r \sin\chi\,, \quad v = \varrho \cos w\,, \quad v' = \varrho \cos(w - W_1)\,, \\ y = -\varrho \frac{\sin(w - W_1)}{\sin W_1}\,, \quad y' = \varrho \frac{\sin w}{\sin W_1}\,, \\ \text{in welchem } \varrho \text{ die durch die Gleichung} \\ \qquad \varrho = r \cos\chi \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(b.)}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse vorstellt.

Um die in den Gleichungen (a) und (b) vorkommenden auf das neue System sich beziehenden Coordinaten in solche überzutragen, die dem gleichen Puncte im ursprünglichen Systeme angehören, hat man blos zu beachten, dass die beiden hier betrachteten Systeme genau in derselben Beziehung zu einander stehen, wie die in Nr. 61. zur Sprache gekommenen, und dass demnach die Gleichungen (116. a. bis c.) auch hier wieder volle Anwendung finden, wenn man

dabei alle Bezeichnungen in dem dort festgestellten Sinne nimmt. Setzt man aber in die vorstehenden Gleichungen für v, v′, v″ und y, y′, y″ ihre in den Gleichungen (117. a.) ausgesprochenen Werthe, so gehen die Gleichungen (a), wenn man beachtet, dass hier $W_1 = W$ ist, über in:

$$\text{(c.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \varrho^2 + \mathfrak{E}_2''^2 x''^2, \quad \sin\chi = \dfrac{\mathfrak{E}_2'' x''}{r}, \quad \cos\chi = \dfrac{\varrho}{r} \quad \text{und} \\ \cos w = \dfrac{u}{\varrho}, \quad \sin w = \dfrac{(x' - \mathfrak{A}_2' \mathfrak{E}_2'' x'') \sin W}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos(w - W) = \dfrac{u'}{\varrho}, \\ \text{während } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \qquad \varrho^2 = x u + x' u' - \mathfrak{E}_2'' x'' (\mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}_2' u') \end{array} \right.$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse ist; und eben so werden die Gleichungen (b):

$$\text{(d.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_2'' x'' = r \sin\chi, \quad u = \varrho \cos w, \quad u' = \varrho \cos(w - W) \quad \text{und} \\ x - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{E}_2'' x'' = -\varrho \dfrac{\sin(w - W)}{\sin W}, \quad x' - \mathfrak{A}_2' \mathfrak{E}_2'' x'' = \varrho \dfrac{\sin w}{\sin W}, \\ \text{während } \varrho \text{ durch die Gleichung} \\ \qquad \varrho = r \cos\chi \end{array} \right.$$

bestimmt wird. Weil aber der dritten Gleichung (48. a.) zur Folge $\mathfrak{E}_2'' x'' = \mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}_2' u' + \mathfrak{A}_2'' u''$ ist, und man hieraus findet:

$$\mathfrak{E}_2'' x'' (\mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}_2' u') = \mathfrak{E}_2''^2 x''^2 - x'' u'',$$

indem $\mathfrak{E}_2'' \mathfrak{A}_2'' = 1$ ist, so wird

$$\varrho^2 = x u + x' u' + x'' u'' - \mathfrak{E}_2''^2 x''^2,$$

und da überdiess den Gleichungen (41) und (45. a.) gemäss:

$$\mathfrak{A}_2 \mathfrak{E}_2'' = \frac{\sin W'' \cos \mathfrak{W}'}{\sin W} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_2' \mathfrak{E}_2'' = \frac{\sin W' \cos \mathfrak{W}''}{\sin W}$$

ist, so nehmen die Gleichungen (c) die folgende Gestalt an:

$$\text{(137. a.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = x u + x' u' + x'' u'', \quad \sin\chi = \dfrac{\mathfrak{E}_2'' x''}{r}, \quad \cos\chi = \dfrac{\varrho}{r} \quad \text{und} \\ \cos w = \dfrac{u}{\varrho}, \quad \sin w = \dfrac{x' \sin W - x'' \sin W' \cos \mathfrak{W}''}{\varrho} \quad \text{oder} \quad \cos(w - W) = \dfrac{u'}{\varrho}, \\ \text{während } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \qquad \varrho^2 = r^2 - \mathfrak{E}_2''^2 x''^2 \end{array} \right.$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse vorstellt; die Gleichungen (d) aber werden:

$$\text{(137. b.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_2'' x'' = r \sin\chi, \quad u = \varrho \cos w, \quad u' = \varrho \cos(w - W) \quad \text{und} \\ x \sin W - x'' \sin W'' \cos \mathfrak{W}' = -\varrho \sin(w - W), \quad x' \sin W - x'' \sin W' \cos \mathfrak{W}'' = \varrho \sin w, \\ \text{wobei} \\ \qquad \varrho = r \cos\chi \end{array} \right.$$

ist. Um die noch fehlende Grösse u″ zu erhalten, darf man nur erwägen, dass der dritten Gleichung (48. a.) zur Folge

$$\mathfrak{A}_2'' u'' = \mathfrak{E}_2'' x'' - (\mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}_2' u')$$

ist, und diese Gleichung geht mit Zuziehung der vorstehenden für $\mathfrak{E}_2'' x''$, u und u′ gefundenen Werthe über in:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}''_2 u'' = r\sin\chi - \varrho\left[\mathfrak{A}_2\cos w + \mathfrak{A}'_2\cos(w-W)\right] \\ \text{oder} \\ u'' = \mathfrak{C}''_2 r\sin\chi - \dfrac{\varrho}{\sin W}\left[\sin W''\cos\mathfrak{W}'\cos w + \sin W'\cos\mathfrak{W}''\cos(w-W)\right], \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(137. c.)}$$

wie die Gleichungen (41) und (45. a.) sogleich an die Hand geben.

77) Gehören wieder, wie in der vorigen Nummer, die Parallelcoordinaten, welche mit Centralcoordinaten verglichen werden sollen, keinem senkrechten Systeme an, soll aber die durch die Polaraxen $A\mathfrak{X}$ und $A\mathfrak{X}'$ gelegte Ebene zur Gleicherebene genommen werden und die Richtung $A\mathfrak{X}$ zum Durchschnitt des ersten Meridians mit ihr, so ist offenbar diese Aufgabe eins mit der in voriger Nummer behandelten, so wie man sich das bisherige Polarsystem als Grundsystem vorstellt, zu welchem dann das frühere Grundsystem als Polarsystem gehört. Giebt man daher den Coordinaten eines Punctes im Polarsystem dieselben Zeichen wie denen im Grundsystem, nur dass man sie, der in Nr. 35. eingeführten Bezeichnungsweise entsprechend, mit Klammern umgiebt, so ergeben sich die unserer jetzigen Aufgabe zukommenden Formeln aus denen der vorigen Nummer, wenn man alle Coordinatenzeichen mit Klammern umgiebt und zugleich die Grundzeichen W und $\mathfrak{W}$ wechselseitig mit einander vertauscht, überhaupt alle Beziehungen zum Grundsysteme in die analogen zum Polarsysteme, so wie diese in jene umkehrt. Durch diese Umkehrung erleidet der Werth von $\mathfrak{C}''_2$ keine Aenderung; daher geben die Gleichungen (137. a.) im gegenwärtigen Falle:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = (x)(u) + (x')(u') + (x'')(u''),\quad \sin\chi = \dfrac{\mathfrak{C}''_2(x'')}{r},\quad \cos\chi = \dfrac{\varrho}{r}\ \text{ und} \\ \cos w = \dfrac{(u)}{\varrho},\quad \sin w = \dfrac{(x')\sin\mathfrak{W} - (x'')\sin\mathfrak{W}'\cos W''}{\varrho}\quad \text{oder}\quad \cos(w-\mathfrak{W}) = \dfrac{(u')}{\varrho}, \\ \text{wobei } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \varrho^2 = r^2 - \mathfrak{C}''^2_2 (x'')^2 \end{array}\right\} \ldots\ \textbf{(a.)}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse bedeutet. Eben so geben die Gleichungen (137. b.):

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}''_2(x'') = r\sin\chi,\quad (u) = \varrho\cos w,\quad (u') = \varrho\cos(w-\mathfrak{W})\ \text{ und} \\ (x)\sin\mathfrak{W} - (x'')\sin\mathfrak{W}''\cos W' = -\varrho\sin(w-\mathfrak{W}),\ (x')\sin\mathfrak{W} - (x'')\sin\mathfrak{W}'\cos W'' = \varrho\sin w, \\ \text{in welchen man} \\ \varrho = r\cos\chi \end{array}\right\} \ldots\ \textbf{(b.)}$$

zu setzen hat, und die untere Gleichung (137. c.) verwandelt sich in:

$$(u'') = \mathfrak{C}''_2 r\sin\chi - \frac{\varrho}{\sin\mathfrak{W}}\left[\sin\mathfrak{W}''\cos W'\cos w + \sin\mathfrak{W}'\cos W''\cos(w-\mathfrak{W})\right]. \qquad \textbf{(c.)}$$

Setzt man nun anstatt der auf das Polarsystem sich beziehenden Coordinaten wieder die auf das Grundsystem sich beziehenden ein, nach Anleitung der Gleichungen (57. a. und b.), so gehen die (a) über in:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = xu + x'u' + x''u'',\quad \sin\chi = \dfrac{u''}{r},\quad \cos\chi = \dfrac{\varrho}{r}\ \text{ und} \\ \cos w = \dfrac{\mathfrak{C}x}{\varrho},\quad \cos(w-\mathfrak{W}) = \dfrac{\mathfrak{C}'_1 x'}{\varrho}, \\ \text{in welchen } \varrho \text{ eine durch die Gleichung} \\ \varrho^2 = r^2 - u''^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(138. a.)}$$

zu bestimmende positive Hilfsgrösse ist; die (b) aber nehmen die folgende Gestalt an:

(138. b.) $$\left\{\begin{array}{l} u'' = r\sin\chi\ ,\quad \mathfrak{C}x = \varrho\cos w\ ,\quad \mathfrak{C}'_1 x' = \varrho\cos(w - \mathfrak{W})\ \text{ und} \\ u - u''\cos W' = -\varrho\sin W'\sin(w - \mathfrak{W})\ ,\quad u' - u''\cos W'' = \varrho\sin W''\sin w\ , \\ \text{wobei} \\ \varrho = r\cos\chi \end{array}\right.$$

ist, und die (c) verwandelt sich in:

(138. c.) $$x'' = r\sin\chi - \frac{\varrho}{\sin\mathfrak{W}}\left[\operatorname{cotg} W'\cos w + \operatorname{cotg} W''\cos(w - \mathfrak{W})\right],$$

in welcher ϱ die so eben angeführte Bedeutung hat.

78) Die eigentliche Aufgabe der Centralcoordinaten besteht darin, dass sie die Lage der Puncte durch deren Entfernungen von einem im Raume fest angenommenen Puncte A zu bestimmen haben, wozu neben diesen Entfernungen noch die völlig bestimmte Angabe der von dem festen Punct A nach den übrigen Puncten hinlaufenden Richtungen erforderlich ist. Diesen letztern Zweck erreichen die bis jetzt betrachteten Centralcoordinaten dadurch, dass sie eine durch den Punct A hindurch gehende feste Ebene (die Gleicherebene) zu Grund legen und an ihr eine von dem Puncte A auslaufende unveränderliche Richtung (die Grundrichtung), welche wir durch AG anzeigen wollen. Legt man nämlich durch die von A nach irgend einem Puncte O hinzielende Richtung AO eine Ebene, welche senkrecht auf der Gleicherebene steht und diese in AP schneidet, so wird die Richtung AO offenbar durch die Richtung AP und den Winkel PAO oder χ völlig bestimmt, wenn man die zwei Seiten der Gleicherebene von einander unterscheidet und die der einen Seite zugehörigen Winkel χ als positive Grössen, die der andern Seite zugehörigen Winkel hingegen als negative Grösse in die Rechnung aufnimmt; die Richtung AP aber wird vollkommen gegeben durch den Winkel w, welchen sie mit der Grundrichtung AG macht, wenn man die Ebene dieses Winkels stets nach einerlei Seite von der Grundrichtung aus in der Gleicherebene sich hin erstrecken lässt, oder ihn als negative Grösse in die Rechnung aufnimmt, so wie man seine Ebene nach der entgegengesetzten Seite von der Grundrichtung sich hin erstreckend denkt. Diese Centralcoordinaten thun sonach im Grunde nichts anders, als dass sie das aus den drei Richtungen AG, AP und AO gebildete Dreikant, (welches an der Kante AP einen rechten Flächenwinkel hat, und von welchem die eine Kante AG und die eine mit der Gleicherebene zusammenfallende Seite ihrer Lage nach unabänderlich die gleichen bleiben und gegeben sind), vollkommen bestimmen, indem sie die beiden den rechten Flächenwinkel einschliessenden Kantenwinkel von ihm angeben. Derselbe Zweck lässt sich indessen eben so gut auch dadurch erreichen, dass anstatt der hier gewählten zwei Stücke des angeführten rechtwinkligen Dreikants irgend zwei andere von ihm angegeben werden, wozu häufig der Kantenwinkel OAG und der von ihm und der Gleicherebene eingeschlossene Flächenwinkel gewählt werden, welcher Flächenwinkel stets nach der positiven Seite der Gleicherebene hin sich erzeugend gedacht wird, wobei derselbe jede Grösse von 0 bis zu vier Rechten hin annehmen kann, wenn man ihn nicht lieber als positive oder negative Grösse auffassen will, je nachdem er auf der positiven oder negativen Seite der Gleicherebene liegt, wo dann dessen absolute Grösse zwei Rechte nie überschreiten kann. Da wo an die Stelle der beiden Winkel χ und w zwei andere Winkel desselben Dreikants eingeführt werden und die Lage des beliebigen Punctes O dann anstatt durch r, χ, w durch r und zwei neue Winkel bestimmt wird, nennt man diese zwei neuen Winkel in Verbindung mit der Grösse r immer noch die Centralcoordinaten des Punctes O, und da sich im rechtwinkligen Dreikant jedes Stück aus

zwei andern immer ganz einfach herholen lässt, so ist es immer leicht, aus den Formeln, welche für die eine Art solcher Centralcoordinaten aufgefunden worden sind, die herzuleiten, welche einer andern Art entsprechen; daher ist es unnöthig, hier diese neuen Formen noch besonders aufzuführen, da sie in jedem vorkommenden Falle sogleich aus den oben mitgetheilten hergeholt werden können.

§. 9.

Reduction derjenigen Projectionszahlen, welche von den Axen eines Coordinatensystems an den Axen eines andern mit diesem verbundenen Coordinatensystems gebildet werden, auf die geringste Anzahl gänzlich von einander unabhängiger Grössen.

79) Aus den Gleichungen (12) lässt sich entnehmen, wie die senkrechten Projectionszahlen einer Richtung an den Axen eines beliebigen Coordinatensystems aus den schiefen Projectionszahlen derselben Richtung an den gleichen Axen gefunden werden können, und die Gleichungen (47. a.) geben zu erkennen, wie sich umgekehrt diese aus jenen herholen lassen. Wird daher an ein ursprüngliches Coordinatensystem, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, ein neues angeknüpft, dessen Axen AY, AY', AY'' sein mögen, und lässt man in Bezug auf diese zwei Systeme die Bezeichnungen der Nr. 23. hier wieder unverändert gelten, so kann man die dortigen schiefen Projectionszahlen, deren Grundzeichen A oder B ist, durch die senkrechten ausdrücken, deren Grundzeichen C oder D ist, so wie sich auch umgekehrt diese letztern durch die erstern darstellen lassen. Ferner geht aus den Gleichungen (31) und (81. a. und b.) hervor, dass man sowohl aus den senkrechten wie aus den schiefen Projectionszahlen, die von den Axen des einen Systems an den Axen des andern Systems gebildet werden, die ableiten kann, welche von den Axen des letztern Systems an den Axen des erstern Systems geliefert werden. Man kann sonach die sämmtlichen Projectionszahlen, deren Grundzeichen A, B, C, D sind, finden, wenn man die einem einzigen dieser Grundzeichen entsprechenden kennt. Ausserdem geht aus den in (§. 3.) mitgetheilten Correlationsformeln hervor, dass, wenn alle zwischen den Grundaxen zweier Doppelsysteme obwaltenden Projectionszahlen bekannt sind, man aus diesen auch jene finden kann, welche zum Vorschein kommen, wenn man an die Stelle von dem einen oder von dem andern Grundsystem sein Polarsystem treten lässt, oder auch beide Grundsysteme durch ihre Polarsysteme ersetzt. Es sind demnach die 144 zwischen den Axen zweier Doppelsysteme möglichen Projectionszahlen in 9 von ihnen, die einerlei Grundzeichen haben, diese mögen schiefe oder senkrechte sein, schon enthalten; aber auch diese neun zu einerlei Grundzeichen gehörigen sind nicht alle von einander unabhängig. Sehen wir nämlich die Axenwinkel in den beiden Grundsystemen als gegebene Grössen an, so finden zwischen den drei Axenwinkeln des einen Systems und den Projectionszahlen, welche ihre Schenkel am andern System liefern, die drei Gleichungen statt, welche denen (30) nachgebildet sind, und die eben so viele Relationen zwischen jenen Projectionszahlen ausmachen; da zudem zwischen den drei Projectionszahlen, welche jeder Axe des einen Systems am andern System zukommen, die Richtungsgleichung (11) statt hat, welche drei neue Relationen zwischen den als primitive angesehenen neun Projectionszahlen liefert, wonach also diese neun Projectionszahlen durch 6 Gleichungen von einander abhängig gemacht werden: so überzeugt man sich, dass die neun als primitive angesehenen Projecionszahlen auf blos drei willkührlich zu wählende Grössen zu-

rückgeführt werden können. Diese Reduction der sämmtlichen Projectionszahlen auf blos drei von vorn herein nach Willkühr anzunehmende Grössen nun macht den Gegenstand der in diesem Paragraphen vorkommenden Untersuchung aus.

80) Die in der vorigen Nummer besprochene Zurückführung der sämmtlichen Projectionszahlen auf drei völlig willkührliche Grössen kann in sehr verschiedener Weise geschehen. Wir betrachten zuvörderst die, wo man sich die Coordinatenebenen XAX' und YAY' der beiden Systeme nöthigenfalls verlängert denkt, bis sie sich schneiden und die Lage aller Axen an diese beiden Ebenen und ihre Durchschnittslinie anknüpft. Hierbei hängt die Deutlichkeit der Vorstellungen ganz allein von der Bestimmtheit ab, womit die gegenseitige Stellung von Richtungen und Ebenen unter einander aufgefasst wird, weshalb wir zuvor die hierbei zu berücksichtigenden Umstände näher ins Auge fassen wollen.

I) Wir haben schon in Nr. 11. gesehen, dass die Stellung einer beweglichen von einem gegebenen Puncte auslaufenden und in einer bestimmten Ebene liegenden Richtung gegen eine andere von demselben Puncte auslaufende und in derselben Ebene liegende durch den Winkel, den diese beiden Richtungen einschliessen, nicht völlig bestimmt wird, wenn man nicht zugleich auch noch die Seite kennt, nach welcher hin die Ebene dieses Winkels von der einen Richtung aus sich erstreckt. Stellen wir uns demnach die Gerade vor, in welcher die Ebenen XAX' und YAY' sich schneiden, und bezeichnen wir durch AN die eine von den zwei Richtungen dieser Geraden, welche in ihr von A aus nach entgegengesetzten Seiten hinlaufen, und durch θ und λ die Winkel, welche diese Richtung AN mit den beiden Richtungen AX und AY in den Ebenen XAX' und YAY' bildet, so wird dadurch die Stellung der beiden letztern Richtungen AX und AY zu der AN noch nicht völlig genau bestimmt; man muss noch in jeder der beiden Ebenen die Seite kennen, nach welcher von der einen Richtung AN aus die Ebenen der beiden Winkel sich hin erstrecken. Um diese Seiten bei unserm jetzigen Gegenstande auf eine unzweideutige Weise festhalten zu können, bemerke man, dass die Richtung AN auf zwei verschiedene Weisen aus ihrer Lage heraustreten und um den Punct A sowohl in der Ebene XAX' wie in der YAY' sich drehen kann, wobei sie, stets in der gleichen Richtung ihre Drehung fortsetzend, zuletzt wieder in ihre alte Lage zurück kommt. Bei ihrer Drehung in der einen von den zwei möglichen Richtungen wird sie zuerst auf die Axe AX oder AY und erst später auf die AX' oder AY' stossen; hingegen wird sie zuerst auf die Richtung AX' oder AY' und erst später auf die AX oder AY stossen, wenn ihre Drehung in einer der vorigen entgegengesetzten Richtung geschieht. Wir wollen nun, um diese beiden Drehrichtungen von einander unterscheiden zu können, die die positive nennen, mit welcher sie zuerst auf die Axe AX oder AY stösst, und die die negative, mit welcher sie zuerst auf die Axe AX' oder AY' stösst, und eben so wollen wir den Theil der durch XAX' oder YAY' gelegten Ebenen ihre positive Hälfte nennen, welchen die Richtung AN positiv sich drehend durchläuft, bis sie wieder in den Durchschnitt der beiden Ebenen gelangt, und dann ihre Richtung die entgegengesetzte von der geworden ist, die sie vor der Drehung einnahm; dagegen wollen wir den Theil jener Ebenen ihre negative Hälfte nennen, welchen sie von da ab, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück kommt, durchläuft, oder von ihrer ursprünglichen Lage aus mit negativer Richtung, bis zur Verlängerung von AN nach der entgegengesetzten Seite sich drehend beschreibt. Hiernach bestimmen wir nun die Lage der Axen AX und AY gegen die Richtung AN durch die Winkel θ und λ völlig genau, indem wir festsetzen, dass sich ihre Ebenen von der Richtung AN aus in die positive Hälfte der Ebenen XAX' und YAY'

hinein erstrecken. Diese Lage der Winkelebenen stets vorausgesetzt, wird nun auch die Stellung der Axen A X′ und A Y′ zur Richtung A N durch die Winkel $\theta + W$ und $\lambda + W_1$ völlig unzweideutig angezeigt.

II) Gerade so, wie sich die Lage zweier von einem Puncte auslaufender Richtungen in einer Ebene auf eine keiner Zweideutigkeit mehr Raum gebende Weise bestimmen lässt, kann man auch die Lage zweier von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitt auslaufender Ebenenhälften im Raume gegen einander mit voller Sicherheit feststellen. Fassen wir nämlich die in I) definirten positiven Hälften von den zwei unbegrenzten Coordinatenebenen X A X′ und Y A Y′ ins Auge und bezeichnen wir durch ψ den Winkel, welchen beide mit einander machen, so wird durch diesen Winkel die Stellung der einen zur andern im Raume nur dann in ganz unzweideutiger Weise angezeigt werden, wenn man die Seite kennt, nach welcher der Winkelraum ψ von einer der beiden Ebenenhälften aus sich hinerstreckt. Um nun diese Seite stets ganz sicher festhalten zu können, wollen wir darin mit einander übereinkommen, dass sich der Winkelraum ψ stets nach der Seite von der positiven Ebenenhälfte X A X′ hin erstreckt, in welche hinein die dritte Axe A X″ ragt. So bestimmt geben die Winkel θ, λ und ψ die gegenseitige Stellung der Axen A Y, A Y′ und A X, A X′ zu einander in völlig bestimmter Weise zu erkennen; denn geht man von dem ursprünglichen System, dessen Axen A X, A X′, A X″ sind, aus, und trägt man in der verlängerten Ebene X A X′ den Winkel θ so von A X aus auf, dass dessen Ebene sich von A X nach der entgegengesetzten Seite von der hin erstreckt, auf welcher die des Axenwinkels W liegt, so giebt dessen anderer Schenkel die Richtung A N zu erkennen; trägt man hierauf den Winkel ψ so an die positive Hälfte der durch die mit A N zusammenfallende Gerade getheilten unbegrenzt verlängerten Ebene X A X′ auf, dass der zu ψ gehörige Winkelraum sich von dieser positiven Hälfte aus nach der Seite hin erstreckt, auf welcher die Axe A X″ liegt, so giebt dann die dem Winkel ψ angehörige zweite Ebenenhälfte die Stellung der positiven Ebenenhälfte der unbegrenzt gedachten Coordinatenebene Y A Y′ zu erkennen; trägt man daher den Winkel λ von der Richtung A N aus so auf, dass dessen Ebene sich von dieser Richtung aus in die zuletzt gedachte positive Ebenenhälfte hinein erstreckt, so giebt sein zweiter Schenkel die Richtung A Y zu erkennen, und trägt man zuletzt noch den Axenwinkel W_1 so von A Y aus in die gleiche Ebene ein, dass er die Verlängerung von dem λ bildet, so giebt dessen zweiter Schenkel die Richtung A Y′ zu erkennen, so dass also die vier Axen A X, A X′ und A Y, A Y″ eine völlig bestimmte Stellung zu einander angenommen haben.

III) Es bleibt jetzt nur noch die Stellung der Axe A Y″ gegen die Axen A X, A X′, A X″ zu bestimmen übrig, und da die Winkel Y A Y″ und Y′A Y″, welche diese Axe mit denen A Y und A Y′ bildet, als gegeben vorausgesetzt werden, so ist jene Axe durch die Lage dieser beiden Axen vollkommen bestimmt, so wie man die Seite von Y A Y′ kennt, auf welcher sie liegt. Denkt man sich das aus den Axen A Y, A Y′, A Y″ gebildete neue System mit der Richtung A N fest vereinigt und um diese Richtung gedreht, bis die positive Hälfte seiner durch A N geschiedenen unbegrenzten Ebene Y A Y′ in die positive Hälfte der durch dieselbe Gerade geschiedenen unbegrenzten Ebene X A X′ fällt; verbindet man mit dem neuen Systeme eine auf Y A Y′ senkrechte Gerade A R, welche bei seiner jetzigen Lage von A aus auf dieselbe Seite von X A X′ fällt, auf welcher A X″ liegt, und dreht man das in dieser Lage befindliche neue System um die Gerade A R, bis die Axe A Y in die A X fällt: so liegen dann A X′ und A Y′ auf derselben Seite von A X oder A Y, weil man nach I) durch Drehung in derselben Richtung

von A X nach A X′ und von A Y nach A Y′ über die Coordinatenwinkel hinweg gelangt, es haben mithin die beiden Systeme in ihrer jetzigen Verbindung unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf, je nachdem die Axen A X″ und A Y″ auf einerlei Seite von den auf einander liegenden Ebenen X A X′ und Y A Y′ oder auf entgegengesetzter Seite liegen; da aber während der Drehung des neuen Systems um die Gerade A R seine Axe A Y″ stets auf derselben Seite von der Ebene Y A Y′ und diese stets in der Ebene X A X′ liegen bleibt, so liegen auch schon vor dieser Drehung die Axen A X″ und A Y″ oder, was dasselbe ist, die Richtungen A R und A Y″ auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von Y A Y′, je nachdem die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf besitzen. Versetzt man jetzt das neue System in Verbindung mit der an dasselbe geknüpften Richtung A R wieder in seine anfängliche Lage zurück, so hängt der Umstand, ob A R und A Y″ auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite von Y A Y′ liegen, immer noch davon ab, ob die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben. Hieraus ersieht man, dass sich die Seite von Y A Y′, auf welcher A Y″ liegt, angeben lässt, wenn man weiss, ob der Axenlauf in beiden Systemen ein ähnlicher oder unähnlicher ist. Fügt man nämlich beim Auftragen des Winkels ψ an seine zweite Ebenenhälfte gleich die auf ihr senkrechte Richtung A R so hinzu, wie es geschehen muss, damit diese Richtung, wenn man die zweite Ebenenhälfte durch den Winkelraum ψ hindurch zur ersten Ebenenhälfte hinbewegt, mit A X″ auf einerlei Seite von X A X′ liegt, so wird diese Richtung A R die Seite von Y A Y′ anzeigen, auf welcher A Y″ liegt, wenn die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen Axenlauf haben; hingegen wird diese Richtung auf der entgegengesetzten Seite von A Y″ liegen, wenn die beiden Systeme unter sich einen unähnlichen Axenlauf haben. Es wird sonach in dem einen wie in dem andern Falle die Stellung der Axe A Y″ zu denen A Y und A Y″, wie auch zum ursprünglichen System, vollkommen bestimmt.

81) Nachdem wir gezeigt haben, wie die relative Lage der Axen zweier Systeme gegen einander von den drei Winkeln θ, λ und ψ, wenn man diese in der beschriebenen Weise auffasst, abhängt, werden wir jetzt die zwischen jenen Axen statt findenden Projectionszahlen durch diese drei Winkel auswerthen, wodurch dann jene Zahlen sämmtlich auf diese drei Grössen zurückgeführt werden. Fasst man das aus den drei Richtungen A N, A X, A Y gebildete körperliche Dreieck ins Auge, in welchem die Seite X A Y dem Winkel ψ gegenüber liegt, während N A X und N A Y oder θ und λ ihm anliegen, so wird man gewahr, dass sich der Kosinus von X A Y, welcher nichts anders ist, als die senkrechte Projectionszahl C, welche die Axe A Y an der A X giebt, durch die drei Winkel θ, λ und ψ darstellen lässt; man findet nämlich:

(139. a.) $$C = \cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda\cos\psi. \text{ *)}$$

Auf die gleiche Weise erhält man, wenn man das aus den Richtungen A N, A X′, A Y′ gebildete körperliche Dreieck auffasst und den Kosinus seiner dem Winkel ψ gegenüberliegenden Seite X′A Y′, welcher nichts anders ist, als die oben durch C_1' bezeichnete senkrechte Projec-

*) Diese Gleichung ist eine Folge derer (38), wenn man sich die Richtungen A N, A X, A Y als die Axen eines Coordinatensystems vorstellt und berücksichtigt, dass die zu diesem Systeme gehörigen Polaraxen Winkel bilden, welche die von den auf ihren Schenkeln senkrechtstehenden Coordinatenebenen gebildeten zu zwei Rechten ergänzen.

tionszahl der Richtung A Y′ an der Axe A X′, durch diesen Winkel und die beiden ihm anliegenden Seiten N A X′ und N A Y′ oder $\theta + W$ und $\lambda + W_1$ ausdrückt:

$$C'_1 = \cos(\theta + W)\cos(\lambda + W_1) + \sin(\theta + W)\sin(\lambda + W_1)\cos\psi. \quad \textbf{(139. b.)}$$

Ferner ergiebt sich, wenn man in dem aus den Richtungen A N, A X, A Y′ zusammengesetzten körperlichen Dreieck den Kosinus seiner dem Winkel ψ gegenüberliegenden Seite X A Y′, welcher nichts anders als die oben durch C_1 bezeichnete senkrechte Projectionszahl der Richtung A Y′ an der Axe A X ist, durch den Winkel ψ und die beiden an ihm liegenden Seiten N A X und N A Y′ oder θ und $\lambda + W_1$ ausdrückt:

$$C_1 = \cos\theta\cos(\lambda + W_1) + \sin\theta\sin(\lambda + W_1)\cos\psi. \quad \textbf{(139. c.)}$$

Eben so giebt das aus den Richtungen A N, A X′, A Y zusammengesetzte körperliche Dreieck, wenn man den Kosinus seiner dem Winkel ψ gegenüberliegenden Seite X′A Y, welcher nichts anders ist, als die oben durch C′ bezeichnete Projectionszahl der Richtung A Y an der Axe A X′, durch den Winkel ψ und die zwei an ihm liegenden Seiten N A X′ und N A Y oder $\theta + W$ und λ ausdrückt:

$$C' = \cos(\theta + W)\cos\lambda + \sin(\theta + W)\sin\lambda\cos\psi. \quad \textbf{(139. d.)}$$

Durch die vorstehenden vier Gleichungen sind die zwischen den Axen A X, A X′ und A Y, A Y′ obwaltenden senkrechten Projectionszahlen auf die drei Grössen θ, λ und ψ zurückgeführt worden; um aber die noch übrigen Projectionszahlen zu erhalten, erwäge man, dass nach der Art und Weise wie die Richtung A R, welche in der vorigen Nummer nach einer bestimmten Seite hin senkrecht auf Y A Y′ errichtet worden ist, diese Richtung nothwendig mit der Polaraxe A 𝔛″ zusammenfallen muss, wenn man den zweiten Schenkel des Winkels ψ, welcher in der Ebene Y A Y′ liegt, mit der Richtung A R fest vereinigt und durch diesen Winkel hindurch in die Lage seines ersten Schenkels, der in der Ebene X A X′ liegt, überführt; denn in dieser Lage steht die Richtung A R wie die Polaraxe A 𝔛″ senkrecht auf X A X′, und beide liegen mit A X″ auf einerlei Seite von der Ebene X A X′. Hieraus aber folgt, dass, während man diesen zweiten Schenkel wieder in seine alte Lage zurück versetzt, er immer mit dem ersten Schenkel einen Winkel von derselben Grösse bildet, wie der ist, den die mit ihm fest verbundene Richtung A R mit der Polaraxe A 𝔛″ bildet; es ist daher, wie auch die Stellung des neuen Systems zum ersten beschaffen sein mag, stets der hohle oder erhabene Winkel

$$R A 𝔛'' = \psi. \quad \textbf{(a.)}$$

Fasst man nun das aus den Richtungen A N, A X und A R gebildete körperliche Dreieck ins Auge, so gewahrt man, dass in ihm der Seite X A R der aus den Ebenen N A X und N A R gebildete Winkel gegenüber liegt und da A R senkrecht auf N A Y steht, also N A Y und N A R einen rechten Winkel mit einander bilden, so ist der von N A X und N A R gebildete Winkel $90^\circ + \psi$, weil A R immer in der Verlängerung des aus den Ebenen N A X und N A Y gebildeten wie vorhin bestimmten Winkelraums liegt. Drückt man nun auf die vorige Weise den Kosinus der Seite X A R in dem so eben bezeichneten körperlichen Dreieck durch den dieser Seite gegenüber liegenden Winkel, welcher $\psi + 90^\circ$ ist, und durch die diesem Winkel anliegenden Seiten N A X und N A R oder θ und 90° aus, so findet man, weil $\cos(\psi + 90_\circ) = -\sin\psi$ ist:

$$\cos R A X = -\sin\theta\sin\psi. \quad \textbf{(b.)}$$

Eben so erhält man in dem aus den Richtungen A N, A X′, A R zusammengesetzten körperlichen Dreieck, wenn man den Kosinus der in ihm auftretenden Seite R A X′ durch den ihr ge-

genüberliegenden, aus den Ebenen N A X und N A R gebildeten Winkel, welcher wieder $90^\circ + \psi$ ist, und die zwei diesem Winkel anliegenden Seiten N A X' und N A R oder $\theta + W$ und 90° ausdrückt:

(c.) $$\cos RAX' = -\sin(\theta + W)\sin\psi.$$

Hebt man nun noch das aus den Richtungen A N, A Y und A 𝔛'' zusammengesetzte körperliche Dreieck hervor, und beachtet, dass in ihm der Seite Y A 𝔛'' der aus den zwei Ebenen N A Y und N A 𝔛'' gebildete Winkel gegenüberliegt, welcher jetzt $\pm(90^\circ - \psi)$ ist, da die Richtung A 𝔛'' stets in den aus den Ebenen N A X und N A Y gebildeten wie vorhin bestimmten Winkelraum hineinragt und senkrecht auf N A X steht, und daher die Ebene N A 𝔛'' mit der N A X einen rechten Winkel bildet, so ergiebt sich, wenn man den Kosinus der Seite Y A 𝔛'' durch den ihr gegenüber liegenden Winkel, welcher entweder $90^\circ - \psi$ oder $\psi - 90^\circ$ ist, und durch die diesem Winkel anliegenden Seiten N A Y und N A 𝔛'' oder λ und 90° ausdrückt:

(d.) $$\cos \mathfrak{X}''AY = \sin\lambda\sin\psi.$$

Hebt man endlich das aus den Richtungen A N, A Y' und A 𝔛'' gebildete körperliche Dreieck hervor, und drückt die in ihm vorkommende Seite 𝔛''A Y' durch den ihr gegenüber liegenden Winkel, welcher wieder entweder $90^\circ - \psi$ oder $\psi - 90^\circ$ ist, und durch die diesem Winkel anliegenden Seiten N A Y' und N A 𝔛'' oder $\lambda + W_1$ und 90° aus, so liefert dieses Dreieck schliesslich:

(e.) $$\cos \mathfrak{X}''AY' = \sin(\lambda + W_1)\sin\psi.$$

Bringt man hiermit das Ergebniss der vorigen Nummer in Verbindung, dass nämlich in dem Falle, wo die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen Axenlauf haben, die Richtung A R im neuen Systeme mit dessen Axe A Y'' auf einerlei Seite von Y A Y' liegt, und dann nothwendig eins ist mit der zu A Y'' gehörigen Polaraxe A 𝔜'' dieses Systems, wo dann die Winkel R A 𝔛'', R A X, R A X' keine andern als die 𝔜''A 𝔛'', 𝔜''A X, 𝔜''A X' vorstellen, deren Kosinuse die senkrechten Projectionszahlen sind, welche die Richtung A 𝔜'' an der Polaraxe A 𝔛'' und an den Grundaxen A X, A X' liefert, und die den obigen Bezeichnungen gemäss durch Γ''_2, (Γ_2), (Γ'_2) dargestellt werden, während die Kosinuse der Winkel 𝔛''A Y und 𝔛''A Y', welche nichts anders als die senkrechten Projectionszahlen sind, welche die Richtung A 𝔛'' an den Grundaxen A Y und A Y' giebt, und denselben Bezeichnungen gemäss durch (Δ_2) und (Δ'_2) dargestellt werden, so überzeugt man sich, dass in diesem Falle die Gleichungen (a. bis e.) werden:

(140. a.) $$\begin{cases} \Gamma''_2 = \cos\psi \\ (\Gamma_2) = -\sin\theta\sin\psi, \quad (\Gamma'_2) = -\sin(\theta + W)\sin\psi, \\ (\Delta_2) = \sin\lambda\sin\psi, \quad (\Delta'_2) = \sin(\lambda + W_1)\sin\psi. \end{cases}$$

In dem Falle hingegen, wo die beiden Systeme unter sich einen unähnlichen Axenlauf haben, liegt die Richtung A R der vorigen Nummer gemäss mit der A Y'' auf entgegengesetzter Seite von der Ebene Y A Y', dann aber liegen die Richtungen A R und A 𝔜'' in derselben Geraden, aber nach entgegengesetzten Seiten hinzielend und es sind die Winkel R A 𝔛'', R A X und R A X' Nebenwinkel von denen 𝔜''A 𝔛'', 𝔜''A X und 𝔜''A X' weswegen man $-\Gamma''_2$, $-(\Gamma_2)$ und $-(\Gamma'_2)$ zu setzen hat, wo in den Gleichungen (140. a.) Γ''_2, (Γ_2) und (Γ'_2) steht, weshalb sie in diesem Falle werden:

(140. b.) $$\begin{cases} \Gamma''_2 = -\cos\psi, \\ (\Gamma_2) = \sin\theta\sin\psi, \quad (\Gamma'_2) = \sin(\theta + W)\sin\psi, \\ (\Delta_2) = \sin\lambda\sin\psi, \quad (\Delta'_2) = \sin(\lambda + W_1)\sin\psi. \end{cases}$$

82) Fassen wir nun zuvörderst den besondern Fall ins Auge, wo sowohl das ursprüngliche als das mit ihm verbundene neue System ein senkrechtes ist, und die Axe A X″ senkrecht auf den beiden andern A X und A X′, so wie die A Y″ senkrecht auf den beiden A Y und A Y′ steht, so fällt im ursprünglichen Systeme die Polaraxe A 𝔛″ mit der Grundaxe A X″ zusammen, und im neuen Systeme geht die Richtung A 𝔜″ in die A Y″ über; daher hat man bei diesen besondern Systemen:

$$\Gamma''_2 = C''_2, \quad (\Gamma_2) = C_2, \quad (\Gamma'_2) = C'_2 \quad \text{und} \quad (\Delta_2) = D_2, \quad (\Delta'_2) = D'_2,$$

wobei den Gleichungen (31) zur Folge $D_2 = C''$ und $D'_2 = C''_1$ ist. Dadurch nun verwandeln sich die Gleichungen (140. a.) bei diesen besondern Systemen in:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = -\sin\theta\sin\psi\,, \quad C'_2 = -\sin(\theta+W)\sin\psi\,, \quad C''_2 = \cos\psi\,; \\ C'' = \sin\lambda\sin\psi\,, \quad C''_1 = \sin(\lambda+W_1)\sin\psi\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(141. a.)}$$

welche in Verbindung mit denen (139. a. bis d.) die sämmtlichen senkrechten Projectionszahlen, welche die Axen des neuen Systems an den Axen des ursprünglichen geben, durch die drei Grössen θ, λ, ψ darstellen, womit denn auch alle übrigen zwischen den Grund- und Polaraxen der beiden Systeme obwaltenden senkrechten und schiefen Projectionszahlen auf dieselben drei Grössen zurückgeführt sind, wie die Betrachtungen der Nr. 79. dargethan haben.

Die vorstehenden Gleichungen liefern die Projectionszahlen, wenn die beiden senkrechten Systeme unter sich einen ähnlichen Axenlauf haben; im Gegenfalle treten bei ihnen die zu Ende der vorigen Nummer angezeigten Veränderungen ein, wodurch sie nach Aussage derer (140. b.) werden:

$$\left.\begin{array}{l} C_2 = \sin\theta\sin\psi\,, \quad C'_2 = \sin(\theta+W)\sin\psi\,, \quad C''_2 = -\cos\psi\,; \\ C'' = \sin\lambda\sin\psi\,, \quad C''_1 = \sin(\lambda+W_1)\sin\psi\,. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(141. b.)}$$

83) Sind die beiden auf einander bezogenen Systeme keine senkrechten, und können demzufolge die Gleichungen (141. a. und b.) auf sie nicht in Anwendung gebracht werden, so lassen sich doch immer mittelst der Gleichungen (140. a. und b.) die Grössen C_2, C'_2, C''_2 und C'', C''_1 auf folgende Weise erhalten.

Erstlich hat man, nach Anleitung der Gleichung (9. a. oder b.), weil C, C', C'' und C_1, C'_1, C''_1 die senkrechten Projectionszahlen der Richtungen A Y und A Y′ an den Axen A X, A X′, A X″, dagegen $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ die schiefen der Richtung A 𝔛″ an denselben Axen sind, und $\cos \mathfrak{X}''\text{A Y} = (\Delta_2)$, so wie $\cos \mathfrak{X}''\text{A Y}' = (\Delta'_2)$ ist:

$$(\Delta_2) = \mathfrak{A}_2 C + \mathfrak{A}'_2 C' + \mathfrak{A}''_2 C'' \quad \text{und} \quad (\Delta'_2) = \mathfrak{A}_2 C_1 + \mathfrak{A}'_2 C'_1 + \mathfrak{A}''_2 C''_1. \quad \textbf{(142. a.)}$$

Sodann hat man, weil D, D', D'' und D_1, D'_1, D''_1 die senkrechten Projectionszahlen der Richtungen A X und A X′ an den Axen A Y, A Y′, A Y″, dagegen $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}'_2$, $\mathfrak{B}''_2$ die schiefen der Richtung A 𝔜″ an den gleichen Axen sind, und $\cos \mathfrak{Y}''\text{A X} = (\Gamma_2)$, $\cos \mathfrak{Y}''\text{A X}' = (\Gamma'_2)$ ist:

$$(\Gamma_2) = \mathfrak{B}_2 D + \mathfrak{B}'_2 D' + \mathfrak{B}''_2 D'' \quad \text{und} \quad (\Gamma'_2) = \mathfrak{B}_2 D_1 + \mathfrak{B}'_2 D'_1 + \mathfrak{B}''_2 D''_1. \quad \textbf{(142. b.)}$$

Da C, C' und C_1, C'_1 aus den Gleichungen (139. a. bis d.), (Δ_2) und (Δ'_2) aber aus den Gleichungen (140. a. oder b.) erhalten werden, so liefern die Gleichungen (142. a.) die Grössen C'' und C''_1; da ferner (Γ_2) und (Γ'_2) durch die Gleichungen (140. a. oder b.) gegeben werden, D, D' oder C, C_1 und D_1, D'_1 oder C', C'_1 aber schon durch die Gleichungen (139. a. bis d.) gefunden sind, so geben die Gleichungen (142. b.) die Grössen D'' und D''_1 oder C_2 und C'_2 an die Hand. Ferner ist, weil C_2, C'_2, C''_2 die senkrechten Projectionszahlen der Richtung A Y″ an den Axen A X, A X′, A X″ sind, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ aber die schiefen der Richtung A 𝔛″ an den

gleichen Axen, und zudem $\cos \mathfrak{X}''AY'' = (\Delta''_2)$ ist; oder weil D_2, D'_2, D''_2 die senkrechten Projectionszahlen der Richtung AX'' an den Axen AY, AY', AY'' sind, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}'_2$, $\mathfrak{B}''_2$ aber die schiefen der Richtung $A\mathfrak{Y}''$ an den gleichen Axen, und zudem $\cos \mathfrak{Y}''AX'' = (\Gamma''_2)$ ist:

(142. c.) $$(\Delta''_2) = \mathfrak{A}_2 C_2 + \mathfrak{A}'_2 C'_2 + \mathfrak{A}''_2 C''_2 \quad \text{oder} \quad (\Gamma''_2) = \mathfrak{B}_2 D_2 + \mathfrak{B}'_2 D'_2 + \mathfrak{B}''_2 D''_2.$$

Endlich ist, weil (Δ_2), (Δ'_2), (Δ''_2) die senkrechten Projectionszahlen der Richtung $A\mathfrak{X}''$ an den Axen AY, AY', AY'' sind, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}'_2$, $\mathfrak{B}''_2$ aber die schiefen der Richtung $A\mathfrak{Y}''$ an den gleichen Axen, und zudem $\cos \mathfrak{X}''A\mathfrak{Y}'' = \Gamma''_2$ ist, oder weil (Γ_2), (Γ'_2), (Γ''_2) die senkrechten Projectionszahlen der Richtung $A\mathfrak{Y}''$ an den Axen AX, AX', AX'' sind, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ aber die schiefen der Richtung $A\mathfrak{X}''$ an den gleichen Axen, und zudem $\cos \mathfrak{X}''A\mathfrak{Y}'' = \Gamma''_2$ ist:

(142. d.) $$\Gamma''_2 = \mathfrak{B}_2(\Delta_2) + \mathfrak{B}'_2(\Delta'_2) + \mathfrak{B}''_2(\Delta''_2) \quad \text{oder} \quad \Gamma''_2 = \mathfrak{A}_2(\Gamma_2) + \mathfrak{A}'_2(\Gamma'_2) + \mathfrak{A}''_2(\Gamma''_2).$$

Multiplicirt man nun die vordere Gleichung (142. c.) mit $\mathfrak{B}''_2$, die hintere mit $\mathfrak{A}''_2$ und addirt sie hierauf zur vordern und hintern Gleichung (142. d.), so erhält man:

(142. e.) $$\left\{\begin{array}{l} \Gamma''_2 = \mathfrak{B}_2(\Delta_2) + \mathfrak{B}'_2(\Delta'_2) + \mathfrak{B}''_2\mathfrak{A}_2 C_2 + \mathfrak{B}''_2\mathfrak{A}'_2 C'_2 + \mathfrak{B}''_2\mathfrak{A}''_2 C''_2 \\ \text{oder} \\ \Gamma''_2 = \mathfrak{A}_2(\Gamma_2) + \mathfrak{A}'_2(\Gamma'_2) + \mathfrak{A}''_2\mathfrak{B}_2 D_2 + \mathfrak{A}''_2\mathfrak{B}'_2 D'_2 + \mathfrak{A}''_2\mathfrak{B}''_2 D''_2. \end{array}\right.$$

Da nun (Δ_2), (Δ'_2) und (Γ_2), (Γ'_2) aus den Gleichungen (140. a.) und (140. b.) bekannt sind, und die Grössen C_2, C'_2 und D_2, D'_2 oder C'', C''_1 so eben durch die Gleichungen (142. a.) und (142. b.) erhalten worden sind, so kann man C''_2 oder D''_2 aus der einen oder aus der andern in (142. e.) vorkommenden Gleichung finden, so dass man alle zwischen den Grundaxen der beiden Systeme obwaltenden senkrechten Projectionszahlen als durch die drei Grössen θ, λ und ψ bestimmt ansehen kann.

84) So wie im Vorigen die gegenseitige Lage der Axen zweier Doppelsysteme von der relativen Stellung zweier ihrer Grund-Coordinatenebenen abhängig gemacht worden ist, eben so könnte man an die Stelle der einen von beiden oder auch der beiden Grund-Coordinatenebenen die entsprechenden Polar-Coordinatenebenen treten lassen; da jedoch die ganze Behandlung hierbei völlig die gleiche bleibt, so werden wir darauf nicht weiter eingehen. Dafür wollen wir noch zeigen, wie man statt der drei Grössen θ, λ, ψ auch drei von einander unabhängige Projectionszahlen selber zu den drei Grössen machen könne, auf welche alle übrigen zurückgeführt werden. Aus der ersten der Gleichungen (140. a.) oder (140. b.) folgt:

$$\cos\psi = \pm\Gamma''_2 \quad \text{und} \quad \sin^2\psi = 1 - \Gamma''^2_2,$$

und aus der zweiten und vierten dieser Gleichungen findet man:

$$\sin\theta = \mp\frac{(\Gamma_2)}{\sin\psi}, \quad \sin\lambda = \frac{(\Delta_2)}{\sin\psi},$$

woraus sich ergiebt:

$$\cos^2\theta = \frac{\sin^2\psi - (\Gamma_2)^2}{\sin^2\psi}, \quad \cos^2\lambda = \frac{\sin^2\psi - (\Delta_2)^2}{\sin^2\psi}$$

oder, weil $\sin^2\psi = 1 - \Gamma''^2_2$ ist, wenn man

(a.) $$\sqrt{1 - \Gamma''^2_2 - (\Gamma_2)^2} = p \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \Gamma''^2_2 - (\Delta_2)^2} = q$$

setzt

$$\cos\theta = \frac{p}{\sin\psi}, \quad \cos\lambda = \frac{q}{\sin\psi}.$$

Mittelst dieser Werthe nun findet man:

$$\sin(\theta + W) = \sin\theta\cos W + \cos\theta\sin W = \frac{p\sin W \mp (\Gamma_2)\cos W}{\sin\psi},$$

$$\cos(\theta + W) = \cos\theta\cos W - \sin\theta\sin W = \frac{p\cos W \pm (\Gamma_2)\sin W}{\sin\psi},$$

$$\sin(\lambda + W_1) = \sin\lambda\cos W_1 + \cos\lambda\sin W_1 = \frac{q\sin W_1 + (\Delta_2)\cos W_1}{\sin\psi},$$

$$\cos(\lambda + W_1) = \cos\lambda\cos W_1 - \sin\lambda\sin W_1 = \frac{q\cos W_1 - (\Delta_2)\sin W_1}{\sin\psi},$$

und setzt man diese für Sinus und Kosinus von θ und λ und von $\theta + W$ und $\lambda + W_1$ erhaltenen Ausdrücke in die übrigen Gleichungen (140. a.) oder (140. b.), so wie in die (139. a. bis d.), so kommt $1 - \Gamma_2''^2$ für $\sin^2\psi$ setzend:

$$\left.\begin{aligned}
&(\Gamma_2') = \mp p\sin W + (\Gamma_2)\cos W, \quad (\Delta_2') = q\sin W_1 + (\Delta_2)\cos W_1,\\
&C = \frac{p\,q - (\Gamma_2)(\Delta_2)\Gamma_2''}{1 - \Gamma_2''^2}, \quad C' = C\cos W \pm \frac{p(\Delta_2)\Gamma_2'' + q(\Gamma_2)}{1 - \Gamma_2''^2}\sin W,\\
&C_1 = C\cos W_1 - \frac{p(\Delta_2) + q(\Gamma_2)\Gamma_2''}{1 - \Gamma_2''^2}\sin W_1,\\
&C_1' = C'\cos W_1 + C_1\cos W - C\cos W\cos W_1 \pm \frac{p\,q\,\Gamma_2'' - (\Gamma_2)(\Delta_2)}{1 - \Gamma_2''^2}\sin W\sin W_1,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(143. a.)}$$

in welchen von den doppelten Vorzeichen die obern oder untern zu nehmen sind, je nachdem die zwei Systeme unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben. Die Gleichungen (143. a.) machen die sämmtlichen Projectionszahlen von den dreien (Γ_2), (Δ_2) und Γ_2'' abhängig, da p und q den Gleichungen (a.) zur Folge neben diesen Grössen keine andern in sich enthalten. Man kann die für C, C', C_1, C_1' sich ergebenden Ausdrücke symmetrisch machen, wenn man die Winkel θ und λ, anstatt sie von der Richtung A N bis zu denen A X und A Y reichen zu lassen, von A N aus bis zu den zwei Richtungen nimmt, welche die Axenwinkel X A X' und Y A Y' halbiren.

Hätte man, anstatt $\sin\theta$ und $\sin\lambda$ aus der zweiten und vierten der Gleichungen (140. a.) oder (140. b.) herzuholen, $\sin(\theta + W)$ und $\sin(\lambda + W_1)$ aus der dritten und fünften dieser Gleichungen entnommen, welche

$$\sin(\theta + W) = \mp\frac{(\Gamma_2')}{\sin\psi} \quad \text{und} \quad \sin(\lambda + W_1) = \frac{(\Delta_2')}{\sin\psi},$$

also

$$\cos^2(\theta + W) = \frac{\sin^2\psi - (\Gamma_2')^2}{\sin^2\psi} \quad \text{und} \quad \cos^2(\lambda + W_1) = \frac{\sin^2\psi - (\Delta_2')^2}{\sin^2\psi}$$

oder, weil $\sin^2\psi = 1 - \Gamma_2''^2$ ist, wenn man

$$\sqrt{1 - \Gamma_2''^2 - (\Gamma_2')^2} = p' \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \Gamma_2''^2 - (\Delta_2')^2} = q' \qquad \text{(b.)}$$

setzt,

$$\cos(\theta + W) = \frac{p'}{\sin\psi} \quad \text{und} \quad \cos(\lambda + W_1) = \frac{q'}{\sin\psi}$$

geben, woraus sich dann noch weiter ergiebt:

$$\sin\theta = \sin(\theta + W)\cos W - \cos(\theta + W)\sin W = -\frac{p'\sin W \pm (\Gamma'_2)\cos W}{\sin\psi},$$

$$\cos\theta = \cos(\theta + W)\cos W + \sin(\theta + W)\sin W = \frac{p'\cos W \mp (\Gamma'_2)\sin W}{\sin\psi},$$

$$\sin\lambda = \sin(\lambda + W_1)\cos W_1 - \cos(\lambda + W_1)\sin W_1 = -\frac{q'\sin W_1 - (\varDelta'_2)\cos W_1}{\sin\psi},$$

$$\cos\lambda = \cos(\lambda + W_1)\cos W_1 + \sin(\lambda + W_1)\sin W_1 = \frac{q'\cos W_1 + (\varDelta'_2)\sin W_1}{\sin\psi},$$

so erhält man, wenn man diese für Sinus und Kosinus von $\theta + W$ und $\lambda + W_1$ und von θ und λ erhaltenen Ausdrücke in die übrigen Gleichungen (140. a.) oder (140. b.), so wie in die (139. a. bis d.) einsetzt und beachtet, dass $\sin^2\psi = 1 - \Gamma''^2_2$ ist:

(143. b.)

$$\left\{\begin{array}{l} (\Gamma_2) = (\Gamma'_2)\cos W \pm p'\sin W, \quad (\varDelta_2) = (\varDelta'_2)\cos W_1 - q'\sin W_1, \\[2ex] C'_1 = \dfrac{p'q' - (\Gamma'_2)(\varDelta'_2)\Gamma''_2}{1 - \Gamma''^2_2}, \quad C_1 = C'_1\cos W \mp \dfrac{q'(\Gamma'_2) + p'(\varDelta'_2)\Gamma''_2}{1 - \Gamma''^2_2}\sin W, \\[2ex] C' = C'_1\cos W_1 + \dfrac{p'(\varDelta'_2) + q'(\Gamma'_2)\Gamma''_2}{1 - \Gamma''^2_2}\sin W_1, \\[2ex] C = C'\cos W + C_1\cos W_1 - C'_1\cos W\cos W_1 \mp \dfrac{(\Gamma'_2)(\varDelta'_2) - p'q'\Gamma''_2}{1 - \Gamma''^2_2}\sin W\sin W_1, \end{array}\right.$$

in welchen wieder von den doppelten Vorzeichen die obern oder untern zu nehmen sind, je nachdem die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben. Die Gleichungen (143. b.) machen die sämmtlichen Projectionszahlen von den dreien (Γ'_2), $(\varDelta'_2)$ Γ''_2 abhängig, da p' und q' den Gleichungen (b.) zur Folge neben diesen Grössen keine andern in sich enthalten.

85) Ich glaube nicht, mich bei Betrachtungen dieser Art, die keine grosse Anwendbarkeit zu haben scheinen, noch länger aufhalten zu dürfen, und schliesse daher mit einer Ableitung der Mongeschen Formeln aus den vorigen Resultaten. Sind nämlich die beiden auf einander bezogenen Systeme rechtwinklige, so wird $\Gamma''_2 = C''_2$, $(\Gamma_2) = C_2$, $(\Gamma'_2) = C'_2$, $(\varDelta_2) = D_2 = C''$ und $(\varDelta'_2) = D'_2 = C''_1$ und dabei ist $W = W_1 = 90°$; daher werden in diesem Falle die Gleichungen (143. a.):

(144. a.)

$$\left\{\begin{array}{l} C'_2 = \mp p, \quad C''_1 = q, \\[1ex] C = \dfrac{pq - C_2 C'' C''_2}{1 - C''^2_2}, \quad C' = \pm\dfrac{pC''C''_2 + qC_2}{1 - C''^2_2}, \\[2ex] C'_1 = \pm\dfrac{pqC''_2 - C_2C''}{1 - C''^2_2}, \quad C_1 = -\dfrac{pC'' + qC_2C''_2}{1 - C''^2_2}, \end{array}\right.$$

in welchen $p^2 = 1 - C''^2_2 - C^2_2$ und $q^2 = 1 - C''^2_2 - C''^2$ ist. Aus den beiden Gleichungen, welche C und C'_1 liefern, erhält man durch Elimination einmal von pq und ein andermal von C_2C'':

$$CC''_2 \mp C'_1 = C_2C'' \quad \text{und} \quad C \mp C'_1C''_2 = pq;$$

quadrirt man aber diese beiden Gleichungen und zieht sie von einander ab, so findet man zunächst:

$$(C^2 - C_1'^2)(1 - C_2''^2) = p^2 q^2 - C_2^2 C''^2,$$

und diese Gleichung geht mit Hilfe der eben für p^2 und q^2 gegebenen Werthe über in:

$$1 - C_2''^2 + C_1'^2 - C^2 = C_2^2 + C''^2.$$

Aus denselben für p^2 und q^2 gegebenen Werthen ergiebt sich noch:

$$2(1 - C_2''^2) = C_2^2 + C''^2 + p^2 + q^2,$$

und zieht man von dieser Gleichung die vorige ab, so kommt:

$$1 - C_2''^2 - C_1'^2 + C^2 = p^2 + q^2.$$

Sucht man aus den hier für $C_2^2 + C''^2$ und $p^2 + q^2$ erhaltenen und den kurz zuvor für $C_2 C''$ und $p\,q$ gefundenen Werthen die Grössen C_2, C'' und p, q auf, so findet man, wenn zur Abkürzung

$$1 + C \pm C_1' + C_2'' = M, \quad 1 - C \pm C_1' - C_2'' = P,$$
$$1 - C \mp C_1' + C_2'' = N, \quad 1 + C \mp C_1' - C_2'' = Q,$$

gesetzt wird:

$$2C_2 = \sqrt{MP} + \sqrt{NQ}, \quad 2C'' = -\sqrt{MP} + \sqrt{NQ}$$

und

$$2p = \sqrt{MQ} - \sqrt{NP}, \quad 2q = \sqrt{MQ} + \sqrt{NP}$$

und hieraus erhält man sogleich noch:

$$2C' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}, \quad 2C_1 = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN},$$

so dass man also schliesslich hat:

$$\left.\begin{array}{ll} 2C_2 = \sqrt{MP} + \sqrt{NQ}, & 2C'' = -\sqrt{MP} + \sqrt{NQ}, \\ 2C_2' = -\sqrt{MQ} + \sqrt{NP}, & 2C_1'' = \sqrt{MQ} + \sqrt{MN}, \\ 2C' = \sqrt{PQ} + \sqrt{MN}, & 2C_1 = \sqrt{PQ} - \sqrt{MN}, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \textbf{(144. b.)}$$

welches die Mongeschen Formeln sind, und sich eben so aus den Gleichungen (143. b.) herholen lassen. Auch kann man sie in ähnlicher Weise aus den auf zwei rechtwinklige Systeme übergetragenen Gleichungen (139. a. bis d.) und (140. a.) herleiten. In allen vorstehenden Ausdrücken sind von den doppelten Vorzeichen nur die obern oder nur die untern zu nehmen, je nachdem die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen oder einen unähnlichen Axenlauf haben.

Wäre man von denjenigen der Gleichungen (144. a.) ausgegangen, welche C' und C_1 liefern, so hätte man durch Elimination einmal von p und ein andermal von q erhalten:

$$\pm C' + C_1 C_2'' = q\,C_2 \quad \text{und} \quad C_1 \pm C' C_2'' = -p\,C'',$$

und diese Gleichungen geben, wenn man sie quadrirt und abzieht:

$$(C'^2 - C_1^2)(1 - C_2''^2) = q^2 C_2^2 - p^2 C''^2,$$

oder die obigen Werthe von q^2 und p^2 berücksichtigend:

$$C'^2 - C_1^2 = C_2^2 - C''^2 = q^2 - p^2.$$

Die letzten zwei vereinigten Gleichungen kann man unter Berücksichtigung der für q^2 und p^2 gegebenen Ausdrücke auch so schreiben:

$$1 - C_2''^2 + C'^2 - C_1^2 = C_2^2 + q^2 \quad \text{und} \quad 1 - C_2''^2 - C'^2 + C_1^2 = C''^2 + p^2;$$

aus diesen aber lässt sich in Verbindung mit den zweien, welchen $q C_2$ und $p C''$ darstellen, zunächst C_2, q und C'', p und sodann auch C und C'_1 finden, so dass man als Resultat erhält:

(144. c.) $$\begin{cases} 2 C_2 = \sqrt{P' N'} + \sqrt{M' Q'}\,, & 2 C'' = \sqrt{N' Q'} + \sqrt{M' P'}\,, \\ 2 C'_2 = \sqrt{N' Q'} - \sqrt{M' P'}\,, & 2 C''_1 = \sqrt{N' P'} - \sqrt{M' Q'}\,, \\ 2 C = \sqrt{M' N'} - \sqrt{P' Q'}\,, & 2 C'_1 = \sqrt{M' N'} + \sqrt{P' Q'}\,, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$1 - C''_2 - C_1 \mp C' = M'\,, \quad 1 - C''_2 + C_1 \pm C' = N'$$
$$1 + C''_2 - C_1 \pm C' = P'\,, \quad 1 + C''_2 + C_1 \mp C' = Q'$$

gesetzt worden ist, und es ist wieder in allen vorstehenden Ausdrücken von den doppelten Vorzeichen entweder nur das obere oder nur das untere zu nehmen, je nachdem die beiden Systeme unter sich einen ähnlichen oder unähnlichen Axenlauf haben.

Trägt man die Gleichungen (143. b.) auf unsere beiden rechtwinkligen Systeme über, so erhält man die Formeln, welche die sämmtlichen Projectionszahlen auf die drei C''_2, C'_2 und C''_1 zurückführen, und in Verbindung mit den vorigen die Fälle ausmachen, wo solche Reductionen durch einfache oder symmetrische Ausdrücke geschehen können; immer aber behalten die durch die Gleichungen (139.) und (140.) zuerst gegebenen Reductionen einen nicht zu verkennenden Vorzug vor allen übrigen, der nicht blos darin besteht, dass jene doch immer zu den einfachsten Ausdrücken hinführen, sondern mehr noch darin, dass in allen andern wegen der in ihnen auftauchenden Quadratwurzeln eine Unbestimmtheit der Vorzeichen zurückbleibt, zu deren Abwendung noch weitere Betrachtungen erforderlich sind.

Zweiter Abschnitt.

Von der Ebene und Geraden im beliebigen Coordinatensysteme.

§. 10.

Von der Ebene.

86) Wir haben im vorigen Abschnitt (Nr. 53.) die Bedingungen angegeben, unter denen ein Punct in einer gegebenen Ebene liegt. Es wurde dort gezeigt, dass jeder in der gegebenen Ebene liegende Punct durch seine schiefen oder senkrechten Coordinaten eine der Gleichungen (100. a. bis d.) erfüllen müsse, so wie umgekehrt, dass jeder Punct, der eine von diesen Bedingungen erfüllt, in der gegebenen Ebene liegen müsse. Jede solche Gleichung trägt mithin sämmtliche zu der gegebenen Ebene gehörigen Puncte in sich und schliesst alle übrigen Puncte des Raumes von sich aus; sie ist daher im Gebiete der Rechnung ein vollgültiger Repräsentant der unbegrenzt gegebenen Ebene. Nun werden wir zeigen, dass jede Gleichung von der Form

(1.) $$\mathfrak{p} x + \mathfrak{p}' x' + \mathfrak{p}'' x'' = \mathfrak{P} \quad \text{oder} \quad p u + p' u' + p'' u'' = P$$

der Repräsentant einer einzigen, völlig bestimmbaren unbegrenzten Ebene ist, wenn $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{P}$ oder p, p′, p″ und P beliebige reelle, positive oder negative Zahlen vorstellen, (die auch in so lange Null sein können, als dadurch nicht die Gleichung selbst verloren geht oder einen Widerspruch in sich aufnimmt) und x, x′, x″ die schiefen, u, u′, u″ die senkrechten Coordinaten an den Axen eines beliebigen Systems von allen denjenigen Puncten anzeigen, durch welche die Gleichung (1.) in Erfüllung geht. Mit diesen Betrachtungen werden sich gleichzeitig alle Eigenschaften der durch die Gleichung (1.) dargestellten Ebene von selbst ergeben.

Zuvörderst bemerken wir, dass, wenn x_1, x_1', x_1'' die schiefen oder u_1, u_1', u_1'' die senkrechten Coordinaten an den Axen desselben Coordinatensystems, worauf die Gleichung (1.) sich bezieht, von einem bestimmten der unendlich vielen Puncte vorstellen, welche die erste oder zweite der Gleichungen (1.) erfüllen, so dass also

$$\mathfrak{p}x_1+\mathfrak{p}'x_1'+\mathfrak{p}''x_1''=\mathfrak{P} \quad \text{oder} \quad p\,u_1+p'u_1'+p''u_1''=P \qquad (2.)$$

ist, und man subtrahirt diese Gleichungen von denen (1.) in der Ordnung, in welcher sie geschrieben stehen, so erhält man:

$$\mathfrak{p}(x-x_1)+\mathfrak{p}'(x'-x_1')+\mathfrak{p}''(x''-x_1'')=0 \quad \text{oder} \quad p(u-u_1)+p'(u'-u_1')+p''(u''-u_1'')=0. \qquad (3.)$$

Diese Gleichungen sind nichts anders, als die (1.), nur dass in ihnen die Grössen $\mathfrak{P}$ und P durch die x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' ersetzt worden sind, welche einem bestimmten der zu den Gleichungen (1.) gehörigen Puncte entsprechen; es enthalten daher die Gleichungen (3.) neben diesem einen Puncte noch alle übrigen Puncte der Gleichungen (1.) in sich, und ausser diesen keinen andern. Wäre in den Gleichungen (1.) $\mathfrak{P}=0$ oder $P=0$, so würde die vordere durch $x=0$, $x'=0$, $x''=0$, oder die hintere durch $u=0$, $u'=0$, $u''=0$ befriedigt, d. h. es wäre die Coordinatenspitze einer von den ihr angehörigen Puncten; in demselben Falle aber nähmen die Gleichungen (2.) die Form

$$\mathfrak{p}x_1+\mathfrak{p}'x_1'+\mathfrak{p}''x_1''=0 \quad \text{oder} \quad p\,u_1+p'u_1'+p''u_1''=0$$

an und in Folge dieser letzten Gleichungen würden die (3.) immer auf die

$$\mathfrak{p}x+\mathfrak{p}'x'+\mathfrak{p}''x''=0 \quad \text{oder} \quad p\,u+p'u'+p''u''=0$$

sich zurückführen lassen, welche keine andern als die (1.) für $\mathfrak{P}=0$ oder $P=0$ sind.

Sodann machen wir darauf aufmerksam, dass jede der in (1.) oder (3.) enthaltenen Gleichungen, nachdem alle ihre Glieder mit einer und derselben beliebigen Zahl, die jedoch nicht null sein darf und hier immer reell gedacht wird, multiplizirt oder dividirt worden sind, noch immer für x, x′, x″ oder u, u′, u″ die gleichen Werthe und in dem gleichen Umfange wie zuvor an die Hand gebe, also nachher wie vorher in Bezug auf die durch sie dargestellten Puncte dieselbe Gleichung sei, wie aus der Theorie der Gleichungen als bekannt vorausgesetzt werden darf. Bezeichnen daher $\mathfrak{H}$ und H zwei solche Zahlen und setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q},\ \dfrac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q}',\ \dfrac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q}'' \ \text{oder}\ \dfrac{p}{H}=q,\ \dfrac{p'}{H}=q',\ \dfrac{p''}{H}=q'' \\ \text{so wie} \\ \dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{Q} \ \text{oder}\ \dfrac{P}{H}=Q, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.)$$

so gehen dadurch die Gleichungen (1.) und (3.) über in:

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathfrak{q}\,x + \mathfrak{q}'x' + \mathfrak{q}''x'' = \mathfrak{Q} \quad \text{oder} \quad q\,u + q'u' + q''u'' = Q \\ \text{und} \\ \mathfrak{q}(x - x_1) + \mathfrak{q}'(x' - x'_1) + \mathfrak{q}''(x'' - x''_1) = 0 \quad \text{oder} \quad q(u - u_1) + q'(u' - u'_1) + q''(u'' - u''_1) = 0, \end{cases}$$

und haben mit jenen völlig gleichen Inhalt, so lange für $\mathfrak{H}$ und H Zahlen von der angezeigten Beschaffenheit genommen werden.

Die Zahlen $\mathfrak{H}$ und H nehmen immer die von ihnen geforderte Beschaffenheit von selber an, wenn man sie aus den Coeffizienten der Gleichungen (1.) oder (3.) in der Art bestimmt, wie sie aus den Gleichungen (55. a. und b.) des vorigen Abschnitts hervorgehen, falls man p, p′, p″ an die Stelle von m, m′, m″ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ an die Stelle von n, n′, n″ setzt, wodurch man findet:

$$(6.)\ \cdots \begin{cases} p^2 + p'^2 + p''^2 + 2\,p\,p'\cos W + 2\,p\,p''\cos W' + 2\,p'p''\cos W'' = H^2 \\ \text{und} \\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{E}'_1}\mathfrak{p}'^2 + \frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{E}''_2}\mathfrak{p}''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}'_1}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}''_2}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}'' + \left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}'_1} + \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{E}''_2}\right)\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'' = \mathfrak{H}^2. \end{cases}$$

Dass die aus den Gleichungen (6.) hervorgehenden Zahlen $\mathfrak{H}$ und H in der That unter allen Umständen die von ihnen geforderte Eigenschaft, nie null zu sein, besitzen, davon überzeugt man sich sogleich, wenn man sich p, p′, p″ als schiefe, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ als senkrechte Coordinaten eines Punctes vorstellt, denn dann geben die Gleichungen (53.) und (54. a.) des vorigen Abschnitts zu erkennen, dass H^2 und $\mathfrak{H}^2$ die Quadrate der Abstände dieser Puncte von der Coordinatenspitze A sind, und diese Abstände können offenbar nur in dem einen Falle null werden, wenn die drei Coordinaten p, p′, p″ oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, denen sie entsprechen, sämmtlich null sind; dann aber giengen die Gleichungen (1.) oder (3.) entweder ganz und gar verloren, oder sie enthielten einen Widerspruch in sich und würden in beiden Fällen unfähig sein, irgend Etwas darzustellen. Es geht hieraus hervor, dass jede der Gleichungen (5.), wenn diese durch die Zahlen $\mathfrak{H}$ und H erhalten worden sind, die aus den Gleichungen (6.) sich ergeben haben, den ganzen Inhalt der Gleichungen (1.) oder (3.), falls diese überhaupt einen Inhalt haben, in sich tragen.

Ferner geben die in Nr. 32. des vorigen Abschnittes angestellten Betrachtungen, welche zu den dortigen Gleichungen (55. a. und b.) geführt haben, zu erkennen, dass in denselben Fällen, wo die Gleichungen (5.) durch Zahlen $\mathfrak{H}$ und H, die den Gleichungen (6.) gemäss bestimmt worden sind, erhalten werden, die Coeffizienten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder q, q′, q″ derselben immer die senkrechten oder schiefen Projectionszahlen einer Richtung anzeigen, die sich sonach aus den Coeffizienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ oder p, p′, p″ der Gleichungen (1.) oder (3.) auf die beschriebene Art auffinden lässt. Wir werden von jetzt an, wenn wir uns der Gleichungen (5.) bedienen, immer voraussetzen, dass ihre Coeffizienten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder q, q′, q″ nach Anleitung der Gleichungen (4.) mittelst Zahlen $\mathfrak{H}$ und H, die von den Gleichungen (6.) an die Hand gegeben werden, aufgefunden worden seien und deshalb die senkrechten oder schiefen Projectionszahlen einer durch sie bestimmten Richtung sind. So genommen dürfen dann diese Gleichungen weder mit einer Zahl multiplizirt noch dividirt werden, ohne ihren eigenthümlichen Character zu verlieren; denn jede solche Abänderung würde ihnen wieder die allgemeinere Natur der Gleichungen (1.) oder (3.) mittheilen.

Noch hat man zu beachten, dass die Gleichungen (6.) für $\mathfrak{H}$ sowohl als für H zwei Werthe finden lassen, deren absolute Grösse die gleiche ist, die aber entgegengesetzte Vorzeichen an

sich tragen. Aus diesen zweierlei Werthen von $\mathfrak{H}$ oder H liefern die Gleichungen (4.) zweierlei Werthe für $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder q, q', q'', so wie auch für $\mathfrak{Q}$ oder Q, welche ebenfalls paarweise dieselbe absolute Grösse, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, und diess hat zur Folge, dass die den beiderlei Werthen entsprechenden Projectionszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder q, q', q'' auf zweierlei Richtungen hinführen, die zwar einander parallel, aber gegenläufig sind.

Nach diesen, in der Absicht die Natur des Gegenstandes aufzuhellen, vorausgeschickten allgemeinen Erläuterungen überzeugt man sich nun leicht, dass jede der Gleichungen (1.) oder (3.) alle Puncte einer Ebene darstellt, die senkrecht steht auf der Richtung, deren Projectionszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder q, q', q'' sind, welche Projectionszahlen sich aus den Coefficienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ oder p, p', p'' der gegebenen Gleichung in der besprochenen Weise herholen lassen, und dass kein zu dieser Ebene nicht gehöriger Punct in derselben Gleichung enthalten sein kann. Vergleicht man nämlich die auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (5.) mit denen im vorigen Abschnitte gegebenen Gleichungen (100. a.), so sieht man, dass beide von einerlei Form sind, nur dass dort die senkrechten Projectionszahlen der Richtung, worauf sich die Gleichung bezieht, durch (Γ_2), (Γ'_2), (Γ''_2), hier durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ bezeichnet werden, so wie die schiefen Projectionszahlen der Richtung, auf die sich die Gleichung stützt, dort durch (A_2), (A'_2), (A''_2), hier durch q, q', q'' vorgestellt werden; es stellt daher hier wie dort jede solche Gleichung die Ebene dar, welche durch den bestimmten Punct x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 geht und senkrecht auf der Richtung steht, die sich aus den Coefficienten der Gleichung herleiten lässt. Dieselbe Ebene wird dann auch durch die entsprechende auf erster Zeile stehende Gleichung (5.) dargestellt, nur dass man aus dieser zuvor erst einen der ihr angehörigen Puncte aufsuchen muss, durch welchen die Ebene zu gehen hat. Eben so wird die gleiche Ebene auch durch die entsprechenden Gleichungen (1.) oder (3.) dargestellt, mit dem Unterschiede jedoch, dass man aus diesen zuvor noch mittelst der Gleichungen (6.) und (4.) die Richtung aufzusuchen hat, auf welcher die Ebene senkrecht steht. In dem besondern Falle, wo in den Gleichungen (1.) die Grösse $\mathfrak{P}$ oder P, so wie in den obern Gleichungen (5.) die Grösse $\mathfrak{Q}$ oder Q null ist, oder wo in den Gleichungen (2.) die bestimmt gegebenen Coordinatenwerthe x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 von solcher Beschaffenheit sind, dass

$$\mathfrak{p}x_1 + \mathfrak{p}'x'_1 + \mathfrak{p}''x''_1 = 0 \quad \text{oder} \quad p u_1 + p'u'_1 + p''u''_1 = 0,$$

so wie in den untern Gleichungen (5.):

$$\mathfrak{q}x_1 + \mathfrak{q}'x'_1 + \mathfrak{q}''x''_1 = 0 \quad \text{oder} \quad q u_1 + q'u'_1 + q''u''_1 = 0$$

wird, zeigt diess an, dass die durch solche Gleichungen dargestellte Ebene durch die Coordinatenspitze A hindurch geht.

87) Alles in voriger Nummer Gesagte bleibt gleichmässig wahr, die beiden in (1.) oder (3.) enthaltenen oder die zwei neben einander stehenden Gleichungen (5.) mögen eine und dieselbe oder zwei von einander verschiedene Ebenen darstellen, nur hat man da, wo die beiden Gleichungen verschiedenen Ebenen entsprechen, im Allgemeinen die Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 in den Gleichungen, wo sie vorkommen, auf zwei verschiedene bestimmte Puncte zu beziehen, während man da, wo die beiden Gleichungen einer und derselben Ebene entsprechen, beide Puncte in einen einzigen bestimmten Punct sich vereinigt denken kann. Gehören die zwei genannten Gleichungen, von welchen die eine sich immer auf schiefe, die andere auf senkrechte Coordinaten der einzelnen Puncte bezieht, einer und derselben Ebene an,

in welchem Falle wir sie **combinirte Gleichungen dieser einen Ebene** nennen werden, so stehen deren Coefficienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und p, p', p'' oder $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ und q, q', q'' in gewissen Beziehungen zu einander, die wir jetzt näher angeben wollen. Da nämlich, wenn die beiden Gleichungen einer und derselben Ebene angehören oder combinirte sind, sowohl $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die senkrechten, als q, q', q'' die schiefen Projectionszahlen von einer auf dieser Ebene senkrechten Richtung sind, so gehören diese beiderlei aus einem der beiden Werthe von $\mathfrak{H}$ und H gefundenen Projectionszahlen nothwendig entweder einer und derselben Richtung an, oder zweien, die parallel und gegenläufig sind. Im ersten Falle finden zwischen ihnen die im vorigen Abschnitte zwischen den zu einer und derselben Richtung gehörigen schiefen und senkrechten Projectionszahlen aufgefundenen Gleichungen (12.) und (47. a.) statt, nämlich:

$$\mathfrak{q}=q+q'\cos W+q''\cos W', \quad \mathfrak{q}'=q\cos W+q'+q''\cos W'', \quad \mathfrak{q}''=q\cos W'+q'\cos W''+q''$$
und
$$\mathfrak{C}\,q=\mathfrak{A}\,\mathfrak{q}+\mathfrak{A}'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{q}'', \quad \mathfrak{C}_1'\,q'=\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{q}'', \quad \mathfrak{C}_2''q''=\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{q}''.$$

Im andern Falle hingegen müssen die Vorzeichen entweder blos der schiefen oder blos der senkrechten Projectionszahlen in die entgegengesetzten umgewandelt werden, damit alle zusammen einer und derselben Richtung angehören und auf sie wieder die obigen Gleichungen ihre Anwendung finden; diess bringt aber in diesen Gleichungen keine andere Aenderung hervor, als dass sämmtliche auf ihren e i n e n Seiten befindliche Glieder ein entgegengesetztes Vorzeichen annehmen. Man kann sonach dieses Verhalten allgemein so aussprechen:

(7.) $$\begin{cases}\pm\mathfrak{q}=q+q'\cos W+q''\cos W', \quad \pm\mathfrak{q}'=q\cos W+q'+q''\cos W'', \quad \pm\mathfrak{q}''=q\cos W'+q'\cos W''+q'' \\ \text{und} \\ \pm\mathfrak{C}\,q=\mathfrak{A}\,\mathfrak{q}+\mathfrak{A}'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{q}'', \quad \pm\mathfrak{C}_1'\,q'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{q}'', \quad \pm\mathfrak{C}_2''\,q''=\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_2'\,\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{q}'',\end{cases}$$

wenn man sich blos merkt, dass in allen diesen Gleichungen gleichzeitig blos die obern oder blos die untern Vorzeichen genommen werden müssen, je nachdem die Projectionszahlen q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ zu einerlei oder zu entgegensetzten Richtungen hinführen.

Setzt man in den Gleichungen (7.) anstatt der Projectionszahlen ihre durch die Gleichungen (4.) gegebenen Werthe ein, so werden sie:

(8.) $$\begin{cases}\pm\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}=p+p'\cos W+p''\cos W', \quad \pm\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}'=p\cos W+p'+p''\cos W'', \quad \pm\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}''=p\cos W'+p'\cos W''+p'' \\ \text{und} \\ \pm\frac{\mathfrak{H}}{H}\,\mathfrak{C}p=\mathfrak{A}\mathfrak{p}+\mathfrak{A}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{p}'', \quad \pm\frac{\mathfrak{H}}{H}\,\mathfrak{C}_1p'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_1'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{p}, \quad \pm\frac{\mathfrak{H}}{H}\,\mathfrak{C}_2''p''=\mathfrak{A}_2\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_2'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{p}'',\end{cases}$$

in welchen $\mathfrak{H}$ und H den Gleichungen (4.) gemäss zu bestimmen sind, und deren doppelte Vorzeichen dieselbe Rücksichtsnahme wie bei den Gleichungen (7.) verlangen. Die so den jedesmaligen Umständen angepassten Gleichungen (8.) nun decken die Relationen auf, welche zwischen den Coefficienten in combinirten Gleichungen statt haben.

Der Umstand, dass man bei den Gleichungen (7.) oder (8.) immer erst noch zuzusehen habe, ob in ihnen von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere zu setzen sei, ist lästig; man kann indessen diesen Uebelstand durch ein einfaches Mittel aus dem Weg räumen. Setzt man nämlich ein für alle Mal fest, von den zwei aus den Gleichungen (6.) für $\mathfrak{H}$ und H sich ergebenden Werthen immer nur den positven zu nehmen, so nehmen, den Gleichungen (4.)

zur Folge, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$, so wie p und q, p' und q', p'' und q'', P und Q stets ein und dasselbe Vorzeichen an, woraus folgt, dass die Grössen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{Q}$ gleichzeitig mit denen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{P}$, so wie die q, q', q'', Q gleichzeitig mit denen p, p', p'', P ihr Vorzeichen umkehren. Da nun der Inhalt einer jeden einzelnen der in (1.) oder (3.) enthaltenen Gleichungen nicht im Geringsten abgeändert wird, wenn man alle ihre Vorzeichen in die entgegengesetzten umkehrt, so hat man es stets in seiner Gewalt, jedes Paar combinirter Gleichungen von vorn herein so zu schreiben, dass die aus ihnen hergeleiteten senkrechten und schiefen Projectionszahlen auf eine und dieselbe Richtung sich beziehen, und demnach in den Gleichungen (7.) und (8.) immer blos die obern Vorzeichen genommen werden müssen. Thut man diess und macht man es sich zur Regel, in so angeordneten Gleichungen nie andere algebraisch erlaubte Aenderungen als solche vorzunehmen, wodurch entweder die Vorzeichen der einzelnen Glieder in den beiden combinirten Gleichungen stets die gleichen bleiben, oder in beiden gleichzeitig sich sämmtlich umkehren, so kann man unbedenklich die Gleichungen (7.) und (8.) immer ohne alle Zweideutigkeit in Anwendung bringen, und braucht dann auf die rechte Wahl der Vorzeichen keiu besonderes Augenmerk mehr zu richten. Aus dieser Ursache wird man wohl thun, sich unter $\mathfrak{H}$ und H nur ihre positiven Werthe zu denken und in jedem Paare von combinirten Gleichungen deren Vorzeichen stets in der Weise angeordnet sich vorzustellen, wobei man in den Gleichungen (7.) oder (8.) immer nur ihre obern Vorzeichen zu nehmen braucht. So angeordnete combinirte Gleichungen bezeichnen wir dadurch, dass wir sagen, sie besitzen **gleichartige** Vorzeichen.

88) Es mögen combinirte Gleichungen gleichartige Vorzeichen haben oder nicht, so ist doch stets

$$\pm 1 = q\mathfrak{q} + q'\mathfrak{q}' + q''\mathfrak{q}'' \qquad \textbf{(9. a.)}$$

nach Aussage der Gleichung (11.) des vorigen Abschnitts und man hat in dieser Gleichung das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem die Projectionszahlen q, q', q'' und die $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ einer und derselben oder einander gerade entgegengesetzten Richtungen angehören, d. h. je nachdem die combinirten Gleichungen, an welche diese Projectionszahlen geknüpft worden sind, gleichartige Vorzeichen haben oder nicht. Setzt man in die Gleichung (9. a.) für die darin vorkommenden Projectionszahlen ihre durch die Gleichungen (4.) gegebenen Werthe ein, so verwandelt sie sich in:

$$\pm H\mathfrak{H} = p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'', \qquad \textbf{(9. b.)}$$

und es ist ihr doppeltes Vorzeichen in jedem besondern Falle der eben angegebenen Regel gemäss zu bestimmen. Findet sich beim Aufsuchen der positiven Werthe H und $\mathfrak{H}$, dass $H = \mathfrak{H}$ ist, so geht die vorige Gleichung über in:

$$\pm H^2 = \pm \mathfrak{H}^2 = p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'', \qquad \textbf{(9. c.)}$$

wobei hinsichtlich des doppelten Vorzeichens immer noch die alte Regel zu beobachten ist. In diesem Falle, wenn nämlich $H = \mathfrak{H}$ ist, ändern sich die Gleichungen (8.) ab in:

$$\left.\begin{array}{l} \pm\mathfrak{p} = p + p'\cos W + p''\cos W', \quad \pm\mathfrak{p}' = p\cos W + p' + p''\cos W'', \quad \pm\mathfrak{p}'' = p\cos W' + p'\cos W'' + p'' \\ \quad\text{und} \\ \pm\mathfrak{C}p = \mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{A}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{p}'', \quad \pm\mathfrak{C}'_1 p' = \mathfrak{A}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{A}'_1\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}''_1\mathfrak{p}'', \quad \pm\mathfrak{C}''_2 p'' = \mathfrak{A}_2\mathfrak{p} + \mathfrak{A}'_2\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}''_2\mathfrak{p}'', \end{array}\right\} \qquad \textbf{(9. d.)}$$

welche, verglichen mit den Gleichungen (7.), zu erkennen geben, dass unter der gemachten Voraussetzung zwischen den Coeffizienten der combinirten Gleichungen genau dieselben Relatio-

nen statt finden, wie zwischen den aus ihnen abgeleiteten Projectionszahlen q, q′, q″ und q, q′, q″. Umgekehrt kann man schliessen, dass H = ℌ ist, so wie zwischen den Coeffizienten der combinirten Gleichungen die in (9. d.) angegebenen Relationen statt finden. Combinirte, eine Ebene darstellende Gleichungen, welche man auf die hier angezeigte Weise dahin gebracht hat, dass für sie die positiv vorausgesetzten Werthe ℌ und H einander gleich werden, und die daraus abgeleiteten Projectionszahlen q, q′, q″ und q, q′, q″ einer und derselben Richtung angehören, d. h. dass beide gleichartige Vorzeichen besitzen, wollen wir dadurch bezeichnen, dass wir sie nächste combinirte Gleichungen nennen. Offenbar verlieren nächste combinirte Gleichungen ihren besondern Character nicht, wenn sie mit einer beliebigen, positiven oder negativen reellen Zahl multiplizirt werden, falls man nur diese Multiplication mit einer Zahl immer an beiden Gleichungen zugleich eintreten lässt. Ist eine Ebene entweder blos durch eine Gleichung in schiefen, oder blos durch eine Gleichung in senkrechten Coordinaten gegeben, und man will zu dieser einen die ihr nächste combinirte Gleichung finden, so erhält man deren Coeffizienten offenbar aus den Gleichungen (9. d.), wenn man in diesen blos die obern Vorzeichen gelten lässt.

89) Hat man die combinirten Gleichungen einer Ebene entweder in der Form derer (1.) oder in der Form derer (3.), und lässt man in derjenigen, welche die schiefen Coordinaten der Puncte in sich trägt, x″ = 0 und x′ = 0 sein, so findet man

$$x = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}},$$

wenn sie die in (1.) angezeigte Form besitzt, und hat sie die in (3.) angezeigte Form, so findet man dasselbe, nur dass an die Stelle von $\mathfrak{P}$ ihr aus der Gleichung (2.) hervorgehender Werth tritt. Dieser besondere Werth x giebt das von der Ebene abgeschnittene Stück der Axe AX zu erkennen mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem es auf der positiven oder negativen Seite dieser Axe liegt; und eben so geben die durch die Gleichungen

$$x' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}'} \quad \text{und} \quad x'' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}''}$$

bestimmten Grössen x′ und x″ die von der Ebene abgeschnittenen Stücke der Axen AX′ und AX″ zu erkennen mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite dieser Axen liegen. Bezeichnen wir die Puncte, in welchen die Ebene von den Axen AX, AX′, AX″ geschnitten wird, durch B, B′, B″, so ist also

(10. a.) $$AB = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}}, \quad AB' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}'}, \quad AB'' = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{p}''},$$

und diese Stücke nehmen das Vorzeichen + oder — an, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite ihrer Axen liegen.

Stellen (x), (x′), (x″) die schiefen Coordinaten der Puncte der Ebene an dem zum ursprünglichen Coordinatensysteme gehörigen Polarsysteme vor, so ist den im vorigen Abschnitte erhaltenen Gleichungen (57. b.) gemäss:

$$u = \mathfrak{S}(x), \quad u' = \mathfrak{S}'_1(x'), \quad u'' = \mathfrak{S}''_2(x'');$$

setzt man aber für u, u′, u″ diese Werthe in diejenige der combinirten Gleichungen, in welcher diese Coordinaten vorkommen, so verwandelt sich die in (1.) vorkommende in:

$$\mathfrak{E}\,p\,(x) + \mathfrak{E}'_1\,p'\,(x') + \mathfrak{E}''_2\,p''\,(x'') = P$$

und die in (3.) vorkommende wird eben so, nur dass an die Stelle von P sein durch die Gleichung (2.) gegebener Werth eintritt. Da diese Gleichung jetzt in Bezug auf das Polarsystem dieselbe ist, was die vorige in Bezug auf das Grundsystem, so lassen sich aus ihr die Stücke der Polaraxen, welche von der Ebene abgeschnitten werden, gerade so herleiten, wie die der Grundaxen aus jener erhalten worden sind; bezeichnet man nämlich die Puncte, in welchen die Ebene von den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ geschnitten wird, bezüglich durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$, so findet man:

$$A\mathfrak{B} = \frac{P}{\mathfrak{E}\,p}\,,\quad A\mathfrak{B}' = \frac{P}{\mathfrak{E}'_1\,p'}\,,\quad A\mathfrak{B}'' = \frac{P}{\mathfrak{E}''_2\,p''}\,, \qquad \text{(10. b.)}$$

und es nehmen diese Stücke das Vorzeichen + oder — an, je nachdem sie auf der positiven oder negativen Seite der Polaraxen liegen, von denen sie abgeschnitten worden sind.

Denkt man sich nun von der Coordinatenspitze A aus eine Gerade senkrecht gegen die Ebene gezogen, welche diese im Puncte S schneidet, so ist AS der Abstand der Ebene von der Coordinatenspitze, und stellt man sich in der Ebene die Geraden SB, SB′, SB″ und $S\mathfrak{B}$, $S\mathfrak{B}'$, $S\mathfrak{B}''$ gezogen vor, so dass die Dreiecke SAB, SAB′, SAB″ und $SA\mathfrak{B}$, $SA\mathfrak{B}'$, $SA\mathfrak{B}''$ entstehen, welche sämmtlich bei S rechtwinklig sind, so lässt sich aus jedem derselben die Grösse des Abstandes AS bestimmen; es ist nämlich:

$$AS = \pm AB\cos BAS = \pm AB'\cos B'AS = \pm AB''\cos B''AS$$
$$= \pm A\mathfrak{B}\cos \mathfrak{B}AS = \pm A\mathfrak{B}'\cos \mathfrak{B}'AS = \pm A\mathfrak{B}''\cos \mathfrak{B}''AS\,,$$

wo von den doppelten Vorzeichen immer dasjenige zu nehmen ist, welches AS zu einer positiven Zahl macht. Nun sind aber die Grössen cos BAS, cos B′AS, cos B″AS und $\cos\mathfrak{B}AS$, $\cos\mathfrak{B}'AS$, $\cos\mathfrak{B}''AS$ stets positive Grössen, weil die Winkel BAS, B′AS, B″AS und $\mathfrak{B}AS$, $\mathfrak{B}'AS$, $\mathfrak{B}''AS$ nie stumpfe werden können, und zugleich sind die drei erstern Kosinuse nichts anders, als die senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung AS an den Grundaxen AX, AX′, AX″ giebt, mit dem Vorzeichen + oder — genommen, je nachdem die Stücke AB, AB′, AB″ auf den positiven oder negativen Seiten dieser Axen liegen, d. h. je nachdem die Gleichungen (10. a.) diese Stücke in positiven oder negativen Zahlen ausdrücken; während die drei andern Kosinuse nichts anders sind, als die senkrechten Projectionsverhältnisse, welche die Richtung AS an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ giebt, mit dem Vorzeichen + oder — genommen, je nachdem die Stücke $A\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{B}'$, $A\mathfrak{B}''$ auf den positiven oder negativen Seiten dieser Polaraxen liegen, d. h. je nachdem die Gleichungen (10. b.) diese Stücke in positiven oder negativen Zahlen geben. Hieraus folgt, dass man AS immer in einer positiven Zahl ausgedrückt erhält, wenn man für AB, AB′, AB″ ihre durch die Gleichungen (10. a.) gegebenen Werthe nnd zugleich für die neben ihnen stehenden Kosinuse die senkrechte Projectionszahl der Richtung AS an den Grundaxen AX, AX′, AX″, oder, wenn man für $A\mathfrak{B}$, $A\mathfrak{B}'$, $A\mathfrak{B}''$ ihre durch die Gleichungen (10. b.) und zugleich für die neben ihnen stehenden Kosinuse die senkrechten Projectionszahlen der Richtung AS an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ setzt. Nun sind aber $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ oder $-\mathfrak{q}$, $-\mathfrak{q}'$, $-\mathfrak{q}''$ die senkrechten Projectionszahlen der Richtung AS an den Axen AX, AX′, AX″, je nachdem die durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ gegebene Richtung der AS gleich oder gegenläufig ist; daher hat man:

$$AS = \pm\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{p}} = \pm\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{q}'}{\mathfrak{p}'} = \pm\mathfrak{P}\frac{\mathfrak{q}''}{\mathfrak{p}''}\,,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4.):

(11. a.) $$AS = \pm \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}},$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere zu nehmen ist, je nachdem die Richtung AS mit der durch q, q′, q″ gegebenen gleich oder gegenläufig ist. Eben so sind den im vorigen Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (56. a.) zur Folge $\mathfrak{C}$q, $\mathfrak{C}'_1$q′, $\mathfrak{C}''_2$q″ die senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung AS an den Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ giebt, je nachdem die Richtung AS der durch q, q′, q″ gegebenen gleich oder gegenläufig ist; daher hat man:

$$AS = \pm P \frac{q}{p} = \pm P \frac{q'}{p'} = \pm P \frac{q''}{p''}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (4):

(11. b.) $$AS = \pm \frac{P}{H},$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere zu nehmen ist, je nachdem die Richtung AS der durch q, q′, q″ gegebenen gleich- oder gegenläufig ist. Da diese Bestimmung des Vorzeichens die analoge von der bei der Gleichung (11. a.) gegebenen ist, so folgt, dass, wenn die Vorzeichen der combinirten Gleichungen gleichartig sind, und in Folge dessen die Projectionszahlen q, q′, q″ und q, q′, q″ auf eine und dieselbe Richtung sich beziehen, man in den beiden Gleichungen (11. a.) und (11. b.) ein und dasselbe Vorzeichen, das obere nämlich oder das untere, zu nehmen hat, um durch beide für AS einen positiven Werth zu erhalten, und dass, wenn man in beiden entweder nur das obere oder nur das untere Vorzeichen nimmt, man aus jeder den Abstand AS mit demselben Vorzeichen + oder — versehen erhält.

Multiplizirt man die Gleichungen (11. a.) und (11. b.) mit einander, so findet man, wenn die combinirten Gleichungen gleichartige Vorzeichen haben:

(11. c.) $$AS^2 = \frac{\mathfrak{P}P}{\mathfrak{H}H},$$

in welcher Gleichung kein doppeltes Vorzeichen mehr erscheint, weil unter der gemachten Voraussetzung von jenen beiden entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen genommen werden dürfen; im Falle die Vorzeichen der combinirten Gleichungen nicht gleichartig wären, müsste aber der einen Seite der Gleichung (11. c.) das Vorzeichen — vorgesetzt werden. Setzt man hierauf in diese letzte Gleichung für $\mathfrak{H}$H dessen in der Gleichung (9. b.) enthaltenen Werth, wie derselbe combinirten Gleichungen mit gleichartigen Vorzeichen zukommt, so nimmt sie die folgende Form an:

(11. d.) $$AS^2 = \frac{\mathfrak{P}P}{\mathfrak{p}p + \mathfrak{p}'p' + \mathfrak{p}''p''},$$

und man sieht leicht ein, dass diese Gleichung wahr bleibt, die Vorzeichen der combinirten Gleichungen mögen gleichartig sein oder nicht. Denn im letztern Falle erhielte man zwar für AS^2 den in der Gleichung (11. c.) angezeigten Werth mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen; weil aber in diesem Falle zugleich auch in der Gleichung (9. b.) das untere Vorzeichen genommen werden müsste, so ergäbe sich für AS^2 immer wieder der in der Gleichung (11. d.) angezeigte Werth.

Die in laufender Nummer geschehenen Auswerthungen setzen in den Stand, die Stellung der Ebene sowohl zu jeder Grundaxe, wie zu jeder Polaraxe des Coordinatensystems festzustellen, wobei man es immer so einrichten kann, dass die durch die Projectionszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ und q, q', q'' gelieferten Richtungen beide mit der von A nach S hinlaufenden zusammen fallen.

90) Aus den Betrachtungen der vorigen Nummer lässt sich ein höchst einfaches Kennzeichen entnehmen, ob combinirte Gleichungen nächste seien und ob sie gleichartige Vorzeichen in sich enthalten oder nicht, welches wir nicht ausser Acht lassen dürfen, da hiervon der leichte und sichere Gebrauch der combinirten Gleichungen im beliebigen Coordinatensystem ganz und gar abhängt. Es hat sich nämlich in der vorigen Nummer herausgestellt, dass combinirte Gleichungen mit gleichartigen Vorzeichen durch $\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}}$ und $\frac{P}{H}$ immer den Abstand der Ebene von der Coordinatenspitze A hergeben und zwar ihn beide Male entweder als positive oder beide Male als negative Grösse in sich tragen, so dass also combinirte Gleichungen mit gleichartigen Vorzeichen unter allen Umständen

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{H}} = \frac{P}{H} \qquad (12.)$$

geben, wobei man sich, der in Nr. 87. getroffenen Anordnung gemäss, unter $\mathfrak{H}$ und H blos die aus den Gleichungen (6.) für diese Grössen sich ergebenden positiven Werthe vorzustellen hat, was nach sich zieht, dass $\mathfrak{P}$ und P in combinirten Gleichungen, deren Vorzeichen gleichartig sind, beide zugleich entweder positive oder negative Grössen bezeichnen. Weil aber bei positiven Werthen $\mathfrak{H}$ und H, wie in Nr. 87. dargethan worden ist, die Grössen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, $\mathfrak{Q}$ nur gleichzeitig mit denen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, $\mathfrak{P}$, so wie die q, q', q'', Q nur gleichzeitig mit denen p, p', p'', P ihr Vorzeichen ändern, so werden die aus den combinirten Gleichungen hergeleiteten Projectionszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ und q, q', q'' so lange einer und derselben Richtung angehören und dem zur Folge die combinirten Gleichungen gleichartige Vorzeichen behalten, als die Werthe $\mathfrak{P}$ und P entweder beide positiv oder beide negativ bleiben, während umgekehrt durch diese zwei Grössen, wenn die eine von ihnen positiv, die andere negativ ist, angezeigt wird, dass die Vorzeichen der combinirten Gleichungen, denen sie angehören, noch ungleichartig sind. Hieraus folgt nun für das Anschreiben der combinirten Gleichungen mit gleichartigen Vorzeichen die folgende Regel:

„Combinirte Gleichungen von der Form (1.) haben gleichartige Vorzeichen, wenn man sie so anschreibt, dass deren eine Seiten $\mathfrak{P}$ und P, welche alle die Glieder in sich fassen, in denen keine der unbestimmten Coordinaten vorkommt, entweder beide positive oder beide negative Werthe haben; sind aber die combinirten Gleichungen von der Form (3.), so hat man dafür zu sorgen, dass dasselbe von den Grössen $\mathfrak{p}x_1 + \mathfrak{p}'x_1' + \mathfrak{p}''x_1''$ und $p u_1 + p' u_1' + p'' u_1''$ gilt.“

Ferner geht aus der Gleichung (12.) hervor, dass nächste combinirte Gleichungen, in welchen $\mathfrak{H} = H$ ist, auch $\mathfrak{P} = P$ haben, und umgehehrt, dass zwei combinirte Gleichungen, in welchen $\mathfrak{P} = P$ ist, auch $\mathfrak{H} = H$ haben, sonach nächste combinirte Gleichungen sind. Hieraus folgt für das Erkennen nächster combinirter Gleichungen die folgende Regel:

„Combinirte Gleichungen von der Form (1.) sind nächste, wenn man bei deren Anschreiben dafür sorgt, dass ihre Seiten $\mathfrak{P}$ und P, welche alle Theile enthalten, die keine ver-

änderliche Coordinate in sich tragen, sowohl der Grösse als dem Vorzeichen nach einander gleich sind; sind aber die combinirten Gleichungen von der Form (3.), so muss dasselbe in Bezug auf die Grössen $\mathfrak{p}\,x_1 + \mathfrak{p}'x'_1 + \mathfrak{p}''x''_1$ und $p\,u_1 + p'u'_1 + p''u''_1$ erzielt werden."

Man sieht also, dass das Gleichartigmachen der Vorzeichen sowohl, wie auch das Verwandeln combinirter Gleichungen in nächste sich immer höchst einfach dadurch bewerkstelligen lässt, dass man eine von beiden mit einer Zahl multiplizirt, die im ersten Falle stets -1 sein kann und im andern Falle sich immer leicht angeben lässt. Auch kann man, wo es Vortheil bringt, das Verwandeln der combinirten Gleichungen in nächste dadurch bewerkstelligen, dass man jede von ihnen mit einer dazu geeigneten Zahl multiplizirt, und es lassen sich auf diese Weise immer unzählig viele Paare angeben.

91) Sind zwei Ebenen durch zwei Paare combinirter Gleichungen gegeben, von welchen das eine Paar entweder in der Form:

(13. a.)
$$\mathfrak{p}_0 x + \mathfrak{p}'_0 x' + \mathfrak{p}''_0 x'' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad p_0 u + p'_0 u' + p''_0 x'' = P_0$$
oder in der:
$$\mathfrak{p}_0(x - x_1) + \mathfrak{p}'_0(x' - x'_1) + \mathfrak{p}''_0(x'' - x''_1) = 0 \quad \text{und} \quad p_0(u - u_1) + p'_0(u' - u'_1) + p''_0(u'' - u''_1) = 0$$

und eben so das andere Paar entweder in der Form:

(13. b.)
$$\mathfrak{p}\,x + \mathfrak{p}'x' + \mathfrak{p}''x'' = \mathfrak{P} \quad \text{und} \quad p\,u + p'u' + p''u'' = P$$
oder in der:
$$\mathfrak{p}(x - x_2) + \mathfrak{p}'(x' - x'_2) + \mathfrak{p}''(x'' - x''_2) = 0 \quad \text{und} \quad p(u - u_2) + p'(u' - u'_2) + p''(u'' - u''_2) = 0$$

aufgestellt sein kann, in welchen x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten irgend eines beliebigen zur einen oder andern Ebene gehörigen Punctes, x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die eines bestimmten Punctes in der ersten Ebene und x_2, x'_2, x''_2 und u_2, u'_2, u''_2 die eines bestimmten Punctes in der zweiten Ebene vorstellen, die übrigen Zeichen aber beliebig gegebene reelle Grössen bedeuten, deren besondere Werthe die besondere Lage der durch obige Gleichungen dargestellten Ebenen an die Hand geben; stellen ferner $\mathfrak{H}_0$, H_0 und $\mathfrak{H}$, H die aus nachstehenden Gleichungen für sie sich ergebenden Werthe vor:

$$p_0^2 + p_0'^2 + p_0''^2 + 2\,p_0 p'_0 \cos W + 2\,p_0 p''_0 \cos W' + 2\,p'_0 p''_0 \cos W'' = H_0^2,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\mathfrak{p}_0^2 + \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}\mathfrak{p}_0'^2 + \frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}\mathfrak{p}_0''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}'_0 + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}''_0 + \left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1} + \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}'_0\mathfrak{p}''_0 = \mathfrak{H}_0^2$$

und

$$p^2 + p'^2 + p''^2 + 2\,p\,p' \cos W + 2\,p\,p'' \cos W' + 2\,p'p'' \cos W'' = H^2,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}\mathfrak{p}'^2 + \frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}\mathfrak{p}''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}'' + \left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1} + \frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'' = \mathfrak{H}^2,$$

welche Gleichungen denen (6.) analog sind; und führen wir überdiess noch die durch folgende Gleichungen bestimmten neuen Grössen ein:

$$\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}_0, \quad \frac{\mathfrak{p}'_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}'_0, \quad \frac{\mathfrak{p}''_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}''_0; \quad \frac{p_0}{H_0} = q_0, \quad \frac{p'_0}{H_0} = q'_0, \quad \frac{p''_0}{H_0} = q''_0$$

und

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}, \quad \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}', \quad \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}''; \quad \frac{p}{H} = q, \quad \frac{p'}{H} = q', \quad \frac{p''}{H} = q'',$$

so sind diese neuen, mit den Grundzeichen $\mathfrak{q}_0$, q_0 und $\mathfrak{q}$, q versehenen Grössen die combinirten Gleichungen mögen gleichartige Vorzeichen besitzen oder nicht, den in Nr. 86. und 87. geschehenen Untersuchungen zur Folge, die senkrechten und schiefen Projectionszahlen einer von den zweien, je nach den Grundzeichen $\mathfrak{q}_0$ und q_0 oder $\mathfrak{q}$ und q auf der ersten oder zweiten Ebene senkrechten Richtung. Weil nun der spitze oder stumpfe Winkel, den zwei Ebenen mit einander machen, dem spitzen oder stumpfen Winkel gleich ist, den die auf ihnen senkrecht stehenden Richtungen mit einander bilden, so ist, wenn θ diesen spitzen oder stumpfen Neigungswinkel bezeichnet, den Gleichungen (9. a. und b.) gemäss:

$$\cos\theta = \mathfrak{q}_0 q + \mathfrak{q}'_0 q' + \mathfrak{q}''_0 q'' \quad \text{und} \quad \cos\theta = \mathfrak{q} q_0 + \mathfrak{q}' q'_0 + \mathfrak{q}'' q''_0, \tag{14. a.}$$

oder wenn man anstatt der hier vorkommenden Projectionszahlen ihre durch die unmittelbar vorangegangenen Gleichungen gegebenen Werthe setzt:

$$\cos\theta = \frac{1}{\mathfrak{H}_0 H}(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'') \quad \text{und} \quad \cos\theta = \frac{1}{\mathfrak{H} H_0}(\mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0), \tag{14. b.}$$

wobei man indessen nicht übersehen darf, dass der Winkel θ in einer der beiden Gleichungen (14. a.) oder (14. b.) der spitze, in der andern Gleichung aber der stumpfe Neigungswinkel werden kann, weil diess lediglich von den zu q, q', q'' und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$, $\mathfrak{q}''_0$ und von den zu q_0, q'_0, q''_0 und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ gehörigen Richtungen abhängt, und jede von diesen unabhängig von den übrigen eine von den zweien sein kann, welche auf der Ebene, aus deren Gleichung ihre Projectionszahlen hergenommen worden sind, senkrecht steht. Multiplizirt man die beiden vorstehenden Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$\pm\cos^2\theta = \frac{1}{\mathfrak{H}_0 H_0 \mathfrak{H} H}(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'')(\mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0), \tag{14. c.}$$

in welcher von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere genommen werden mnss, je nachdem in den beiden Gleichungen (14. b.) θ einen und denselben oder in der einen den spitzen, in der andern den stumpfen Winkel vorzustellen hat, was im Grunde nichts anders sagt, als dass in dieser letzten Gleichung von den doppelten Vorzeichen dasjenige genommen werden muss, wodurch $\cos^2\theta$ zu einer positiven Zahl wird. Wird das doppelte Vorzeichen in diesem letztern Sinne genommen, so verwandelt sich die Gleichung (14. c.), wenn man erwägt, dass der Gleichung (9. b.) zur Folge

$$\pm\mathfrak{H}_0 H_0 = \mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0 \quad \text{und} \quad \pm\mathfrak{H} H = \mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p''$$

ist, und dass in jeder dieser letzten beiden Gleichungen, unabhängig von der andern, das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muss, je nachdem die Projectionszahlen q_0, q'_0, q''_0 und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$, $\mathfrak{q}''_0$ oder die q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ einer und derselben oder gerade entgegengesetzten Richtungen angehören, in jedem Falle gleichmässig in:

$$\cos^2\theta = \frac{(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'')(\mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0)}{(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'')}; \tag{15. a.}$$

denn man findet $\mathfrak{H}_0 H_0 \mathfrak{H} H = (\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'')$, wenn sowohl q_0, q'_0, q''_0 und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$, $\mathfrak{q}''_0$, als auch q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ entweder beide zugleich einerlei oder beide zugleich entgegengesetzte Richtungen in sich tragen, in beiden Fällen aber werden die in den zwei Gleichungen (14. a.) oder (14. b.) erscheinenden Winkel θ dieselben, weshalb man in der Gleichung (14. c.) nur das obere Vorzeichen beibehalten darf; hingegen findet man

$\mathfrak{H}_0 H_0 \mathfrak{H} H = -(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'')$, wenn die einen der angezeigten Projectionszahlen zu einerlei, die andern aber zu gerade entgegengesetzten Richtungen gehören, dann aber wird von den beiden so eben erwähnten, mit θ bezeichneten Winkeln der eine ein spitzer und der andere ein stumpfer, weshalb man in der Gleichung (14. c.) nur das untere Vorzeichen beibehalten darf, so dass man also in jedem Falle immer auf die eine in (15. a.) angegebene Gleichung hingeführt wird.

Sind die Gleichungen für jede Ebene nächste combinirte, wo dann $\mathfrak{H}_0 = H_0$ und $\mathfrak{H} = H$, also auch $H \mathfrak{H}_0 = H_0 \mathfrak{H}$ wird, zugleich aber auch die beiden in der vordern und hintern Gleichung (14. b.) mit θ bezeichneten Winkel einander gleich werden, so folgt aus den zuletzt erwähnten Gleichungen in Verbindung mit dem Umstande, dass jetzt $H \mathfrak{H}_0 = H_0 \mathfrak{H}$ ist:

(15. b.) $$\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'' = p_0 \mathfrak{p} + p'_0 \mathfrak{p}' + p''_0 \mathfrak{p}'',$$

und das Gleichsein dieser Ausdrücke wird Ursache, dass sich die Gleichung (15. a.) in jede der zwei Formen bringen lässt:

(15. c.) $$\cos^2\theta = \frac{(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'')^2}{(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'')} = \frac{(p_0 \mathfrak{p} + p'_0 \mathfrak{p}' + p''_0 \mathfrak{p}'')^2}{(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'')}.$$

Wird $\cos\theta = 0$, so ist θ ein rechter Winkel, und dann stehen die beiden Ebenen senkrecht auf einander. Diess geschieht aber, wenn entweder

(16.) $$\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0 = 0$$

ist, und jede von diesen beiden Gleichungen ist schon in der andern enthalten, wie ein Blick auf die Gleichungen (14. b.) zu erkennen giebt; es trägt daher jede der Bedingungen (16.) das Kennzeichen der senkrechten Stellung beider Ebenen gegen einander vollständig in sich.

Wird $\cos^2\theta = 1$, also $\cos\theta = \pm 1$, so ist θ entweder null oder zweien rechten Winkeln gleich, und in beiden Fällen laufen die zwei durch die Gleichungen (13. a. und b.) dargestellten Ebenen mit einander parallel. Diess geschieht aber im Allgemeinen, der Gleichung (15. a.) zur Folge, wenn

(17. a.) $$(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'') = (\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'')(\mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0)$$

ist, und im Falle die Gleichungen bei jeder Ebene nächste combinirte sind, den Gleichungen (15. c.) gemäss, wenn

(17. b.) $$\left\{\begin{array}{l}(\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'') = (\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'')^2 \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{p}_0 p_0 + \mathfrak{p}'_0 p'_0 + \mathfrak{p}''_0 p''_0)(\mathfrak{p} p + \mathfrak{p}' p' + \mathfrak{p}'' p'') = (\mathfrak{p} p_0 + \mathfrak{p}' p'_0 + \mathfrak{p}'' p''_0)^2\end{array}\right.$$

ist, wo von den letzten beiden Gleichungen eine was die andere sagt. In jeder der Bedingungen (17. a. und b.) ist das Kennzeichen der parallelen Lage zweier durch ihre combinirten Gleichungen gegebener Ebenen enthalten. Auch lässt sich aus ihnen ein anderes einfacheres Verhalten herleiten, welches die Coeffizienten solcher Gleichungen unter sich beobachten müssen, wenn die durch sie dargestellten Ebenen mit einander parallel laufen sollen, zu welchem man jedoch auf viel bequemerm Wege durch folgende Betrachtungen hingeführt wird. Sind nämlich zwei Ebenen parallel unter sich, so sind es auch die auf ihnen senkrecht stehenden Geraden, so wie umgekehrt das Parallelsein dieser Geraden das der Ebenen nach sich zieht; daher ist das Kennzeichen für das Parallelsein dieser Geraden zugleich auch das für das Pa-

rallelsein der beiden Ebenen. Es ist aber schon im vorigen Abschnitte (Nr. 31.) dargethan worden, dass das Kennzeichen paralleler Geraden darin besteht, dass die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen zweier in diesen Geraden liegender Richtungen an den gleichen Axen unter sich stets ein und dasselbe Verhältniss einhalten. Mithin hat man als Kennzeichen der parallelen Lage unserer beiden Ebenen:

$$\mathfrak{q}_0 : \mathfrak{q}_0' : \mathfrak{q}_0'' = \mathfrak{q} : \mathfrak{q}' : \mathfrak{q}'' \quad \text{oder} \quad q_0 : q_0' ; q_0'' = q : q' : q'',$$

welches sich, wenn man an die Stelle der Projectionszahlen ihre oben angegebenen Werthe setzt, auch so geben lässt:

$$\mathfrak{p}_0 : \mathfrak{p}_0' : \mathfrak{p}_0'' = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' \quad \text{oder} \quad p_0 : p_0' : p_0'' = p : p' : p''. \qquad (17.\ c.)$$

Da das Parallelsein der Geraden die Bedingungen (17. c.) nach sich zieht und auch umgekehrt das Dasein dieser Bedingungen das Parallelsein der Geraden zur Folge hat, so gilt das Gleiche auch in Bezug der beiden von uns betrachteten Ebenen.

Es lässt sich aus den Formeln dieser Nummer leicht das allgemeine gegenseitige Verhalten zweier Ebenen aus der Beschaffenheit ihrer sie darstellenden Gleichungen erkennen. Erfüllen nämlich ihre Gleichungen die Bedingung (17. c.) nicht, so schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden; besitzen aber die Coeffizienten der Gleichungen, wodurch die Ebenen gegeben sind, die in (17. c.) ausgesprochene Eigenschaft, so zieht diess nach sich, dass sich zwei reelle Zahlen μ und ν, von denen keine Null ist, angeben lassen von der Art, dass

$$\mathfrak{p}_0 = \nu\mathfrak{p}\,, \quad \mathfrak{p}_0' = \nu\mathfrak{p}'\,, \quad \mathfrak{p}_0'' = \nu\mathfrak{p}'' \quad \text{und} \quad p_0 = \mu p\,, \quad p_0' = \mu p'\,, \quad p_0'' = \mu p''$$

wird, wodurch die Gleichungen (13. a.) der einen Ebene werden:

$$\mathfrak{p}x + \mathfrak{p}'x' + \mathfrak{p}''x'' = \frac{\mathfrak{P}_0}{\nu} \quad \text{und} \quad pu + p'u' + p''u'' = \frac{P_0}{\mu}$$

oder

$$\mathfrak{p}(x - x_1) + \mathfrak{p}'(x' - x_1') + \mathfrak{p}''(x'' - x_1'') = 0 \text{ und } p(u - u_1) + p'(u' - u_1') + p''(u'' - u_1'') = 0,$$

je nachdem sie von der einen oder andern Form waren. Vergleicht man diese mit den Gleichungen (13. b.) der andern Ebene, so sieht man, dass die obern in beiden Fällen auf ihren linken Seiten völlig gleiche Ausdrücke haben; ist daher $\mathfrak{P}_0 = \nu\mathfrak{P}$ oder $P_0 = \mu P$, so werden beide sich nicht schneidende Ebenen durch eine und dieselbe Gleichung dargestellt, und dann liegen sie in einander; ist hingegen $\mathfrak{P}_0 \lesseqgtr \nu\mathfrak{P}$ oder $P_0 \lesseqgtr \mu P$, so kann kein Punct, welcher die Gleichung der einen Ebene wahr macht, zugleich auch die der andern Ebene befriedigen, die beiden sich nicht schneidenden Ebenen liegen sonach in allen ihren Puncten ausser einander. Was die untern Gleichungen der beiden Ebenen betrifft, so finden auch bei ihnen noch ganz die vorigen Kennzeichen statt, nur hat man in ihnen $\mathfrak{P}_0$ durch $\nu(\mathfrak{p}x_1 + \mathfrak{p}'x_1' + \mathfrak{p}''x_1'')$ und P_0 durch $\nu(pu_1 + p'u_1' + p''u_1'')$, so wie $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{p}x_2 + \mathfrak{p}'x_2' + \mathfrak{p}''x_2''$ und P durch $pu_2 + p'u_2' + p''u_2''$ zu ersetzen, so dass das Ineinanderliegen oder Aussereinanderliegen der beiden sich nicht schneidenden Ebenen bei diesen Formen davon abhängt, ob die Ausdrücke

$$\mathfrak{p}(x_1 - x_2) + \mathfrak{p}'(x_1' - x_2') + \mathfrak{p}''(x_1'' - x_2'') \quad \text{und} \quad p(u_1 - u_2) + p'(u_1' - u_2') + p''(u_1'' - u_2'')$$

Null liefern oder nicht.

Uebrigens machen wir am Schlusse dieses Paragraphen noch darauf aufmerksam, dass seine Darstellung einfacher geworden wäre, wenn wir blos nächste combinirte Gleichungen der Ebe-

nen ins Auge gefasst, und darauf seinen Bau gegründet hätten; es wäre indessen auf solche Weise eine Seite der combinirten Gleichungen unberührt geblieben, worüber sich der Rechner volle Rechenschaft muss geben können.

§. 11.

Von der Geraden.

92) Hat man zwei von einander verschiedene Gleichungen entweder von der Form

$$\mathfrak{p}_0 x + \mathfrak{p}'_0 x' + \mathfrak{p}''_0 x'' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} x + \mathfrak{p}' x' + \mathfrak{p}'' x'' = \mathfrak{P}$$

oder von der andern Form

$$p_0 u + p'_0 u' + p''_0 u'' = P_0 \quad \text{und} \quad p u + p' u' + p'' u'' = P,$$

von denen jede einzeln genommen eine Ebene darstellt, vorausgesetzt, dass man sich unter den in ihr vorkommenden unbestimmten Coordinaten x, x', x'' oder u, u', u'' alle diejenigen besondern Werthe denkt, welche sie befriedigen, ohne dass diese Werthe ausser ihr zugleich auch noch irgend einer andern Gleichung zu genügen brauchen; denkt man sich aber im Gegentheile unter x, x', x'' oder u, u', u'' nur solche Werthe, welche zu gleicher Zeit die beiden obigen auf einer Zeile stehenden Gleichungen wahr machen, so hat man nur diejenigen Puncte vor Augen, welche sowohl der einen wie der andern von den beiden durch diese Gleichungen dargestellten Ebenen angehören. Die beiden so aufgefassten Gleichungen stellen mithin die Durchschnittslinie der zwei durch sie einzeln dargestellten Ebenen dar. Weil man aber durch jede Gerade auf unzählig viele Arten zwei von einander verschiedene Ebenen legen kann, deren Durchschnitt sie ist, so sieht man gleich von vorn herein ein, dass sich jede Gerade auf unzählig viele Arten durch zwei auf die beschriebene Art aufzufassende Gleichungen, von denen jede für sich genommen einer Ebene angehört, darstellen lässt. Um die besondere Auffassung zweier Gleichungen, wobei man sich unter den in ihnen vorkommenden unbestimmten Coordinatenzeichen nur den Inbegriff aller derjenigen besondern Werthe vorstellt, wodurch beide Gleichungen zugleich befriedigt werden, auch schon äusserlich wahrnehmbar zu machen, werden wir zwischen sie das Wörtchen **mit** schreiben und sie ein **Gleichungspaar** nennen. So hat man also bei Gleichungen, die so

(18. a.)
$$\begin{cases} \mathfrak{p}_0 x + \mathfrak{p}'_0 x' + \mathfrak{p}''_0 x'' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} x + \mathfrak{p}' x' + \mathfrak{p}'' x'' = \mathfrak{P} \\ \text{oder so} \\ p_0 x + p'_0 u' + p''_0 x'' = P_0 \quad \text{mit} \quad p\,n + p' u' + p'' u'' = P \end{cases}$$

geschrieben werden, unter x, x', x'' oder u, u', u'' nur alle solche besondern Werthe sich zu denken, die beide auf derselben Zeile stehenden Gleichungen gleichzeitig wahr machen, wodurch man dann zu allen den Puncten hingeführt wird, in welchen sich die zwei Ebenen, welche von jenen Gleichungen, wenn man jede für sich unabhängig von der andern auffässt, dargestellt werden, gegenseitig durchdringen. Dabei ist es, nach dem was im vorigen Paragraphen erwiesen worden ist, gestattet, an die Stelle der vorstehenden Gleichungen auch die von der folgenden Form zu setzen:

(18. b.)
$$\begin{cases} \mathfrak{p}_0(x - x_1) + \mathfrak{p}'_0(x' - x'_1) + \mathfrak{p}''_0(x'' - x''_1) = 0 \text{ mit } \mathfrak{p}(x - x_2) + \mathfrak{p}'(x' - x'_2) + \mathfrak{p}''(x'' - x''_2) = 0 \\ \text{oder} \\ p_0(u - u_1) + p'_0(u' - u'_1) + p''_0(u'' - u''_1) = 0 \text{ mit } p(u - u_2) + p'(u' - u'_2) + p''(u'' - u''_2) = 0, \end{cases}$$

wenn nur x_1, x_1', x_1'' und x_2, x_2', x_2'' oder u_1, u_1', u_1'' und u_2, u_2', u_2'' solche bestimmte Zahlen bezeichnen, wodurch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_0 x_1 + \mathfrak{p}_0' x_1' + \mathfrak{p}_0'' x_1'' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} x_2 + \mathfrak{p}' x_2' + \mathfrak{p}'' x_2'' = \mathfrak{P} \\ \text{oder} \\ p_0 u_1 + p_0' u_1' + p_0'' u_1'' = P_0 \quad \text{und} \quad p u_2 + p' u_2' + p'' u_2'' + P \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.\ c.)$$

wahr gemacht werden, oder mit andern Worten, wenn nur x_1, x_1', x_1'' und x_2, x_2', x_2'' oder u_1, u_1', u_1'' und u_2, u_2', u_2'' die Coordinaten solcher Puncte sind, welche den durch die vordern und hintern auf erster oder zweiter Zeile stehenden Gleichungen (18. a.) dargestellten Ebenen angehören. In den Gleichungen (18. b. und c.) kann auch $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, $x_1'' = x_2''$ oder $u_1 = u_2$, $u_1' = u_2'$, $u_1'' = u_2''$ genommen werden, d. h. man kann an die Stelle der zwei Puncte, wovon jeder in einer der beiden Ebenen liegt, auch nur einen setzen, der in ihrem Durchschnitt liegt, und diess werden wir in der Regel bei Gleichungspaaren, wodurch eine Gerade dargestellt wird, voraussetzen.

93) Man kann nach den bekannten Regeln der Algebra aus jedem der in (18. a. oder b.) vorkommenden Gleichungspaare andere Paare ableiten, welche in Bezug auf die in ihnen vorkommenden unbestimmten Grössen x, x', x'' oder u, u', u'' völlig von demselben Inhalte wie die vorigen sind, und daher stets dieselbe Gerade, wie das erste Paar, darstellen. Diess läuft damit auf Eins hinaus, dieselbe Gerade immer als den Durchschnitt von zwei neuen Ebenen anzusehen. Dadurch aber wird es möglich, die einzelnen eine Gerade darstellenden Gleichungen so umzuformen, dass jede von ihnen immer nur zwei von den Coordinaten der dieser Geraden angehörigen Puncte in sich aufnimmt, wodurch ihre Gestalt eine einfachere wird. Eliminirt man nämlich aus den zwei auf erster Zeile stehenden Gleichungen (18. a.) einmal x, ein ander Mal x' und ein drittes Mal x'', oder aus den auf zweiter Zeile stehenden einmal u, ein ander Mal u' und ein drittes Mal u'', so erhält man jedesmal die folgenden drei neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_0' - \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}')\,x' + (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}_0'' - \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}'')\,x'' = \mathfrak{p}\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{P}, \\ (\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_0'\,\mathfrak{p})\,x + (\mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}_0'' - \mathfrak{p}_0'\,\mathfrak{p}'')\,x'' = \mathfrak{p}'\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}_0'\,\mathfrak{P}, \\ (\mathfrak{p}''\,\mathfrak{p}_0 - \mathfrak{p}_0''\,\mathfrak{p})\,x + (\mathfrak{p}''\,\mathfrak{p}_0' - \mathfrak{p}_0''\,\mathfrak{p}')\,x' = \mathfrak{p}''\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}_0''\,\mathfrak{P}, \\ \text{oder} \\ (p\,p_0' - p_0\,p')\,u' + (p\,p_0'' - p_0\,p'')\,u'' = p\,P_0 - p_0\,P, \\ (p'\,p_0 - p_0'\,p)\,u + (p'\,p_0'' - p_0'\,p'')\,u'' = p'\,P_0 - p_0'\,P, \\ (p''\,p_0 - p_0''\,p)\,u + (p''\,p_0' - p_0''\,p')\,u' = p''\,P_0 - p_0''\,P, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19.)$$

von welchen je zwei von denen, die Coordinaten derselben Art in sich enthalten, in Verbindung mit einander wieder dieselbe Gerade wie die frühern Paare darstellen. Die gleiche Behandlung der in (18. b.) stehenden Gleichungspaare, in welchen man $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, $x_1'' = x_2''$ und $u_1 = u_2$, $u_1' = u_2'$, $u_1'' = u_2''$ sein lässt, führt eben so zu je drei Gleichungen, die sich aus den vorigen ergeben, wenn man $x - x_1$, $x' - x_1'$, $x'' - x_1''$ an die Stelle von x, x', x'' oder $u - u_1$, $u' - u_1'$, $u'' - u_1''$ an die Stelle von u, u', u'' und zugleich Null an die Stelle der rechten Seiten in allen den Gleichungen (19.) setzt. Auch kann man diese letztern Formen aus denen (19.) ganz so ableiten, wie in Nr. 86. die Gleichungen (3.) aus denen (1.) hergeleitet worden sind und auch hier weiter unten noch geschehen wird.

Hierbei darf man jedoch nicht übersehen, dass zur Möglichkeit der vorgeschriebenen Eliminationen erfordert wird, dass in keiner der beiden Gleichungen der Coeffizient, welcher der

zu eliminirenden Grösse angehört, null sei, weil man dadurch zu der Einsicht gelangt, dass manchmal zwei von den drei in (19.) aufgestellten Formen einer jeden Art in einander übergehen oder auch eine davon ganz verschwinden kann. Wäre z. B. in den Gleichungen (18. a.) $\mathfrak{p}_0=0$, so reduzirte sich die erste der Gleichungen (19.) auf die vordere in erster Zeile stehende (18. a.), wenn nicht auch $\mathfrak{p}=0$ ist, in welchem Falle sie ganz verloren ginge; wäre aber in jenen Gleichungen noch ausserdem $\mathfrak{p}'_0=0$, so dass die obere vordere eigentlich $\mathfrak{p}''_0\,x''=\mathfrak{P}_0$ wäre, so reduzirten sich die beiden ersten Gleichungen (19.) auf diese eine, wenn nicht etwa auch noch $\mathfrak{p}=0$ oder $\mathfrak{p}'=0$ wäre, wo dann eine derselben völlig verschwinden würde. Hieraus erhellet, dass, wenn man blos zwei von den Gleichungen (19.) den Betrachtungen zu Grund legen will, diess mit Vorsicht geschehen müsse, damit nicht etwa die beiden gewählten Gleichungen nur eine einzige in sich enthalten, in welchem Falle sie die Gerade nicht mehr darzustellen vermöchten.

94) Zuvörderst machen wir nun darauf aufmerksam, dass jedes aus den Gleichungen (19.) entnommene Paar von jeder Art, falls es in der That den Durchschnitt zweier sich schneidender Ebenen in sich trägt oder eine Gerade darstellt, sich jederzeit so umgestalten lässt, dass die zwei allgemeinen Coordinaten, von denen immer nur die eine in jeder Gleichung dieses Paars enthalten ist, einen und denselben von Null verschiedenen Coeffizienten an sich tragen. Stellt nämlich

$$a''x'+a'x''=A \quad \text{mit} \quad b''x+b\,x''=B$$

oder

$$c''u'+c'u''=C \quad \text{mit} \quad d''u+d\,u''=D$$

ein solches den Gleichungen (19.) entnommenes Paar von der einen oder andern Art vor, und ist keiner von den in ihm vorkommenden Coeffizienten a'' und b'' oder c'' und d'', welche bei den zwei unbestimmten Coordinaten stehen, von welchen die eine blos in der vordern und nicht in der hintern, die andere dagegen blos in der hintern und nicht in der vordern Gleichung vorkommt, null, so kann man stets, ohne befürchten zu müssen, die Natur der beiden Gleichungen zu verändern, die vordere, je nachdem man die obern oder untern Gleichungen vor Augen hat, mit b'' oder d'', die hintere mit a'' oder c'' multipliziren, und erhält dann ein Gleichungspaar, welches mit dem vorigen völlig gleichen Inhalt hat, in dem aber, wie verlangt wurde, die zu x' und x oder u' und u gehörigen Coeffizienten einander gleich geworden sind, ohne jedoch null zu sein. Ist aber einer von den beiden Coeffizienten a'' und b'' oder c'' und d'' null, wir wollen annehmen, dass $a''=0$ oder $c''=0$ sei, so verwandeln sich die vordern der vorstehenden Gleichungen in:

$$a'x''=A \quad \text{oder} \quad c'u''=C,$$

und es kann in diesen weder $a'=0$ noch $c'=0$ sein, weil ausserdem diese vordere Gleichung nichts sagend würde und dadurch zu verstehen gäbe, dass unserer Voraussetzung entgegen das obige Gleichungspaar keine Gerade in sich enthält. Setzt man den aus der so geformten vordern Gleichung für x'' oder u'' sich ergebenden Werth in die hintere gleichartige Gleichung ein, so wird diese:

$$b''x=B-\frac{b}{a'}A \quad \text{oder} \quad d''u=D-\frac{d}{c'}C,$$

und es kann auch in diesen weder $b''=0$ noch $d''=0$ sein, weil ausserdem aus dem so eben angegebenen Grunde das Gleichungspaar, unserer Voraussetzung entgegen, keine Gerade in

sich enthielte. Man hat sonach die vorigen Gleichungungspaare jetzt in die:

$$a'x'' = A \quad \text{mit} \quad b''x = B - \frac{b}{a'} A$$

oder

$$c'u'' = C \quad \text{mit} \quad d''u = D - \frac{d}{c'} C$$

verwandelt, in deren einem weder $a' = 0$ noch $b'' = 0$, und in deren anderm weder $c' = 0$ noch $d'' = 0$ sein kann, daher kann man wieder auf die vorige Weise durch Multiplication der vordern Gleichung mit b'' oder d'', je nachdem man das obere oder untere Paar vor Augen hat, der hintern Gleichung mit a' oder c' es dahin bringen, dass die Coeffizienten von x'' und x oder von u'' und u die gleichen werden; es sind aber diese Coordinaten die zwei, wiewohl nicht mehr die gleichen wie vorhin, von denen jede immer nur in einer Gleichung des Paares zum Vorschein kommt, so dass man also wie vorher das gleiche vorgesteckte Ziel erreicht hat. In diesem besondern Falle sind die Coeffizienten derjenigen unbestimmten Coordinate, welche in jeder Gleichung des erhaltenen Paares zum Vorschein kommt, beide zugleich null geworden. Ganz so lässt sich dasselbe Ziel erreichen, wenn entweder $b'' = 0$ oder $d'' = 0$ in dem anfänglich vorhandenen Gleichungspaare wäre, und da nie zu gleicher Zeit $a'' = 0$ und $b'' = 0$ oder $c'' = 0$ und $d'' = 0$ sein kann, weil in diesem Falle, unserer Voraussetzung entgegen, das gegebene Gleichungspaar keine Gerade in sich enthielte, so folgt in der That, dass in allen Fällen, wo das gegebene Gleichungspaar wirklich eine Gerade darstellt, es immer auf die Form gebracht werden kann, wo die zwei allgemeinen Coordinaten, von denen immer nur eine in jeder Gleichung des Paares vorkommt, einerlei Coeffizienten haben, der nie null sein kann.

Dieser Betrachtung gemäss werden wir von jetzt an stets voraussetzen, dass dasjenige Paar von Gleichungen (19.), dem wir die Darstellung von Geraden übertragen, zuvor auf die Form gebracht worden sei, wobei keiner von den Coeffizienten, die in den zwei Gleichungen des Paares verschiedenen unbestimmten Coordinaten angehören, null ist, in welchem Falle man diese beiden Coeffizienten immer einander gleich werden lassen kann. Diese Form des Gleichungspaares hat den Vortheil, dass von ihm nothwendigerweise immer eine Gerade dargestellt wird, denn es liefert, wenn man der dritten Coordinate irgend einen Werth beilegt, für die zwei, deren Coeffizienten einander gleich und von Null verschieden sind, immer völlig bestimmte endliche Werthe, und enthält also ohne Ausnahme eine Reihe von Puncten in sich, die den beiden durch die einzelnen Gleichungen dargestellten Ebenen gemein sind; es stellt sonach die Gerade vor, in welcher sich diese beiden Ebenen schneiden. Durch dieses Mittel erhalten wir demnach aus den Gleichungen (19.) immer Gleichungspaare von einer der drei folgenden Formen, im Falle die Gleichungen schiefe Coordinaten in sich tragen:

$$\left.\begin{array}{lll} p\,x' - p'x = P'' & \text{mit} & p\,x'' - p''x = P', \\ p'x - p\,x' = P'' & \text{mit} & p'x'' - p''x' = P, \\ p''x' - p'x'' = P & \text{mit} & p''x - p\,x'' = P', \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (20.\ a.)$$

und im Falle die Gleichungen senkrechte Coordinaten in sich tragen:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{p}\,u' - \mathfrak{p}'u = \mathfrak{P}'' & \text{mit} & \mathfrak{p}\,u'' - \mathfrak{p}''u = \mathfrak{P}', \\ \mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}\,u' = \mathfrak{P}'' & \text{mit} & \mathfrak{p}'u'' - \mathfrak{p}''u' = \mathfrak{P}, \\ \mathfrak{p}''u' - \mathfrak{p}'u'' = \mathfrak{P} & \text{mit} & \mathfrak{p}''u - \mathfrak{p}\,u'' = \mathfrak{P}', \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (20.\ b.)$$

wo wir die Bezeichnung so gewählt haben, dass die zweiten Formen aus den ersten durch eine Vertauschung der ersten Art, und die dritten aus den ersten durch eine Vertauschung der zweiten Art hervorgehen.

Wird eine Gerade durch eines der in (20. a.) oder (20. b.) aufgestellten Gleichungspaare gegeben, und denkt man sich unter x_1, x'_1, x''_1 oder unter u_1, u'_1, u''_1 die schiefen oder senkrechten Coordinaten von einem bestimmten Puncte der Geraden, so dass also die bestimmten Werthe x_1, x'_1, x''_1, je nachdem die Gerade durch das erste, zweite oder dritte in (20. a.) stehende Gleichungspaar gegeben ist, das Gleichungspaar

(21. a.) $$\left\{\begin{array}{lll} p\,x'_1 - p'x_1 = P'' & \text{mit} & p\,x''_1 - p''x_1 = P' \text{ oder} \\ p'x_1 - p\,x'_1 = P'' & \text{mit} & p'x''_1 - p''x'_1 = P \text{ oder} \\ p''x'_1 - p'x''_1 = P & \text{mit} & p''x_1 - p\,x''_1 = P' \end{array}\right.$$

erfüllen müssen, oder u_1, u'_1, u''_1, je nachdem die Gerade durch das erste, zweite oder dritte in (20. b.) stehende Gleichungspaar gegeben ist, das Gleichungspaar

(21. b.) $$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{p}\,u'_1 - \mathfrak{p}'u_1 = \mathfrak{P}'' & \text{mit} & \mathfrak{p}\,u''_1 - \mathfrak{p}''u_1 = \mathfrak{P}' \text{ oder} \\ \mathfrak{p}'u_1 - \mathfrak{p}\,u'_1 = \mathfrak{P}'' & \text{mit} & \mathfrak{p}'u''_1 - \mathfrak{p}''u'_1 = \mathfrak{P} \text{ oder} \\ \mathfrak{p}''u'_1 - \mathfrak{p}'u''_1 = \mathfrak{P} & \text{mit} & \mathfrak{p}''u_1 - \mathfrak{p}\,u''_1 = \mathfrak{P}' \end{array}\right.$$

wahr machen, so verwandeln sich die Formen (20. a.) und (20. b.), wenn man von denselben die (21. a.) und (21. b.), welche aus ihnen hervorgegangen sind, abzieht, in:

(22. a.) $$\left\{\begin{array}{lll} p\,(x'-x'_1) - p'(x - x_1) = 0 & \text{mit} & p\,(x''-x''_1) - p''(x - x_1) = 0, \\ p'(x - x_1) - p\,(x' - x'_1) = 0 & \text{mit} & p'(x''-x''_1) - p''(x' - x'_1) = 0, \\ p''(x'-x'_1) - p'(x''-x''_1) = 0 & \text{mit} & p''(x - x_1) - p\,(x''-x''_1) = 0, \end{array}\right.$$

wenn das Gleichungspaar schiefe Coordinaten in sich trägt, und in:

(22. b.) $$\left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{p}\,(u'-u'_1) - \mathfrak{p}'(u - u_1) = 0 & \text{mit} & \mathfrak{p}\,(u''-u''_1) - \mathfrak{p}''(u - u_1) = 0, \\ \mathfrak{p}'(u - u_1) - \mathfrak{p}\,(u' - u'_1) = 0 & \text{mit} & \mathfrak{p}'(u''-u''_1) - \mathfrak{p}''(u' - u'_1) = 0, \\ \mathfrak{p}''(u'-u'_1) - \mathfrak{p}'(u''-u''_1) = 0 & \text{mit} & \mathfrak{p}''(u - u_1) - \mathfrak{p}\,(u''-u''_1) = 0, \end{array}\right.$$

wenn das Gleichungspaar senkrechte Coordinaten in sich aufnimmt; und diese neuen Formen (22. a.) oder (22. b.) besitzen wieder die Eigenschaft, dass sich die zweiten und dritten aus den ersten durch eine Vertauschung der ersten und zweiten Art herholen lassen. Was die Aufsuchung der bestimmten Werthe x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 anlangt, so wird man sogleich gewahr, dass man bei jeglicher der in (21. a.) oder (21. b.) vorkommenden Formen denjenigen dieser Werthe, der in den beiden Gleichungen des Paares vorkommt, ohne Ausnahme ganz nach Gefallen wählen kann, und dann immer noch aus diesen Gleichungen für die zwei übrigen völlig bestimmte endliche Werthe erhält. In dem besondern Falle, wo die Gerade durch die Coordinatenspitze hindurch geht, müssen die sie darstellenden Gleichungspaare von solcher Art sein, dass sie durch $x=0$, $x'=0$, $x''=0$ oder $u=0$, $u'=0$, $u''=0$ befriedigt werden, und da man in diesem besondern Falle diesen bestimmten Punct zu dem machen kann, dessen Coordinaten wir vorhin durch x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1 bezeichnet haben, so kann man in diesem Falle den Gleichungen (22. a.) die Form

$px'-p'x=0$ mit $px''-p''x=0$, $p'x-px'=0$ mit $p'x''-p''x'=0$, $p''x'-p'x''=0$ mit $p''x-px''=0$ **(23. a.)**
oder denen (22. b.) die Form
$\mathfrak{p}u'-\mathfrak{p}'u=0$ mit $\mathfrak{p}u''-\mathfrak{p}''u=0$, $\mathfrak{p}'u-\mathfrak{p}u'=0$ mit $\mathfrak{p}'u''-\mathfrak{p}''u'=0$, $\mathfrak{p}''u'-\mathfrak{p}'u''=0$ mit $\mathfrak{p}''u-\mathfrak{p}u''=0$ **(23. b.)**
geben, und eben diese Gestalten nehmen in dem gleichen Falle auch die Gleichungen (20. a.) und (20. b.) an, weil der Umstand, dass diese Gleichungen in der gegenwärtigen Voraussetzung befriedigt werden müssen, wenn man x, x', x'' oder u, u', u'' sämmtlich null sein lässt, nach sich zieht, dass in diesem besondern Falle die Grössen P, P', P'' oder $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ jederzeit verschwinden müssen. Umgekehrt giebt ein Gleichungspaar von einer der in (23. a.) oder (23. b.) angegebenen Formen stets zu erkennen, dass die durch es dargestellte Gerade durch die Coordinatenspitze A hindurchgeht, weil seine beiden Gleichungen jedesmal befriedigt werden, wenn man $x=0$, $x'=0$, $x''=0$ oder $u=0$, $u'=0$, $u''=0$ sein lässt.

95) Jedes von den in (22. a.) oder (22. b.) aufgestellten Gleichungspaaren lässt sich unmittelbar, und deswegen auch jedes der in (20. a.) oder (20. b.) aufgestellten mittelbar auf die Form:

$$x-x_1 : x'-x'_1 : x''-x''_1 = p : p' : p'' \qquad \textbf{(24. a.)}$$

oder auf die Form:

$$u-u_1 : u'-u'_1 : u''-u''_1 = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' \qquad \textbf{(24. b.)}$$

bringen. Da nun x, x', x'' die schiefen oder u, u', u'' die senkrechten Coordinaten von irgend einem beliebigen Puncte der Geraden vorstellen und x_1, x'_1, x''_1 die schiefen oder u_1, u'_1, u''_1 die senkrechten von einem bestimmten Puncte derselben Geraden, so sind, falls diese beiden Puncte von einander verschieden sind, und in einer Entfernung von einander liegen, die nicht null ist und die wir durch r bezeichnen wollen, dem im vorigen Abschnitte (Nr. 14.) Gesagten gemäss, $\frac{x-x_1}{r}$, $\frac{x'-x'_1}{r}$, $\frac{x''-x''_1}{r}$ die schiefen oder $\frac{u-u_1}{r}$, $\frac{u'-u'_1}{r}$, $\frac{u''-u''_1}{r}$ die senkrechten Projectionszahlen der von dem zweiten nach dem ersten Puncte hinzielenden in dieser Geraden liegenden Richtung; bezeichnet man daher diese Projectionszahlen, wenn es die schiefen sind, durch q, q', q'' und durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, wenn es die senkrechten sind, so geht aus den Gleichungen (24. a.) und (24. b.) hervor, dass

$$q : q' : q'' = p : p' : p'' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q} : \mathfrak{q}' : \mathfrak{q}'' = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' \qquad \textbf{(25.)}$$

ist. Es geben sonach die Coeffizienten von einem, in einer der Formen (20.) oder (22.) gegebenen Gleichungspaare die Verhältnisse an die Hand, welche die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen von einer Richtung, die mit der durch diese Formen gegebenen Geraden zusammenfällt, unter sich einhalten, und da der erste Punct eben so gut auf der einen wie auf der andern Seite vom zweiten Puncte liegen kann, so sieht man schon zum Voraus ein, dass die Richtung, worauf sich diese Projectionszahlen beziehen, sowohl die eine wie die andere von den zwei gegenläufigen, mit der Geraden parallelen sein kann. Umgekehrt geht hieraus auch hervor, dass man zu dem, eine Gerade von bekannter Richtung darstellenden Gleichungspaare gelangt, wenn man in die Formen (20. a.) oder (22. a.) für p, p', p'' drei Zahlen setzt, die sich zu einander verhalten wie die schiefen Projectionszahlen der bekannten Richtung, oder in die Formen (20. b.) oder (22. b.) für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ drei Zahlen, die sich zu einander verhalten wie die senkrechten Projectionszahlen der bekannten Richtung.

Im vorigen Abschnitte (Nr. 32.) haben wir gezeigt, wie sich die schiefen sowohl als die senkrechten Projectionszahlen einer Richtung finden lassen, wenn man die Verhältnisse kennt, welche diese Projectionszahlen unter sich einhalten, wir können sonach aus den Coeffizienten eines, in einer der genannten Formen gegebenen Gleichungspaares die Projectionszahlen der in der Geraden, welche durch dieses Gleichungspaar dargestellt wird, liegenden Richtung finden, womit dann diese Richtung selbst gefunden ist. Sucht man nämlich nach Anleitung der im vorigen Abschnitte gegebenen Gleichungen (55. a.) und (55. b.) aus den Coeffizienten p, p', p'' oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ des gegebenen Gleichungspaars die Zahl H oder $\mathfrak{H}$ von der Beschaffenheit auf, dass

(26. a.)
$$\left\{\begin{array}{l} p^2+p'^2+p''^2+2pp'\cos W+2pp''\cos W'+2p'p''\cos W''=H^2 \\ \text{oder} \\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\mathfrak{p}^2+\frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}\mathfrak{p}'^2+\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}\mathfrak{p}''^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}'+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}''+\left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1}+\frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''=\mathfrak{H}^2. \end{array}\right.$$

ist, so hat man den dort gegebenen Erörterungen gemäss:

(26. b.)
$$q=\frac{p}{H}, \quad q'=\frac{p'}{H}, \quad q''=\frac{p''}{H} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{q}'=\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{q}''=\frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}}.$$

Aus den Gleichungen (26. a.) ergeben sich für H oder $\mathfrak{H}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe, in deren Folge man auch aus den Gleichungen (26. b.) für q, q', q'' oder $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ zwei Reihen von Werthen erhält, von welchen die der einen Reihe denen der andern Reihe gleich und entgegengesetzt sind, wodurch man eben auf die beiden gegenläufigen in der Geraden liegenden Richtungen hingeführt wird.

96) Alles bisher Gesagte bleibt ebenmässig wahr, die Gerade mag blos durch ein Gleichungspaar, in welchem schiefe Coordinaten vorkommen, oder blos durch ein Gleichungspaar, in dem senkrechte Coordinaten vorkommen, oder auch durch zwei Gleichungspaare gegeben sein, von denen das eine schiefe, das andere senkrechte Coordinaten der Puncte in sich trägt. Von jetzt an werden wir uns aber die Gerade stets durch zwei Gleichungspaare, von denen das eine schiefe, das andere senkrechte Coordinaten der Puncte in sich aufnimmt, gegeben vorstellen und diess dadurch andeuten, dass wir sagen, die Gerade sei durch combinirte Gleichungspaare gegeben, wobei wir immer voraussetzen, dass jedes der beiden combinirten Gleichungspaare auf eine der in (20.) oder (22.) niedergelegten Formen gebracht worden sei, weil man nur so sicher sein kann, dass durch sie in der That eine Gerade dargestellt wird. Die Coeffizienten von solchen combinirten Gleichungspaaren stehen in einer gewissen Abhängigkeit von einander, die wir jetzt näher kennen lernen wollen. Da jedes einzelne von zwei combinirten Gleichungspaaren eine und dieselbe Gerade darstellt, so muss man, wenn man aus dem einen die schiefen Projectionszahlen q, q', q'' mittelst der vordern Gleichungen (26. b.) für einen der zwei durch die obere Gleichung (26. a.) gegebenen Werthe von H, und aus der andern die senkrechten Projectionszahlen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ mittelst der hintern Gleichungen (26. b.) für einen der zwei durch die untere Gleichung (26. a.) gegebenen Werthe von $\mathfrak{H}$ aufsucht, nothwendig in beiden Fällen auf eine in der Geraden liegende oder doch mit ihr parallele Richtung hingeführt werden, aber diese beiden Richtungen werden eben sowohl parallele und gleichläufige, als parallele und gegenläufige werden können. Im ersten Falle, wo die gefundenen Projectionszahlen q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ einer und derselben Richtung angehören, findet zwischen ihnen die Richtungsgleichung

$$q\mathfrak{q}+q'\mathfrak{q}'+q''\mathfrak{q}''=1$$

statt, welche, wenn man an die Stelle der Projectionszahlen ihre durch die Gleichung (26. b.) gegebenen Werthe setzt, sich verwandelt in:

$$H\mathfrak{H}=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}'+p''\mathfrak{p}''; \qquad \textbf{(27. a.)}$$

im andern Falle, wo die Projectionszahlen q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ parallelen aber gegenläufigen Richtungen angehören, entsprechen dann die q, q', q'' und die $-\mathfrak{q}$, $-\mathfrak{q}'$, $-\mathfrak{q}''$ oder auch die $-q$, $-q'$, $-q''$ und die $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ einer und derselben Richtung, weshalb die Richtungsgleichung in diesen beiden Fällen

$$q\mathfrak{q}+q'\mathfrak{q}'+q''\mathfrak{q}''=-1$$

giebt, woraus man mit Zuziehung der Gleichungen (26. b.) findet:

$$-H\mathfrak{H}=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}'+p''\mathfrak{p}''. \qquad \textbf{(27. b.)}$$

Im ersten Falle, wo die Gleichung (27. a.) statt hat, ist den im ersten Abschnitte erwiesenen Gleichungen (12.) und (47. a.) zur Folge:

$$\mathfrak{q}=q+q'\cos W+q''\cos W', \quad \mathfrak{q}'=q\cos W+q'+q''\cos W'', \quad \mathfrak{q}''=q\cos W'+q'\cos W''+q''$$

und

$$\mathfrak{C}q=\mathfrak{A}\mathfrak{q}+\mathfrak{A}'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{q}'', \quad \mathfrak{C}_1'q'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_1'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{q}'', \quad \mathfrak{C}_2''q''=\mathfrak{A}_2\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_2'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{q}'',$$

welche mit Zuziehung der in (26. b.) gegebenen Relationen die nachstehende Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}=p+p'\cos W+p''\cos W', \quad \frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}'=p\cos W+p'+p''\cos W'', \quad \frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}''=p\cos W'+p'\cos W''+p'' \\ \text{und} \\ \frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}p=\mathfrak{A}\mathfrak{p}+\mathfrak{A}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{p}'', \quad \frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}_1'p'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_1'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{p}'', \quad \frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}_2''p''=\mathfrak{A}_2\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_2'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{p}'';\end{array}\right\} \qquad \textbf{(28. a.)}$$

im andern Falle hingegen, wo die Gleichung (27. b.) statt hat, treten an die Stelle der Gleichungen (28. a.) andere, die man aus diesen erhält, wenn man $-q$, $-q'$, $-q''$ für q, q', q'' oder $-\mathfrak{q}$, $-\mathfrak{q}'$, $-\mathfrak{q}''$ für $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ setzt; diese werden daher:

$$-\mathfrak{q}=q+q'\cos W+q''\cos W', \quad -\mathfrak{q}'=q\cos W+q'+q''\cos W'', \quad -\mathfrak{q}''=q\cos W'+q'\cos W''+q''$$

und

$$-\mathfrak{C}q=\mathfrak{A}\mathfrak{q}+\mathfrak{A}'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{q}'', \quad -\mathfrak{C}_1'q'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_1'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{q}'', \quad -\mathfrak{C}_2''q''=\mathfrak{A}_2\mathfrak{q}+\mathfrak{A}_2'\mathfrak{q}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{q}'',$$

woraus man mittelst der Gleichungen (26. b.) findet:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}=p+p'\cos W+p''\cos W', \quad -\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}'=p\cos W+p'+p''\cos W'', \quad -\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}''=p\cos W'+p'\cos W''+p'' \\ \text{und} \\ -\frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}p=\mathfrak{A}\mathfrak{p}+\mathfrak{A}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}''\mathfrak{p}'', \quad -\frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}_1'p'=\mathfrak{A}_1\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_1'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_1''\mathfrak{p}'', \quad -\frac{\mathfrak{H}}{H}\mathfrak{C}_2''p''=\mathfrak{A}_2\mathfrak{p}+\mathfrak{A}_2'\mathfrak{p}'+\mathfrak{A}_2''\mathfrak{p}''.\end{array}\right\} \qquad \textbf{(28. b.)}$$

Die Gleichungen (28. a.) und (28. b.) enthalten die Relationen in sich, welche zwischen den Coefficienten von combinirten Gleichungspaaren statt haben und zeigen, dass das Vorzeichen ihrer einen Seiten unbestimmt bleibt, wie auch bei denen (27. a.) und (27. b.).

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen auf den einen Seiten der vorstehenden Gleichungen ist da, wo man sich der combinirten Gleichungspaare zur Darstellung einer Geraden bedient, lästig,

weshalb wir, wie schon bei der Ebene geschehen ist, die Mittel, sie aus dem Weg zu räumen, angeben werden. Machen wir es uns zur Regel, von den zweierlei für H oder $\mathfrak{H}$ aus den Gleichungen (26. a.) sich ergebenden Werthen stets nur denjenigen zu nehmen, der durch eine positive Zahl ausgesprochen wird, so nehmen die mittelst der Gleichungen (26. b.) für q, q′, q″ und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ aufgesuchten Zahlen bezüglich dasselbe Vorzeichen in sich auf, wie die, wodurch die Coeffizienten p, p′, p″ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ gegeben sind. Da man nun die Vorzeichen der sämmtlichen Glieder in einem Gleichungspaare unbeschadet seines Inhalts umkehren darf, und diess nichts anders heisst, als den sämmtlichen Coeffizienten dieses Gleichungspaares mit entgegengesetzten Vorzeichen geschriebene Zahlen unterlegen, so hat man es dadurch in seiner Gewalt den Coeffizienten der zwei combinirten Gleichungspaare gleich von vorn herein Zahlen mit solchen Vorzeichen unterzulegen, dass für diese Coeffizienten stets nur die Relationen (27. a.) und (28. a.) Gültigkeit behalten und darum die (27. b.) und (28. b.) ganz überflüssig werden; denn man wird auf den ersten Blick gewahr, dass da, wo die letztern Relationen zwischen den Coeffizienten der combinirten Gleichungspaare statt finden sollten, man nur den Zahlen, wodurch die Coeffizienten des einen Gleichungspaares dargestellt werden, das umgekehrte Vorzeichen geben darf, um zu machen, dass die so abgeänderten Gleichungspaare den erstern Relationen genügen, und dass die aus ihnen mittelst der positiven Werthe von H und $\mathfrak{H}$ abgeleiteten Projectionszahlen einer und derselben Richtung angehören. Sind die Coeffizienten von combinirten Gleichungspaaren auf die Weise angeordnet, dass zwischen ihnen die Relationen (27. a.) und (28. a.) statt haben, so bezeichnen wir diess dadurch, dass wir sagen, die Vorzeichen der combinirten Gleichungspaare seien gleichartig. Um combinirte Gleichungspaare mit gleichartigen Vorzeichen in diesem Zustande zu erhalten, darf man nur darauf sehen, mit ihnen keine andern allgebraisch erlaubten Veränderungen als solche vorzunehmen, wodurch alle einzelnen Glieder in den beiden combinirten Gleichungspaaren entweder ihr voriges Vorzeichen beihehalten oder alle zugleich ihr Vorzeichen umkehren, eine Vorschrift, die unter allen Umständen leicht einzuhalten ist.

Hat man combinirte Gleichungspaare mit gleichartigen Vorzeichen vor Augen, auf welche die Gleichungen (28. a.) unmittelbar anwendbar sind, wenn man nur die positiven, aus den Gleichungen (26. a.) sich ergebenden Zahlen H und $\mathfrak{H}$ zulässt, wie wir in der Folge immer voraussetzen werden, so hält es nicht schwer, einzusehen, dass diese combinirten Gleichungspaare durch andere von demselben Inhalte ersetzt werden können, welche ebenfalls gleichartige Vorzeichen besitzen, aber noch ausserdem die Eigenthümlichkeit an sich tragen, dass die aus ihnen hergeleiteten Gleichungen (28. a.) die Factoren $\frac{H}{\mathfrak{H}}$ und $\frac{\mathfrak{H}}{H}$ nicht mehr in sich enthalten, oder, was dasselbe sagt, dass in Bezug auf sie $H = \mathfrak{H}$ wird. Der blose Hinblick auf die Gleichungen (28. a.) zeigt schon, dass dieser Umstand herbeigeführt wird, wenn man die beiden Gleichungen desjenigen Paares, in welchem die Coeffizienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ auftreten, mit $\frac{H}{\mathfrak{H}}$ multiplizirt, oder mit $\frac{\mathfrak{H}}{H}$ die zwei Gleichungen desjenigen Paares, in welchem die Coeffizienten p, p′, p″ auftreten, und so liesse sich derselbe Zweck noch auf unendlich viele andere Arten erreichen. Solche combinirte Gleichungspaare mit gleichartigen Vorzeichen, deren Coeffizienten auch noch die Eigenschaft besitzen, dass sie $H = \mathfrak{H}$ werden lassen, wollen wir nächste combinirte Gleichungspaare nennen. Bei nächsten combinirten Gleichungspaaren verwandelt

sich die Gleichung (27. a.) in:

$$H^2 = \mathfrak{H}^2 = p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}''. \qquad (29.\ a.)$$

Aus den Gleichungen (28. a.) geht unmittelbar hervor, dass die beiden combinirten Gleichungspaare nur dann nächste sind, für welche $H = \mathfrak{H}$ wird, wenn ihre Coeffizienten die Eigenschaft besitzen, dass entweder

$$\mathfrak{p} = p + p'\cos W + p''\cos W', \quad \mathfrak{p}' = p\cos W + p' + p''\cos W'', \quad \mathfrak{p}'' = p\cos W' + p'\cos W'' + p''$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mathfrak{C}p = \mathfrak{A}\mathfrak{p} + \mathfrak{A}'\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{p}'', \quad \mathfrak{C}_1'p' = \mathfrak{A}_1\mathfrak{p} + \mathfrak{A}_1'\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}_1''\mathfrak{p}'', \quad \mathfrak{C}_2''p'' = \mathfrak{A}_2\mathfrak{p} + \mathfrak{A}_2'\mathfrak{p}' + \mathfrak{A}_2''\mathfrak{p}'', \qquad (29.\ b.)$$

ist, und umgekehrt finden diese Gleichungen zwischen den Coeffizienten der combinirten Gleichungspaare statt, so oft sie nächste sind; man kann also da, wo ursprünglich nur ein combinirtes, die Gerade darstellendes Gleichungspaar gegeben ist, sich das nächste dadurch verschaffen, dass man dessen Coeffizienten nach Vorschrift der Gleichungen (29. b.) aufsucht, und dann diese beiden Paare stets unverändert beibehält, oder stets gleichzeitig alle in ihnen vorkommenden Gleichungen mit einer und derselben Zahl multiplizirt.

97) Wir haben oben in Nr. 90. ein sehr einfaches Kennzeichen aufgefunden, aus welchem sich beurtheilen lässt, ob die eine Ebene darstellenden combinirten Gleichungen gleichartige Vorzeichen besitzen und nächste sind oder nicht, welches Kennzeichen zugleich im Verneinungsfalle das Mittel an die Hand gab, die vermisste Eigenschaft den combinirten Gleichungen mitzutheilen; jetzt wollen wir in ähnlicher Weise das Kennzeichen aufstellen, aus welchem sich beurtheilen lässt, ob die eine Gerade darstellenden combinirten Gleichungspaare gleichartige Vorzeichen besitzen und nächste seien oder nicht, welches eben so zugleich ein Mittel an die Hand geben wird, solchen Gleichungspaaren die fraglichen Eigenschaften mitzutheilen, da wo sie sie nicht besitzen. Zu diesem Ende gehen wir von der Betrachtung der zwei nachstehenden eine Ebene darstellenden Gleichungen

$$\mathfrak{p}(x - x_1) + \mathfrak{p}'(x' - x_1') + \mathfrak{p}''(x'' - x_1'') = 0 \text{ und } p(u - u_1) + p'(u' - u_1') + p''(u'' - u_1'') = 0 \qquad (30.)$$

aus, in welchen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und p, p', p'' die Coeffizienten vorstellen, welche in den beiden combinirten Gleichungspaaren von einer der Formen (20.) oder (22.), wodurch die Gerade dargestellt wird, vorkommen, x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' aber die schiefen und senkrechten Coordinaten von einem bestimmten in dieser Geraden liegenden Puncte. Jede dieser beiden Gleichungen stellt eine Ebene dar, und zwar die vordere eine solche, welche senkrecht auf der Richtung steht, deren senkrechte Projectionszahlen sich verhalten, wie die Zahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, die hintere eine solche, welche senkrecht auf der Richtung steht, deren schiefe Projectionszahlen sich wie die Zahlen p, p', p'' verhalten. Da nun die Zahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und p, p', p'', weil sie die Coeffizienten von einem der Gleichungspaare sind, wodurch die Gerade dargestellt wird, immer zu einer der zwei gegenläufigen Richtungen hinführen, welche in dieser Geraden liegen, so folgt, dass die durch die zwei Gleichungen (30.) dargestellten Ebenen beide senkrecht auf der durch die combinirten Gleichungspaare dargestellten Geraden stehen, und da diese Ebenen überdiess einen Punct mit einander gemein haben, wenn, wie wir vorausgesetzt haben, x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' die schiefen und senkrechten Coordinaten von einem und demselben Puncte der Geraden sind, so stellen die Gleichnngen (30.) eine und dieselbe Ebene dar, sind also combinirte Gleichungen dieser einen Ebene. Weil aber die combinirten Gleichungspaare der Geraden und die combinirten Gleichungen (30.) der Ebene mittelst der hier völlig die gleichen

Zahlen p, p′, p″ und 𝔭, 𝔭′, 𝔭″ enthaltenden Gleichungen (6.) und (26. a.) zu einerlei Werthen H und 𝔋 führen und gleiche Werthe H und 𝔋 den Gleichungen (4.) und (26. b.) zur Folge wieder in beiden Fällen zu denselben entweder gleich- oder gegenläufigen Richtungen hinführen, so folgt ferner, dass die combinirten Gleichungspaare der Geraden und die aus ihnen entnommenen combinirten Gleichungen der Ebene gleichzeitig nächste sind oder nicht, so wie auch, dass sie gleichzeitig gleichartige Vorzeichen besitzen oder nicht; es sind also die für combinirte, eine Ebene darstellende Gleichungen erhaltenen Kennzeichen, mit deren Hilfe man beurtheilen kann, ob diese gleichartige Vorzeichen besitzen und ob sie nächste seien oder nicht, wenn man sie auf die Gleichungen (30.) in Anwendung bringt, zugleich auch die den combinirten, eine Gerade darstellenden Gleichungspaaren angehörigen Kennzeichen. Da wir nun in Nr. 90. gesehen haben, dass combinirte Gleichungen einer Ebene von der in (1.) angegebenen Form gleichartige Vorzeichen haben, wenn die Grössen 𝔓 und P Zahlen mit einerlei Vorzeichen in sich tragen, und dass solche Gleichungen nächste sind, wenn 𝔓 = P ist, positive Werthe H und 𝔋 vorausgesetzt, und da in den Gleichungen (30.) die Ausdrücke

$$\mathfrak{p}\, x_1 + \mathfrak{p}' x_1' + \mathfrak{p}'' x_1'' \quad \text{und} \quad p\, u_1 + p' u_1' + p'' u_1''$$

dasselbe vorstellen, was in den Gleichungen (1.) die Grössen 𝔓 und P, so sind die in (30.) stehenden combinirten Gleichungen und eben so auch die combinirten Gleichungspaare einer Geraden, aus welchen die Gleichungen (30.) herstammen, mit gleichartigen Vorzeichen versehen, wenn die vorstehenden Ausdrücke Zahlen mit einerlei Vorzeichen in sich tragen, und jene combinirten Gleichungen oder die combinirten Gleichungspaare, aus denen sie ihren Ursprung genommen haben, sind nächste, wenn die vorstehenden Ausdrücke einander gleich sind, immer vorausgesetzt, dass man sich unter H und 𝔋 nur ihre positiven Werthe vorstellt. Umgekehrt lässt sich aus diesen Kennzeichen das Mittel entnehmen, wie man combinirte Gleichungspaare in nächste umwandeln oder deren Vorzeichen gleichartig machen könne, wenn sie diese Eigenschaft nicht schon besitzen, da es immer erlaubt ist, die Grössen 𝔭, 𝔭′, 𝔭″ oder die p, p′, p″ mit einer und derselben Zahl zu multipliciren, weil diess bei jedem einzelnen der beiden Gleichungspaare gestattet ist, aus denen sie entnommen sind, und man daher immer zuvor jedes von diesen Paaren für sich mit einer beliebigen Zahl multipliciren kann.

Das hier mitgetheilte Kennzeichen setzt indessen voraus, dass die Gleichungspaare, wodurch die Gerade dargestellt wird, in einer der in (22. a.) und (22. b.) mitgetheilten Formen gegeben seien, und dass die Coordinaten x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'', welche in dem einen und dem andern dieser Paare vorkommen, einem und demselben bestimmten Puncte der Geraden angehören. Ist die Gerade durch Gleichungspaare von einer andern Form gegeben, so muss man diese Form erst in jene überführen, um auf sie das obige Kennzeichen in Anwendung bringen zu können.

98) Das Verhalten einer Geraden zu einer Ebene im Allgemeinen kann ein dreifaches sein. Es wird nämlich die Ebene von der Geraden entweder nur in einem einzigen Puncte geschnitten; oder die Gerade läuft mit der Ebene parallel, in welchem Falle beide keinen in endlicher Ferne liegenden Punct mit einander gemein haben; oder endlich die Gerade liegt in der Ebene, wo dann alle Puncte der Geraden zugleich auch Puncte der Ebene sind. Wir wollen nun sehen, wie sich dieses dreifache Verhalten einer Geraden zu einer Ebene aus den Gleichungen entnehmen lässt, durch welche die Ebene und die Gerade dargestellt werden; es sei daher eine Ebene durch die combinirten Gleichungen:

$$\mathfrak{p}_0 x + \mathfrak{p}_0' x' + \mathfrak{p}_0'' x'' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad p_0 u + p_0' u' + p_0'' u'' = P_0 \qquad \textbf{(31. a.)}$$

und eine Gerade durch die combinirten Gleichungspaare:

$$\left.\begin{array}{l} p x' - p' x = P'' \quad \text{mit} \quad p x'' - p'' x = P' \\ \text{und} \\ \mathfrak{p} u' - \mathfrak{p}' u = \mathfrak{P}'' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} u'' - \mathfrak{p}'' u = \mathfrak{P}' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(31. b.)}$$

gegeben, welche letzteren beide von der ersten in (20. a.) und (20. b.) niedergelegten Form sind, so wird die Untersuchung, welches von dem so eben angegebenen dreifachen Verhalten zwischen dieser Ebene und dieser Geraden statt finde, von der Aufsuchung der besondern Werthe ausgehen müssen, welche, für x, x', x'' oder u, u', u'' gesetzt, gleichzeitig die Gleichung der Ebene und das Gleichungspaar der Geraden, worin diese Coordinaten vorkommen, befriedigen, denn nur Coordinaten, welche diese beiderlei Gleichungen wahr machen, gehören solchen Puncten an, die die Ebene und die Gerade mit einander gemein haben. Nun geht aus der Form des obern Gleichungspaares, in welchem den Betrachtungen der Nr. 94. gemäss p nie Null sein kann, hervor, dass sich zu jedem endlichen Werth, den man für x setzen mag, ein völlig bestimmter und endlicher Werth sowohl für x' wie für x'' angeben lasse; und eben so geht aus der Form des zweiten Gleichungspaares, in welchem nie $\mathfrak{p} = 0$ sein kann, hervor, dass sich zu jedem endlichen Werth, den man für u setzen mag, ein völlig bestimmter endlicher Werth sowohl für u' wie für u'' auffinden lasse. Es lassen sich demnach so viele besondere Puncte der durch obige Gleichungspaare dargestellten Geraden erhalten, als man für x und u besondere Werthe annimmt, und man kann auf diesem Wege nach und nach alle einzelnen Puncte der Geraden sich vor Augen legen, wenn man sich unter x und u eine Succession von allen den Werthen vorstellt, die diese Grössen möglicherweise annehmen können. Ein solches Bild von allen Puncten der Geraden geben sowohl die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{P'' + p' x}{p} \quad \text{und} \quad x'' = \dfrac{P' + p'' x}{p} \\ \text{als die} \\ u' = \dfrac{\mathfrak{P}'' + \mathfrak{p}' u}{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad u'' = \dfrac{\mathfrak{P}' + \mathfrak{p}'' u}{\mathfrak{p}}, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(32. a.)}$$

wenn man sich auf den rechten Seiten dieser Gleichungen x oder u alle ihre möglichen Werthe nach und nach durchlaufend denkt. Setzt man diese für x' und x'' oder für u' und u'' aus dem für x oder u sich ergebenden Werthe in die entsprechende der Ebene zugehörige Gleichung (31. a.), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} x(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'') = p\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}_0' P'' - \mathfrak{p}_0'' P' \\ \text{und} \\ u(p_0 \mathfrak{p} + p_0' \mathfrak{p}' + p_0'' \mathfrak{p}'') = \mathfrak{p}\,P_0 - p_0' \mathfrak{P}'' - p_0'' \mathfrak{P}', \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(32. b.)}$$

und der hieraus bestimmbare Werth von x und u liefert in Verbindung mit den dazu gehörigen x', x'' und u', u'', wie sie aus dem von x und u durch die Gleichungen (32. a.) gefunden werden, die Coordinaten solcher Puncte, welche der Ebene und der Geraden gleichzeitig angehören. Es ist aber aus der Lehre von den Gleichungen bekannt, dass die (32. b.) nur dann für x oder u einen einzigen völlig bestimmten und endlichen Werth liefern, wenn

$$\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'' \gtrless 0 \quad \text{oder} \quad p_0 \mathfrak{p} + p_0' \mathfrak{p}' + p_0'' \mathfrak{p}'' \gtrless 0 \qquad \textbf{(33. a.)}$$

ist; jede dieser beiden Ungleichungen, wovon die eine Folge der andern ist, wenn die Gleichungen der Ebene und die Gleichungspaare der Geraden combinirte sind, giebt daher zu erkennen, dass die durch die Gleichungen (31. a.) dargestellte Ebene und die durch die Gleichungspaare (31. b.) dargestellte Gerade in einem einzigen Puncte sich schneiden. Ist hingegen

(33. b.) $\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'' = 0 \text{ und zugleich } p\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}'_0 P'' - \mathfrak{p}''_0 P' = 0 \\ \text{oder} \\ p_0 \mathfrak{p} + p'_0 \mathfrak{p}' + p''_0 \mathfrak{p}'' = 0 \text{ und zugleich } \mathfrak{p}\, P_0 - p'_0 \mathfrak{P}'' - p''_0 \mathfrak{P}' = 0, \end{array}\right.$

von denen wieder die einen zu einander gehörigen Folgen von den andern sind, wenn die Gleichungen der Ebene und die Gleichungspaare der Geraden combinirte sind, so genügt jeder Werth von x oder u den Gleichungen (32. b.), und in Folge dessen genügt auch jeder aus den Gleichungen (32. a.) zu erhaltende Punct der Geraden den Gleichungen (31. a.) der Ebene; es ist daher jeder Punct der Geraden zugleich auch ein Punct der Ebene, und somit trägt jedes der in (33. b.) enthaltenen Bedingungspaare das Kennzeichen in sich, dass die durch die Gleichungspaare (31. b.) dargestellte Gerade in der durch die Gleichungen (31. a.) dargestellten Ebene liegt. Ist endlich

(33. c.) $\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p'' = 0 \text{ und zugleich } p\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}'_0 P'' - \mathfrak{p}''_0 P' \lesseqgtr 0 \\ \text{oder} \\ p_0 \mathfrak{p} + p'_0 \mathfrak{p}' + p''_0 \mathfrak{p}'' = 0 \text{ und zugleich } \mathfrak{p}\, P_0 - p'_0 \mathfrak{P}'' - p''_0 \mathfrak{P}' \lesseqgtr 0, \end{array}\right.$

von welchen Bedingungen das eine Paar wieder schon in dem andern Paar enthalten ist, wenn die Gleichungen der Ebene und die Gleichungspaare der Geraden combinirte sind, so werden die Gleichungen (32. b.) durch keine Werthe x oder u von endlicher Grösse befriedigt; die Gerade hat daher keinen in endlicher Ferne liegenden Punct mit der Ebene gemein, mithin enthalten die Bedingungspaare (33. c.) das Kennzeichen in sich, dass die durch die Gleichungspaare (31. b.) dargestellte Gerade mit der durch die Gleichungen (31. a.) dargestellten Ebene parallel läuft.

Wir haben in Nr. 94. für die in (20. a.) und (20. b.) aufgestellten Formen eine solche Bezeichnungsweise eingeführt, dass sich die zweiten Formen aus den ersten, sowohl bei denen, die schiefe Coordinaten in sich enthalten, wie bei denen, die senkrechte Coordinaten in sich tragen, durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung der ersten Art ergeben, und die dritten aus den ersten durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung der zweiten Art; aus dieser Bezeichnungsweise aber fliesst als nothwendige Folge, dass da, wo das erste in (31. b.) die Gerade darstellende Gleichungspaar, anstatt in der ersten Form gegeben zu sein, in der zweiten oder in der dritten Form gegeben wäre, man die diesem Falle entsprechenden Kennzeichen aus denen (33. a. bis c.) einfach dadurch ableiten kann, dass man in ihnen an den Accenten von p, p', p'' und P, P', P'' eine Vertauschung der ersten oder zweiten Art vornimmt, und diese Vertauschung müsste mit den Accenten der Grössen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$ vorgenommen werden, wenn das zweite die Gerade darstellende Gleichungspaar, anstatt in der ersten, in der zweiten oder dritten Form gegeben wäre. Hierbei verdient bemerkt zu werden, dass eine solche Vertauschung zugleich auch die gleiche an den Accenten von $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}'_0$, $\mathfrak{p}''_0$ oder p_0, p'_0, p''_0 verlangt, weil jene Vertauschung zugleich auch immer die gleiche an den Accenten der Coordinaten nach sich zieht, den jedesmaligen Gleichungen (32. a.)

zur Folge. Eben deswegen ändern sich die Ausdrücke $\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}'_0 p' + \mathfrak{p}''_0 p''$ und $p_0 \mathfrak{p} + p'_0 \mathfrak{p}' + p''_0 \mathfrak{p}''$ durch eine solche Vertauschung nicht, wohl aber die $p\,\mathfrak{P}_0 - \mathfrak{p}'_0 P'' - \mathfrak{p}''_0 P'$ und $\mathfrak{p}\,P_0 - p'_0 \mathfrak{P}'' - p''_0 \mathfrak{P}'$.

Wäre die Gerade nicht durch Gleichungspaare von der ersten in (20. a.) und (20. b.) enthaltenen Form, sondern von der ersten in (22. a.) und (22. b.) enthaltenen Form gegeben, so würden sich die diesen Formen entsprechenden Kennzeichen aus denen (33. a. bis c.) dadurch ergeben, dass man für P'' und P' oder für $\mathfrak{P}''$ und $\mathfrak{P}'$ ihre aus den ersten Formen (21. a.) oder (21. b.) entnommenen Werthe setzt, und aus den so erhaltenen Kennzeichen würden sich leicht die herholen lassen, welche den Fällen entsprechen, wo das eine oder andere Gleichungspaar der zweiten oder dritten von den in (22. a.) oder (22. b.) stehenden Formen angehört, wenn man an den Accenten der Grössen p, p', p'' und x_1, x'_1, x''_1 oder der Grössen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und u_1, u'_1, u''_1 eine Vertauschung der ersten oder zweiten Art vornimmt, da sich durch dieselbe Vertauschung die zweiten oder dritten in (22. a.) und (22. b.) enthaltenen Formen aus den ersten herholen lassen. Auch müssten in die Kennzeichen (33. a. bis c.) für $\mathfrak{P}_0$ und P_0 ihre nach Anleitung der Gleichungen (2.) zu bestimmenden Ausdrücke, (wobei man anstatt der Grundzeichen $\mathfrak{p}$ und p die $\mathfrak{p}_0$ und p_0 setzen, und auch die Coordinaten des bestimmten der Ebene angehörigen Punctes, um diesen nicht mit dem in den Gleichungspaaren der Geraden vorkommenden zu verwechseln, durch x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 bezeichnen könnte), gesetzt werden, wenn die Ebene nicht durch Gleichungen von der in (1.) mitgetheilten, sondern von der in (3.) vorkommenden Form dargestellt würde. Alle diese Veränderungen sind indessen von solcher Einfachheit, dass man ihnen nicht noch eine besondere Aufmerksamkeit zu schenken braucht, da sie immer auf der Stelle da, wo sie nöthig werden, ins Werk gesetzt werden können.

99) Will man aus den combinirten Gleichungen, wodurch eine Ebene dargestellt wird, und aus den combinirten Gleichungspaaren, wodurch eine Gerade dargestellt wird, die Grösse der Neigung finden, welche zwischen dieser Geraden und dieser Ebene statt findet, so kann diess immer leicht in folgender Weise geschehen. Nehmen wir an, die Ebene und die Gerade seien durch Gleichungen von der in (31. a.) und (31. b.) vorkommenden Form gegeben, und bezeichnen wir durch $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$, $\mathfrak{q}''_0$ die senkrechten Projectionszahlen derjenigen auf der Ebene senkrechten Richtung, welche sich aus den Coeffizienten $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}'_0$, $\mathfrak{p}''_0$ der vordern Gleichung (31. a.) auf die oben angezeigte Weise durch die Gleichungen (4.) und (6.) mittelst eines bestimmten Werths von $\mathfrak{H}_0$ herholen lässt, und eben so durch q_0, q'_0, q''_0 die schiefen Projectionszahlen derjenigen auf der Ebene senkrechten Richtung, welche sich aus den Coeffizienten p_0, p'_0, p''_0 der hintern Gleichung (31. a.) auf dieselbe Weise mittelst eines bestimmten Werthes H_0 herholen lässt; bezeichnen wir in ähnlicher Weise durch q, q', q'' oder $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen der in der Geraden liegenden Richtungen, welche sich aus den Coeffizienten p, p', p'' oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ des obern oder untern in (31. b.) enthaltenen Gleichungspaars der Geraden auf die oben angezeigte Weise mittelst der Gleichungen (26. a.) und (26. b.) bestimmen lassen für irgend zwei bestimmte Werthe H und $\mathfrak{H}$: so ist in Folge der Gleichungen (4.) und (6.):

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}_0\,, \quad \dfrac{\mathfrak{p}'_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}'_0\,, \quad \dfrac{\mathfrak{p}''_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}''_0 \quad \text{und} \quad \dfrac{p_0}{H_0} = q_0\,, \quad \dfrac{p'_0}{H_0} = q'_0\,, \quad \dfrac{p''_0}{H_0} = q''_0 \\
p_0^2 + p'^2_0 + p''^2_0 + 2\,p_0\,p'_0 \cos W + 2\,p_0\,p''_0 \cos W' + 2\,p'_0\,p''_0 \cos W'' = H_0^2 \\
\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{p}_0^2 + \dfrac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}\,\mathfrak{p}'^2_0 + \dfrac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}\,\mathfrak{p}''^2_0 + \left(\dfrac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \dfrac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}'_0 + \left(\dfrac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} + \dfrac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}''_0 + \left(\dfrac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1} + \dfrac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)\mathfrak{p}'_0\mathfrak{p}''_0 = \mathfrak{H}_0^2,
\end{array}\right\} \cdots\cdot \quad \textbf{(34. a.)}$$

und zufolge der Gleichungen (26. a.) und (26. b.) ist:

(34. b.) $$\begin{cases} q=\frac{p}{H}, \quad q'=\frac{p'}{H}, \quad q''=\frac{p''}{H} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{q}'=\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}}, \quad \mathfrak{q}''=\frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}}, \\ p^2+p'^2+p''^2+2pp'\cos W+2pp''\cos W'+2p'p''\cos W''=H^2, \\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\mathfrak{p}^2+\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{E}_1'}\mathfrak{p}'^2+\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{E}_2''}\mathfrak{p}''^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}_1'}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}'+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}''+\left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{E}_1'}+\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}'\mathfrak{p}''=\mathfrak{H}^2, \end{cases}$$

Jede der durch $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$ und q_0, q_0', q_0'' erhaltenen Richtungen kann sowohl die eine, wie die andere der beiden auf der Ebene senkrechten sein, je nachdem man für $\mathfrak{H}_0$ und H_0 seinen einen oder andern Werth genommen hat, und eben so kann jede der durch q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ erhaltenen Richtungen sowohl die eine, wie die andere der beiden in der Geraden liegenden sein, je nachdem man für H und $\mathfrak{H}$ seinen einen oder andern Werth genommen hat; indessen giebt jede der beiden auf der Ebene senkrechten Richtungen mit jeder der beiden in der Geraden liegenden, doch immer nur entweder den spitzen oder stumpfen Winkel, den die Gerade, welche durch die Gleichungspaare gegeben ist, mit der Geraden bildet, welche senkrecht auf der durch die Gleichungen gegebenen Ebene steht und einen Punct mit jener gemein hat; bezeichnet man daher diesen spitzen oder stumpfen Winkel durch θ, so hat man in jedem Falle den im ersten Abschnitt gegebenen Gleichungen (9. a. und b.) gemäss:

(35. a.) $$\cos\theta=q\mathfrak{q}_0+q'\mathfrak{q}_0'+q''\mathfrak{q}_0'' \quad \text{und} \quad \cos\theta=\mathfrak{q}q_0+\mathfrak{q}'q_0'+\mathfrak{q}''q_0''$$

oder, wenn man an die Stelle der Projectionszahlen ihre durch die auf erster Zeile stehenden Gleichungen (34. a.) und (34. b.) gegebenen Werthe setzt:

(35. b.) $$H\mathfrak{H}_0\cos\theta=p\mathfrak{p}_0+p'\mathfrak{p}_0'+p''\mathfrak{p}_0'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}H_0\cos\theta=\mathfrak{p}p_0+\mathfrak{p}'p_0'+\mathfrak{p}''p_0'',$$

und es kann in jeder dieser Gleichungen für sich θ eben sowohl den spitzen wie den stumpfen der eben angegebenen Winkel vorstellen müssen, je nachdem man aus ihnen für $\cos\theta$ eine positive oder negative Zahl auffindet. Multiplicirt man die letzten beiden auf derselben Zeile stehenden Gleichungen mit einander, so geben sie:

(35. c.) $$\pm H\mathfrak{H}H_0\mathfrak{H}_0\cos^2\theta=(p\mathfrak{p}_0+p'\mathfrak{p}_0'+p''\mathfrak{p}_0'')(\mathfrak{p}p_0+\mathfrak{p}'p_0'+\mathfrak{p}''p_0''),$$

in welchen von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere genommen werden muss, je nachdem in den beiden Gleichungen (35. b.) θ einen und denselben Winkel, oder in der einen den spitzen und in der andern den stumpfen vorzustellen hat, was im Grunde nichts anders sagt, als dass in dieser letzten Gleichung von den doppelten Vorzeichen dasjenige genommen werden muss, wodurch $\cos^2\theta$ eine positive Grösse wird.

Nimmt man für $\mathfrak{H}_0$ und H_0 sowohl, als für H und $\mathfrak{H}$ nur ihre positiven Werthe, so ist der Gleichung (9. b.) gemäss

$$\pm\mathfrak{H}_0H_0=p_0\mathfrak{p}_0+p_0'\mathfrak{p}_0'+p_0''\mathfrak{p}_0''$$

und den Gleichungen (27. a. und b.) gemäss

$$\pm H\mathfrak{H}=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}'+p''\mathfrak{p}'',$$

und man hat das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen, je nachdem p_0, p_0', p_0'' und $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_0'$, $\mathfrak{p}_0''$ oder p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ zu gleich- oder gegenläufigen Richtungen gehören, woraus folgt, dass

$$\pm\mathfrak{H}_0H_0\mathfrak{H}H=(p_0\mathfrak{p}_0+p_0'\mathfrak{p}_0'+p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}'+p''\mathfrak{p}'')$$

ist, und dass in dieser Gleichung das obere Vorzeichen zu nehmen ist, wenn sowohl q_0, q_0', q_0'' und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$, als q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ entweder beide Male zu einerlei oder beide Male zu gegenläufigen Richtungen führen, dass hingegen das untere Vorzeichen in ihr gesetzt werden muss, wenn die einen von diesen Projectionszahlen gleichläufige, und die andern gegenläufige Richtungen in sich aufnehmen. Da nun in dem einen Falle die beiden in den Gleichungen (35. a.) mit θ bezeichneten Winkel dieselben, im andern Falle aber Nebenwinkel sind, und in den gleichen Fällen das obere oder untere Vorzeichen in der Gleichung (35. c.) zu stehen kommt, so wird diese, wenn man in sie für $\mathfrak{H}_0 H_0 \mathfrak{H} H$ seinen oben angegebenen Werth einsetzt, in jedem Falle:

$$\cos^2\theta = \frac{(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\,\mathfrak{p}_0' + p''\,\mathfrak{p}_0'')(\mathfrak{p}\,p_0 + \mathfrak{p}'p_0' + \mathfrak{p}''p_0'')}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')}\,. \qquad \text{(36. a.)}$$

Sind sowohl die combinirten Gleichungen der Ebene, als die combinirten Gleichungspaare der Geraden nächste, für welche man den obigen Betrachtungen zur Folge sowohl $H_0 = \mathfrak{H}_0$, als $H = \mathfrak{H}$ hat, so wird

$$p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'',$$

wie sich aus den Gleichungen (35. b.) ergiebt, weil in diesem Falle $H\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H} H_0$ ist und zugleich θ in ihnen beiden einen und denselben entweder spitzen oder stumpfen Winkel vorstellt; deshalb kann die Gleichung (36. a.), wenn die in (31. a.) sowohl als in (31. b.) gegebenen Gleichungen nächste sind, auch in jeder der zwei nachstehenden Formen geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\theta = \frac{(p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'')^2}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')} \\ \text{oder}\quad &\\ &\cos^2\theta = \frac{(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}_0' + p''\mathfrak{p}_0'')^2}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')}\,. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots \text{(36. b.)}$$

Hat man den Winkel θ, den eine von den beiden in der Geraden liegenden Richtungen mit einer von den beiden auf der Ebene senkrechten Richtungen bildet, gefunden, so erhält man daraus leicht den spitzen Neigungswinkel, der zwischen der Geraden und der Ebene statt findet; dieser spitze Neigungswinkel ist nämlich stets der positive Unterschied zwischen θ und einem rechten Winkel, wobei man den Winkel θ, wenn er spitz ist, vom rechten Winkel, hingegen den rechten Winkel von θ abzuziehen hat, wenn dieser letztere Winkel stumpf ist.

Wird $\cos\theta = 0$, welches geschieht, wenn entweder

$$p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}_0' + p''\mathfrak{p}_0'' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}\,p_0 + \mathfrak{p}'p_0' + \mathfrak{p}''p_0'' = 0 \qquad \text{(37.)}$$

ist, so ist θ ein rechter Winkel, so wie umgekehrt die Bedingungen (37.) nothwendig erfüllt sein müssen, wenn θ ein rechter Winkel ist; daher enthält jede der Bedingungen (37.) das Kennzeichen in sich, dass die durch die Gleichungspaare gegebene Gerade senkrecht auf der Geraden steht, die senkrecht gegen die durch die Gleichungen gegebene Ebene gestellt ist, oder dass die durch die Gleichungspaare (31. b.) gegebene Gerade entweder parallel mit der durch die Gleichungen (31. a.) gegebenen Ebene läuft oder in ihr liegt, was mit den (33. b. und c.) gefundenen Bedingungen im Einklang steht.

Wird $\cos^2\theta = 1$ oder $\cos\theta = \pm 1$, so ist θ entweder null oder zweien Rechten gleich; in beiden Fällen läuft aber die durch die Gleichungspaare gegebene Gerade parallel mit jeder von den zwei Richtungen, welche senkrecht auf der durch die Gleichungen gegebenen Ebene stehen, und steht mithin selber senkrecht auf dieser Ebene; daher hat man als allgemeines

Kennzeichen, dass die durch die Gleichungen (31. a.) gegebene Ebene und die durch die Gleichungspaare (31. b.) gegebene Gerade senkrecht auf einander stehen:

(38. a.) $$(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0 + p''_0\mathfrak{p}''_0)(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'') = (p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}' + p''_0\mathfrak{p}'')(p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0 + p''\mathfrak{p}''_0),$$

welches bei lauter nächsten Gleichungen und Gleichungspaaren

(38. b.) $$(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0 + p''_0\mathfrak{p}''_0)(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'') = (p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}' + p''_0\mathfrak{p}'')^2$$

oder auch

(38. c.) $$(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0 + p''_0\mathfrak{p}''_0)(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'') = (p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0 + p''\mathfrak{p}''_0)^2$$

wird. Dieses Kennzeichen kann man auch in der ungleich einfachern Form:

(39.) $$\mathfrak{p}_0 : \mathfrak{p}'_0 : \mathfrak{p}''_0 = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' \quad \text{oder} \quad p_0 : p'_0 : p''_0 = p : p' : p''$$

aufstellen, welches sich leicht aus den auf erster Zeile stehenden Gleichungen (34. a.) und (34. b.) herleiten lässt. Auch lassen sich die Formen (38.) und (39.), wiewohl nicht ohne einige Schwierigkeit, in einander überführen.

Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass alle in dieser Nummer erhaltenen Formeln völlig die gleichen bleiben, die Ebene mag durch die combinirten Gleichungen von der Form (1.) oder (3.) gegeben sein, und die Gerade mag durch combinirte Gleichungspaare von irgend einer der drei in (20. a.) und (20. b.) oder von irgend einer der drei in (22. a.) und (22. b.) stehenden Formen gegeben sein, so dass also die vorstehenden Winkelbestimmungen stets völlig die gleichen bleiben, in welcher der angezeigten Formen auch die Gleichungen der Ebene und der Geraden genommen sein mögen, was für den ununterbrochenen Gang bei solchen Bestimmungen von grosser Bedeutung ist.

100) Zwei von einander verschiedene Gerade können sich entweder in einem Puncte schneiden und dann liegen beide in einer und derselben Ebene, oder es lässt sich in endlicher Ferne zwar kein Punct angeben, der beiden gemein wäre, aber es liegen demungeachtet beide in einer und derselben Ebene, in welchem Falle sie mit einander parallel laufen, oder endlich, es liegen beide nicht in einer und derselben Ebene, wo sie dann weder sich schneiden, noch mit einander parallel laufen können. Wir wollen nun sehen, wie sich dieses dreifache Verhalten zweier Geraden gegen einander aus den Gleichungspaaren, wodurch diese Geraden gegeben werden, erkennen lässt; es sei daher die eine Gerade durch die combinirten Gleichungspaare

(40. a.) $$\cdots\cdots\cdots \left\{ \begin{array}{l} p_0 x' - p'_0 x = P''_0 \quad \text{mit} \quad p_0 x'' - p''_0 x = P'_0 \\ \text{und} \\ \mathfrak{p}_0 u' - \mathfrak{p}'_0 u = \mathfrak{P}''_0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}_0 u'' - \mathfrak{p}''_0 u = \mathfrak{P}'_0 \end{array} \right.$$

und die andere Gerade durch die

(40. b.) $$\cdots\cdots\cdots \left\{ \begin{array}{l} p x' - p' x = P'' \quad \text{mit} \quad p x'' - p'' x = P' \\ \text{und} \\ \mathfrak{p} u' - \mathfrak{p}' u = \mathfrak{P}'' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} u'' - \mathfrak{p}'' u = \mathfrak{P}' \end{array} \right.$$

gegeben, welche sämmtlich von der ersten der drei in (20. a.) und (20. b.) aufgestellten Form sind, so wird die Untersuchung, welches von den so eben angegebenen dreifachen Verhalten zwischen den beiden gegebenen Geraden obwaltet, von der Aufsuchung der besondern Werthe ausgehen müssen, welche für x, x', x'' oder u, u', u'' gesetzt gleichzeitig den

Gleichungspaaren der beiden Geraden genügen, in denen sie vorkommen, da nur Coordinaten, welche gleichzeitig die beiderlei Gleichungspaare wahr machen, solchen Puncten angehören können, in denen sich die beiden Geraden schneiden. Aus den Gleichungspaaren der ersten Geraden findet man:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{P''_0 + p'_0 x}{p_0} \quad \text{und} \quad x'' = \dfrac{P'_0 + p''_0 x}{p_0} \\ \text{und} \\ u' = \dfrac{\mathfrak{P}''_0 + \mathfrak{p}'_0 u}{\mathfrak{p}_0} \quad \text{und} \quad u'' = \dfrac{\mathfrak{P}'_0 + \mathfrak{p}''_0 u}{\mathfrak{p}_0}, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (41.\ a.)$$

und eben so findet man aus den Gleichungspaaren der andern Geraden:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{P'' + p' x}{p} \quad \text{und} \quad x'' = \dfrac{P' + p'' x}{p} \\ \text{und} \\ u' = \dfrac{\mathfrak{P}'' + \mathfrak{p}' u}{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad u'' = \dfrac{\mathfrak{P}' + \mathfrak{p}'' x}{\mathfrak{p}}, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (41.\ b.)$$

wobei man insbesondere auf den Umstand sein Augenmerk hin zu richten hat, dass da die Formen, in welchen die Gleichungspaare (40. a. und b.) gegeben sind, nie gestatten, dass eine von den Grössen p_0, $\mathfrak{p}_0$, p, $\mathfrak{p}$ null ist, man für alle die auf den linken Seiten der Gleichungen (41. a. und b.) stehenden Coordinaten stets völlig bestimmte und endliche Werthe erhalten werde, welche endliche Werthe man auch den auf ihren rechten Seiten befindlichen Coordinaten x und u beilegen mag. Sollen nun beide Gerade einen Punct mit einander gemein haben, so muss sich ein Werth für x oder u angeben lassen, welcher für x' und x'' oder für u' und u'' den Gleichungen (41. a.) zur Folge Werthe giebt, die zugleich auch die Gleichungen (40. b.) wahr machen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die für diesen Werth von x oder u aus den Gleichungen (41. b.) sich ergebenden Werthe von x' und x'' oder u' und u'' müssen zugleich auch die Gleichungen (40. a.) wahr machen. Setzt man aber die Werthe von x', x'' oder u', u'' aus den Gleichungen (41. a.) in die (40. b.) oder aus denen (41. b.) in die (40. a.), so findet man im einen wie im andern Falle:

$$\left.\begin{array}{l} (p\,p'_0 - p_0\,p')\,x = p_0\,P'' - p\,P''_0 \quad \text{und} \quad (p\,p''_0 - p''\,p_0)\,x = p_0\,P' - p\,P'_0 \\ \text{so wie} \\ (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'_0 - \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}')\,u = \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{P}'' - \mathfrak{p}\,\mathfrak{P}''_0 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}''_0 - \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{p}'')\,u = \mathfrak{p}_0\,\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}\,\mathfrak{P}'_0, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (42.\ a.)$$

und es müssten die beiden auf einerlei Zeile stehenden Gleichungen gleichzeitig durch den fraglichen Werth x oder u wahr gemacht werden. Sollen sich aber diese beiden Gleichungen nicht widersprechen und dadurch die Unmöglichkeit eines Durchschnittspunctes der beiden Geraden an den Tag legen, so müssen beide x oder u auf dieselbe Weise bestimmen, welches nur dann der Fall ist, wenn

$$\left.\begin{array}{l} (p\,p''_0 - p''\,p_0)\,(p_0\,P'' - p\,P''_0) = (p\,p'_0 - p'\,p_0)\,(p_0\,P' - p\,P'_0) \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}''_0 - \mathfrak{p}''\,\mathfrak{p}_0)\,(\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{P}'' - \mathfrak{p}\,\mathfrak{P}''_0) = (\mathfrak{p}\,\mathfrak{p}'_0 - \mathfrak{p}'\,\mathfrak{p}_0)\,(\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}\,\mathfrak{P}'_0) \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (42.\ b.)$$

ist.

Erfüllen die Gleichungspaare (40. a. und b.), wodurch die beiden Geraden dargestellt werden, die Bedingungen (42. b.) nicht, so haben diese Geraden weder in endlicher noch in unendlicher Ferne einen Punct mit einander gemein und liegen daher nicht in einer und

derselben Ebene; erfüllen aber jene Gleichungspaare diese Bedingungen, so lässt sich aus den auf einer Zeile stehenden beiden Gleichungen (42. a.) für x oder u ein und derselbe Werth herholen, zu dem hierauf die Gleichungen (41. a. oder b.) die zugehörigen Werthe x', x'' oder u', u'' finden lassen, von denen dann die x, x', x'' oder die u, u', u'' einen Durchschnittspunct der beiden Geraden an die Hand geben, welcher in endlicher Ferne liegt, wenn alle drei Coordinaten endliche Werthe annehmen, hingegen von der Coordinatenspitze sich unendlich weit entfernt, so wie eine von diesen drei Coordinaten einen unendlich grossen Werth erhält, und in jedem dieser Fälle liegen die beiden Geraden in einer und derselben Ebene.

Da, wo die Bedingungen (42. b.) von den gegebenen Gleichungspaare erfüllt werden, und dadurch das Dasein eines Durchnittspunctes der beiden Geraden in endlicher oder in unendlicher Ferne zu erkennen geben, können die diesem Durchschnittspuncte entsprechenden Coordinatenwerthe in sehr verschiedenen Formen sich kund geben, welche näher zu kennen dem analytischen Geometer in vielen Fällen Noth thut, weswegen wir sie einzeln durchgehen werden:

I. Ist von den Factoren

(43. a.) $p p_0'' - p_0 p''$ und $p p_0' - p_0 p'$

oder von denen

$\mathfrak{p} \mathfrak{p}_0'' - \mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{p} \mathfrak{p}_0' - \mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}'$

weder der eine noch der andere null, so erhält man zunächst für x oder u aus den Gleichungen (42. a.) und sodann für x', x'' oder u', u'' aus den Gleichungen (41. a.) und (41. b.) je zwei Werthe von völlig bestimmter und endlicher Grösse, welche einander gleich werden, wenn die Bedingungen (42. b.) durch die gegebenen Gleichungspaare erfüllt sind, und dann auf einen Durchschnittspunct der beiden Geraden hinführen, der in einem endlichen Abstande von der Coordinatenspitze an einer bestimmten Stelle des Raumes liegt.

II. Sind aber die beiden auf einer Zeile stehenden Factoren (43. a.) gleichzeitig null, wo dann die Bedingung (42. b.) von selber sich erfüllt, und ist von den Factoren

(43. b.) $p_0 P'' - p P_0''$ und $p_0 P' - p P_0'$

oder

$\mathfrak{p}_0 \mathfrak{P}'' - \mathfrak{p} \mathfrak{P}_0''$ und $\mathfrak{p}_0 \mathfrak{P}' - \mathfrak{p} \mathfrak{P}_0'$

keiner null, so können die Gleichungen (42. a.) nur für solche Werthe von x oder u bestehen, deren Grösse alles Maass überschreitet; ein so unendlich gross gedachter Werth von x oder u befriedigt indessen immer gleichzeitig die auf einer Zeile stehenden beiden Gleichungen und führt zu einem Durchschnittspuncte der beiden Geraden hin, der in einem unendlich grossen Abstande von der Coordinatenspitze liegt, weshalb unter solchen Umständen beide Gerade parallel mit einander laufen.

III. Ist hingegen, während die beiden auf einer Zeile stehenden Factoren (43. a.) gleichzeitig null sind, zugleich auch einer von den auf derselben Zeile stehenden Factoren (43. b.) null, während der andere einen von Null verschiedenen Werth behält, so wird eine von den Gleichungen (42. a.) durch jeden Werth von x oder u befriedigt, während die andere auf derselben Zeile stehende nur durch einen unendlich grossen Werth von x oder u zufrieden gestellt wird, welcher letztere dann auch zugleich als der erstern Gleichung genügend anzusehen ist, und wieder auf einen unendlich weit entfernten Durchschnittspunct der beiden Geraden, d. h. auf deren parallele Lage hinweist.

IV. Ist ferner, während die beiden auf einer Zeile stehenden Factoren (43. a.) gleichzeitig null sind, zugleich auch jeder von den auf einer Zeile stehenden Factoren (43. b.), die Projectionszahlen von derselben Art in sich tragen, null, so wird jede der auf einer Zeile stehenden Gleichungen (42. a.) von derselben Art durch jeden Werth von x oder u befriedigt; man findet daher jeden Punct der einen Geraden zugleich auch als einen Punct der andern Geraden, und diess zeigt an, dass in diesem Falle die beiden Geraden in einander liegen.

V. Noch kann der Fall eintreten, dass von den auf einer Zeile stehenden Factoren (43. a.) nur der eine, nicht aber auch der andere null wird, und dieser Umstand giebt da, wo er vorkommt, wieder einen Durchschnittspunct der beiden Geraden in endlicher Ferne zu erkennen, vorausgesetzt, dass die gegebenen Gleichungspaare der zwei Geraden der Bedingung (42. b.) genügen; denn ist z. B.

$$p p_0'' - p_0 p'' = 0 \quad \text{und nicht} \quad p p_0' - p_0 p' = 0,$$

so verlangt das Bestehen derjenigen Bedingung (42. b.), in welcher die schiefen Projectionszahlen vorkommen, dass

$$p_0 P' - p P_0' = 0$$

sei, dann aber wird die zweite der auf erster Zeile stehenden Gleichungen (42. a.) durch jeden Werth von x befriedigt, während die erste auf derselben Zeile stehende Gleichung (42. a.) für x einen völlig bestimmten Werth von endlicher Grösse liefert. Da nun dieser letztere Werth von x zugleich auch der vorigen Gleichung genügt, indem diese durch jeden Werth von x befriedigt wird, so wird man durch ihn auf einen Durchschnittspunct der beiden Geraden in endlicher Ferne von der Coordinatenspitze hingeführt. So wie sich aber dieser Umstand in dem einen hier als Beispiel genommenen Falle nachweisen lässt, eben so lässt er sich auch in jedem andern solchen Falle darthun.

Die in dieser Nummer angestellten Betrachtungen gingen sämmtlich von der Voraussetzung aus, dass jedes der Gleichungspaare, wodurch die in Rede stehenden Geraden dargestellt werden, von der ersten in (20. a.) oder (20. b.) gegebenen Form sei; wird eines oder das andere Gleichungspaar in einer andern dieser Formen gegeben, so ändern sich alle in dieser Nummer erhaltenen Ausdrücke darnach ab. Es ist indessen sehr leicht, die in dieser Nummer gewonnenen Resultate so abzuändern, wie sie werden müssen, wenn die Gleichungspaare von einer andern solchen Form gegeben sind, falls nur die zu derselben Art der Coordinaten gehörigen Gleichungspaare beide von einer und derselben Form sind; denn so wie die zweiten oder dritten der gedachten Formen aus der ersten durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung der ersten oder zweiten Art hervorgehen, so müssen sich auch die Resultate, welche Gleichungspaaren angehören, die sämmtlich von der zweiten oder dritten Form sind, aus denen für Gleichungspaare, welche sämmtlich der ersten Form angehören, gefundenen durch die gleiche Vertauschung der Accente erhalten lassen, durch welche jene Gleichungspaare aus diesen hervorgehen. Diese einfache Herleitungsweise der Resultate, welche zu andern Formen der Gleichungspaare gehören aus den Resultaten, welche vorhin mitgetheilt worden sind, und die lauter Gleichungspaare von der ersten Form voraussetzen, fällt aber weg, wenn die beiden Geraden durch Gleichungspaare gegeben werden, von denen die, welche Coordinaten von derselben Art in sich enthalten, auf verschiedene Formen sich beziehen. Um nichts zurückzulassen, worauf der Rechner in besondern Fällen Acht zu geben hat, werden wir noch das dahin Gehörige folgen lassen.

101) Nehmen wir an, dass die eine Gerade durch das Gleichungspaar von der ersten Form

(44. a.) $\begin{cases} p_0 x' - p'_0 x = P''_0 \quad \text{mit} \quad p_0 x'' - p''_0 x = P'_0 \\ \text{oder} \\ \mathfrak{p}_0 u' - \mathfrak{p}'_0 u = \mathfrak{P}''_0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}_0 u'' - \mathfrak{p}''_0 u = \mathfrak{P}'_0 \end{cases}$

gegeben ist, während die andere Gerade durch das Gleichungspaar von der zweiten Form

(44. b.) $\begin{cases} p'x - p x' = P'' \quad \text{mit} \quad p'x'' - p''x' = P \\ \text{oder} \\ \mathfrak{p}'u - \mathfrak{p} u' = \mathfrak{P}'' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p}'u'' - \mathfrak{p}''u' = \mathfrak{P} \end{cases}$

gegeben ist, so erhält man aus dem ersteren

(45. a.) $\begin{cases} x' = \dfrac{P''_0 + p'_0 x}{p_0} \quad \text{und} \quad x'' = \dfrac{P'_0 + p''_0 x}{p_0} \\ \text{oder} \\ u' = \dfrac{\mathfrak{P}''_0 + \mathfrak{p}'_0 u}{\mathfrak{p}_0} \quad \text{und} \quad u'' = \dfrac{\mathfrak{P}'_0 + \mathfrak{p}''_0 u}{\mathfrak{p}_0}, \end{cases}$

dagegen aus dem anderen

(45. b.) $\begin{cases} x = \dfrac{P'' + p x'}{p'} \quad \text{und} \quad x'' = \dfrac{P + p''x'}{p'} \\ \text{und} \\ u = \dfrac{\mathfrak{P}'' + \mathfrak{p} u'}{\mathfrak{p}'} \quad \text{und} \quad u'' = \dfrac{\mathfrak{P} + \mathfrak{p}''x'}{\mathfrak{p}'}, \end{cases}$

und alle diese Werthe sind von endlicher und völlig bestimmter Grösse, welche endliche Werthe man auch für x oder u und für x' oder u' nehmen mag, da weder p_0 noch $\mathfrak{p}_0$ und ebenso weder p' noch $\mathfrak{p}'$ null sein können. Sollen nun die beiden Geraden einen Punct mit einander gemein haben, so muss es für x oder u einen Werth geben, welcher mittelst der Gleichungen (45. a.) Werthe für x', x'' oder u', u'' liefert, die zusammen den in (44. b.) aufgestellten Gleichungen genügen, oder auch, es muss sich für x' oder u' ein Werth angeben lassen, dem nach Anleitung der Gleichungen (45. b.) Werthe von x, x'' oder u, u'' entsprechen, die in Verbindung mit jenem die Gleichungen (44. a.) befriedigen; setzt man aber die in (45. a.) ausgedrückten Coordinaten in die Gleichungen (44. b.), so findet man:

(46. a.) $\begin{cases} (p_0 p' - p p'_0) x = p_0 P'' + p P''_0 \quad \text{und} \quad (p''_0 p' - p'' p'_0) x = p_0 P - p' P'_0 + p'' P''_0 \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}' - \mathfrak{p} \mathfrak{p}'_0) u = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{P}'' + \mathfrak{p} \mathfrak{P}''_0 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}''_0 \mathfrak{p}' - \mathfrak{p}'' \mathfrak{p}'_0) u = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{P} - \mathfrak{p}' \mathfrak{P}'_0 + \mathfrak{p}'' \mathfrak{P}''_0, \end{cases}$

und setzt man die in (45. b.) ausgedrückten Coordinaten in die Gleichungen (44. a.), so erhält man:

(46. b.) $\begin{cases} (p_0 p' - p p'_0) x' = p' P''_0 + p'_0 P'' \quad \text{und} \quad (p_0 p'' - p''_0 p) x' = p''_0 P'' + p' P'_0 - p_0 P \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}' - \mathfrak{p} \mathfrak{p}'_0) u' = \mathfrak{p}' \mathfrak{P}''_0 + \mathfrak{p}'_0 \mathfrak{P}'' \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}''_0 \mathfrak{p}) u' = \mathfrak{p}''_0 \mathfrak{P}'' + \mathfrak{p}' \mathfrak{P}'_0 - \mathfrak{p}_0 \mathfrak{P}. \end{cases}$

Diese letztern Gleichungen geben zu verstehen, dass die beiden Geraden nur dann einen Punct mit einander gemein haben können, wenn sich entweder aus den beiden in (46. a.) enthaltenen

für x oder u, oder aus den beiden in (46. b.) enthaltenen für x′ oder u′ ein und derselbe Werth ergiebt. Die Bedingung aber, dass dieses Erforderniss vorhanden sei, lässt sich in beiden Fällen auf die folgende eine Form bringen:

$$\left.\begin{array}{c} (p_0 p' - p p_0')(p_0 P - p' P_0') = p_0 P'' (p' p_0'' - p'' p_0') + p' P_0'' (p p_0'' - p'' p_0) \\ \text{oder} \\ (\mathfrak{p}_0 \mathfrak{p}' - \mathfrak{p} \mathfrak{p}_0')(\mathfrak{p}_0 \mathfrak{P} - \mathfrak{p}' \mathfrak{P}_0') = \mathfrak{p}_0 \mathfrak{P}'' (\mathfrak{p}' \mathfrak{p}_0'' - \mathfrak{p}'' \mathfrak{p}_0') + \mathfrak{p}' \mathfrak{P}_0'' (\mathfrak{p} \mathfrak{p}_0'' - \mathfrak{p}'' \mathfrak{p}_0) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(46. c.)}$$

und ihr Nichterfülltsein zeigt an, dass die beiden Geraden keinen Durchschnittspunct weder in endlicher noch in unendlicher Entfernung haben und daher nicht in einer und derselben Ebene liegen, wird sie hingegen durch die Gleichungspaare (44. a. und b.) erfüllt, so haben die beiden Geraden einen Punct mit einander gemein und liegen daher in einer und derselben Ebene. Ob dieser Durchschnittspunct in endlicher Entfernung liege, d. h. sich in völlig bestimmter Weise angeben lasse, oder ob er in unendlich grosser Ferne liege, und dann sein Ort sich nicht durch Coordinaten von endlicher Grösse angeben lasse, so wie, ob nur ein einziger solcher Durchschnittspunct zwischen den beiden Geraden vorhanden sei, in welchem Falle sich dieselben schneiden, oder ob zwischen den Geraden mehrere solche Durchschnittspuncte statt finden, wo dann beide in einander liegen, das alles lässt sich aus den Gleichungen (46. a.) oder (46. b.) gerade so beurtheilen, wie es in der vorigen Nummer den dortigen Gleichungen (42. a.) gemäss von I. bis V. geschehen ist, weshalb wir es hier nicht noch einmal zu wiederholen brauchen.

Es bleiben zwar bei unserer gegenwärtigen Betrachtung noch die Fälle übrig, wo die beiden Geraden, anstatt wie in (44. a.) und (44. b.) durch Gleichungspaare von der ersten und zweiten Form gegeben zu sein, in der ersten und dritten oder in der zweiten und dritten Form vorkämen; indessen lassen sich die dahin gehörigen Resultate aus denen in gegenwärtiger Nummer gefundenen immer ganz einfach durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung bei den Grössen desjenigen Gleichungspaares, das von einer neuen Form ist, erhalten, welche Vertauschung stets von derselben Art sein muss, wie die, wodurch die neue Form aus der vorigen zweiten, deren Stelle sie vertritt, hervor geht, und die daher bald von der ersten, bald von der zweiten, bald auch von der dritten Art wird sein müssen.

102) Will man aus den combinirten Gleichungspaaren, wodurch zwei Gerade dargestellt werden, die Grösse der Neigung finden, welche zwischen diesen beiden Geraden statt findet, so kann diess immer leicht auf folgende Weise geschehen. Bezeichnen nämlich q_0, q_0', q_0'' die schiefen oder $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$ die senkrechten Projectionszahlen von einer mit der ersten durch Gleichungspaare von einer der Formen (20. a.) oder (20. b.) gegebenen Geraden, wobei die in den Gleichungspaaren vorkommenden Coeffizienten p_0, p_0', p_0'' und $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_0'$, $\mathfrak{p}_0''$ sein sollen, parallelen Richtung, und ebenso q, q', q'' die schiefen und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die senkrechten Projectionszahlen von einer mit der zweiten durch Gleichungspaare von einer der Formen (20. a.) oder (20. b.) gegebenen Geraden, wobei die in den Gleichungspaaren vorkommenden Coeffizienten durch p, p', p'' oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ vorgestellt werden sollen, parallelen Richtung, so hat man jederzeit den Gleichungen (26. a.) und (26. b.) gemäss:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p_0}{H_0} = q_0\,,\quad \frac{p_0'}{H_0} = q_0'\,,\quad \frac{p_0''}{H_0} = q_0'' \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}_0\,,\quad \frac{\mathfrak{p}_0'}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}_0'\,,\quad \frac{\mathfrak{p}_0''}{\mathfrak{H}_0} = \mathfrak{q}_0'' \\ \text{und} \\ \frac{p}{H} = q\,,\quad \frac{p'}{H} = q'\,,\quad \frac{p''}{H} = q'' \quad\text{und}\quad \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}\,,\quad \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}'\,,\quad \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}''\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(47. a.)}$$

wenn H_0 und $\mathfrak{H}_0$, H und $\mathfrak{H}$ Zahlen vorstellen, welche durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt werden:

(47. b.)

$$p_0^2 + p_0'^2 + p_0''^2 + 2\,p_0 p_0' \cos W + 2\,p_0 p_0'' \cos W' + 2\,p_0' p_0'' \cos W'' = H_0^2$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\mathfrak{p}_0^2 + \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{E}_1'}\mathfrak{p}_0'^2 + \frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{E}_2''}\mathfrak{p}_0''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}_1'}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_0'' + \left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{E}_1'} + \frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}_0'\mathfrak{p}_0'' = \mathfrak{H}_0^2,$$

und

$$p^2 + p'^2 + p''^2 + 2\,p\,p' \cos W + 2\,p\,p'' \cos W' + 2\,p' p'' \cos W'' = H^2$$

oder

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{E}_1'}\mathfrak{p}'^2 + \frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{E}_2''}\mathfrak{p}''^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}_1'}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}' + \left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}'' + \left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{E}_1'} + \frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{E}_2''}\right)\mathfrak{p}'\mathfrak{p}'' = \mathfrak{H}^2,$$

und dabei können den dortigen Betrachtungen zur Folge sowohl q_0, q_0', q_0'' und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$, wie q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ gleichläufigen oder gegenläufigen Richtungen angehören, je nachdem bei positiv genommenen H_0, $\mathfrak{H}_0$, H und $\mathfrak{H}$ die Vorzeichen in den beiden Gleichungspaaren gleichartig sind oder nicht. Da indessen jede von den zwei gegenläufigen zu der einen Geraden parallelen Richtungen in Verbindung mit jeder der zwei gegenläufigen zu der andern Geraden parallelen Richtungen den spitzen oder stumpfen Winkel bildet, wodurch die Neigung der beiden Geraden gegen einander angezeigt wird, so ist stets, wenn wir diesen Winkel, er mag als spitzer oder stumpfer sich zu erkennen geben, durch θ bezeichnen:

(48. a.)
$$\cos\theta = q\,\mathfrak{q}_0 + q'\mathfrak{q}_0' + q''\mathfrak{q}_0'' \quad \text{und} \quad \cos\theta = \mathfrak{q}\,q_0 + \mathfrak{q}'q_0' + \mathfrak{q}''q_0'',$$

oder wenn man an die Stelle der Projectionszahlen ihre durch die Gleichungen (47. a.) gegebenen Werthe setzt:

(48. b.)
$$H\,\mathfrak{H}_0 \cos\theta = p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}_0' + p''\mathfrak{p}_0'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{H}\,H_0 \cos\theta = \mathfrak{p}\,p_0 + \mathfrak{p}'p_0' + \mathfrak{p}''p_0'',$$

wo indessen in jeder dieser Gleichungen, unabhängig von der zweiten, θ sowohl den spitzen wie den stumpfen Winkel zu bedeuten hat, je nachdem man aus ihr für $\cos\theta$ einen positiven oder negativen Werth erhält. Multiplicirt man die beiden Gleichungen (48. b.) mit einander, so findet man:

(48. c.)
$$\pm H\,\mathfrak{H}\,H_0\,\mathfrak{H}_0 \cos^2\theta = (p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}_0' + p''\mathfrak{p}_0'')(\mathfrak{p}\,p_0 + \mathfrak{p}'p_0' + \mathfrak{p}''p_0''),$$

und in dieser muss von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere genommen werden, je nachdem in den beiden vorigen θ einen und denselben Winkel, oder in der einen den spitzen und in der andern den stumpfen Winkel vorzustellen hat, was im Grunde nichts anders sagt, als dass in dieser letzten Gleichung von den doppelten Vorzeichen dasjenige genommen werden muss, wodurch $\cos^2\theta$ eine positive Grösse wird.

Nimmt man für H_0 und $\mathfrak{H}_0$ sowohl als für H und $\mathfrak{H}$ nur ihre positiven Werthe, so ist der Gleichung (27. a.) zur Folge:

$$\pm H_0\,\mathfrak{H}_0 = p_0\,\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'' \quad \text{und} \quad \pm H\,\mathfrak{H} = p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'',$$

und man hat das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen in der vordern, je nachdem q_0, q_0', q_0'' und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$, in der hintern Gleichung aber, je nachdem q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ gleich- oder gegenläufigen Richtungen angehören. Hieraus folgt, dass

$$\pm H_0\,\mathfrak{H}_0\,H\,\mathfrak{H} = (p_0\,\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')$$

ist, und dass man in dieser Gleichung das obere Vorzeichen zu nehmen habe, wie die Projectionszahlen q_0, q_0', q_0'' und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_0'$, $\mathfrak{q}_0''$ sowohl als die q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ entweder beide Male gleichläufigen oder beide Male gegenläufigen Richtungen angehören, während das untere Vorzeichen genommen werden muss, wenn die einen der genannten Projectionszahlen gleichläufige, die andern aber gegenläufige Richtungen in sich tragen. Da nun in denselben Fällen die beiden in den Gleichungen (48. a.) vorkommenden Winkel, welche durch θ bezeichnet worden sind, entweder dieselben oder Nebenwinkel sind und es davon abhängt, ob in der Gleichung (48. c.) das obere oder untere Vorzeichen das rechte ist, so wird diese Gleichung, wenn man in sie für $H_0 \mathfrak{H}_0 H \mathfrak{H}$ seinen eben angegebenen Werth einsetzt, in jedem Falle:

$$\cos^2\theta = \frac{(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\,\mathfrak{p}_0' + p''\,\mathfrak{p}_0'')(\mathfrak{p}\,p_0 + \mathfrak{p}'p_0' + \mathfrak{p}''p_0'')}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')}. \qquad \textbf{(49. a.)}$$

Sind die Gleichungspaare einer jeden Geraden nächste, wo dann den obigen Betrachtungen zur Folge gleichzeitig $H_0 = \mathfrak{H}_0$ und $H = \mathfrak{H}$ ist, so wird

$$p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'',$$

wie schon der blose Hinblick auf die Gleichungen (48. b.) zu verstehen giebt, weil in diesem Falle $H\mathfrak{H}_0 = H_0\mathfrak{H}$ ist, und zugleich θ in ihnen beiden einen und denselben entweder spitzen oder stumpfen Winkel vorstellt; desshalb kann die Gleichung (49. a.), im Falle die gegebenen Gleichungen einer jeden Geraden nächste sind, auch in jeder der zwei nachstehenden Formen gegeben werden:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos^2\theta = \frac{(p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'')^2}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')}\\
&\text{oder}\\
&\cos^2\theta = \frac{(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'')^2}{(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'')}.
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(49. b.)}$$

Wird $\cos\theta = 0$, welches geschieht, wenn entweder

$$p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'' = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'' = 0 \qquad \textbf{(50.)}$$

ist, so ist θ ein rechter Winkel, so wie umgekehrt die Bedingungen (50.) nothwendig erfüllt sein müssen, wenn θ ein rechter Winkel ist; daher enthält jede dieser Bedingungen das Kennzeichen der senkrechten Stellung der beiden Geraden gegen einander in sich, in dem Sinne genommen, dass sich dabei die zwei Geraden nicht zu durchschneiden brauchen, indem der Winkel θ blos den zwischen zwei, mit den beiden Geraden parallelen Richtungen, die man sich von einem und demselben Puncte auslaufend denkt, bezeichnet.

Wird $\cos^2\theta = 1$ oder $\cos\theta = \pm 1$, so ist θ entweder null oder zweien Rechten gleich; in beiden Fällen laufen aber die beiden Geraden mit einander parallel oder sie liegen in einander; daher ist das Kennzeichen der parallelen Lage zweier durch Gleichungspaare gegebener Geraden in allgemeinster Weise zufolge der Gleichung (49. a.):

$$(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'') = (p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'')(\mathfrak{p}_0 p + \mathfrak{p}_0' p' + \mathfrak{p}_0'' p'') \qquad \textbf{(51. a.)}$$

und diese nimmt in dem Falle von lauter nächsten combinirten Gleichungspaaren entweder die Form:

$$(p_0\mathfrak{p}_0 + p_0'\mathfrak{p}_0' + p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}'') = (p_0\mathfrak{p} + p_0'\mathfrak{p}' + p_0''\mathfrak{p}'')^2 \qquad \textbf{(51. b.)}$$

oder auch die Form:

(51. c.) $$(p_0\mathfrak{p}_0+p_0'\mathfrak{p}_0'+p_0''\mathfrak{p}_0'')(p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}'+p''\mathfrak{p}'')=(\mathfrak{p}_0 p+\mathfrak{p}_0' p'+\mathfrak{p}_0'' p'')^2$$

an. Dieses letztere Kennzeichen der parallelen Lage von zwei durch combinirte Gleichungspaare gegebenen Geraden lässt sich auf die viel einfachere Form

(52.) $$p_0 : p_0' : p_0'' = p : p' : p'' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}_0 : \mathfrak{p}_0' : \mathfrak{p}_0'' = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}''$$

bringen, welche Eigenthümlichkeit von parallelen Geraden man auch unmittelbar aus den Gleichungen (25.) ableiten kann. Vergleicht man die hier erhaltenen Formeln mit den in Nr. 91. und in Nr. 99. gefundenen, so überzeugt man sich, dass die Neigung zwischen zwei Ebenen, zwischen einer Ebene und einer Geraden, so wie zwischen zwei Geraden durch völlig einerlei Gleichungen ausgesprochen wird, welcher Vortheil indessen an den Umstand gebunden ist, dass die Gleichungspaare der Geraden in einer der oben angeordneten Formen (20. a. und b.) oder (22. a. und b.) aufgestellt werden. Uebrigens bleiben die in diesen Nummern erhaltenen Resultate völlig dieselben, in welcher von jenen Formen auch die Gleichungspaare der Geraden gegeben sein mögen, woraus in Verbindung mit dem in Nr. 99. Gesagten hervorgeht, dass die Winkelbestimmungen stets dieselben bleiben, was auch die Form sein mag, in der die Gleichungspaare der Geraden gegeben sind, so dass also jene Rücksichten auf die Formen der Gleichungspaare, welche wir in Nr. 98., Nr. 100. und Nr. 101. nehmen mussten, um immer das ihnen entsprechende richtige Resultat angeben zu können, nur da nöthig werden, wo ein Durchschnitt zwischen einer Ebene und einer Geraden, oder zwischen zwei Geraden in Betrachtung kommt; dann aber darf die jedesmalige Rücksichtsnahme auf die Form der Gleichungspaare nicht ausser Acht gelassen werden, weil man ausserdem befürchten müsste, dass sich Einzelnfälle den Betrachtungen entziehen. Resultate der letztern Art sind nur unter der Voraussetzung völlig zuverlässig, dass die Form der Gleichungen, aus welchen diese Resultate geschöpft worden sind, der Geraden, auf welche sie angewendet werden, nicht zuwider ist.

103) Die gleiche Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Formen, in denen die Gleichungspaare einer Geraden sich geben können, hat man auch da eintreten zu lassen, wo das Gleichungspaar für eine Gerade, die durch bestimmt gegebene Puncte gehen soll, in einer der besondern Formen (20. a. oder b.) und (22. a. oder b.) erst aufgefunden werden soll. Wollen wir z. B. das in schiefen Coordinaten ausgedrückte Gleichungspaar für eine Gerade angeben, die durch zwei bestimmte Puncte gehen soll, deren schiefe Coordinaten x_1, x_1', x_1'' und x_2, x_2', x_2'' sind, und legen wir dabei ein Gleichungspaar von der ersten in (20. a.) befindlichen Form zu Grunde, nämlich:

$$px'-p'x=P'' \quad \text{mit} \quad px''-p''x=P',$$

so muss, wenn der Punct, dessen schiefe Coordinaten x_1, x_1', x_1'' sind, diesem Gleichungspaare angehören soll,

$$px_1'-p'x_1=P'' \quad \text{mit} \quad px_1''-p''x_1=P'$$

sein. Zieht man, um P'' und P' zu eliminiren, diese Gleichungen von den vorigen in der Ordnung, wie sie neben einander stehen, ab, so erhält man:

(53. a.) $$p(x'-x_1')-p'(x-x_1)=0 \quad \text{mit} \quad p(x''-x_1'')-p''(x-x_1)=0,$$

und hat nun ein Gleichungspaar, dessen Gerade durch den ersten gegebenen Punct geht. Soll nun diese Gerade auch noch durch den zweiten gegebenen Punct, dessen Coordinaten x_2, x_2', x_2'' sind, gehen, so muss das vorstehende Gleichungspaar in Erfüllung gehen, wenn man in demselben x_2, x_2', x_2'' an die Stelle von x, x', x'' setzt, d. h. es muss sein:

$$p(x_2'-x_1')-p'(x_2-x_1)=0 \quad \text{mit} \quad p(x_2''-x_1'')-p''(x_2-x_1)=0\,.$$

Eliminirt man aber mittelst dieser Bedingung aus dem Gleichungspaare (53. a.) den Coeffizienten p, welcher, wenn durch dieses Gleichungspaar wirklich eine Gerade soll dargestellt werden können, nie null sein darf, so findet man:

$$(x-x_1)(x_2'-x_1')-(x'-x_1')(x_2-x_1)=0 \text{ mit } (x-x_1)(x_2''-x_1'')-(x''-x_1'')(x_2-x_1)=0\,. \quad \textbf{(53. b.)}$$

Dieses letztere Gleichungspaar stellt nun zwar im Allgemeinen die verlangte Gerade, welche durch die zwei Puncte x_1, x_1', x_1'' und x_2, x_2', x_2'' hindurch geht, dar, aber in besondern Fällen, wo die gewählte Form sich mit der Lage dieser Puncte nicht verträgt, ist es illusorisch, und stellt in Wahrheit keine Gerade mehr dar. Wären z. B. die zwei gegebenen Puncte von der besondern Beschaffenheit, dass man $x_2=x_1$ hätte, so verwandelten sich dadurch die beiden Gleichungen (53. b.) in die eine:

$$x-x_1=0\,,$$

welche nun keine Gerade mehr, sondern nur noch eine Ebene darzustellen im Stande ist. Nimmt man aber an den Accenten des Gleichungspaares (53. b.) eine Vertauschung der ersten Art vor, wodurch es aus der ersten Form (20. a.) in die zweite übergeführt wird und die nachstehende Gestalt annimmt:

$$(x'-x_1')(x_2-x_1)-(x-x_1)(x_2'-x_1')=0 \text{ mit } (x'-x_1')(x_2''-x_1'')-(x''-x_1'')(x_2'-x_1')=0\,, \quad \textbf{(53. c.)}$$

so widerstreitet jetzt seine Form der besondern Bedingung $x_2=x_1$ nicht mehr. Wäre aber noch ausserdem $x_2'=x_1'$, so würde sich auch dieses Gleichungspaar wieder auf nur eine Gleichung, nämlich:

$$x'-x_1'=0$$

zurückziehen, und daher eine Gerade darzustellen nicht mehr fähig sein; verwandelt man indessen das Gleichungspaar (53. b.), welches von der ersten Form ist, dadurch, dass man an seinen Accenten eine Vertauschung der zweiten Art vornimmt, in eines von der dritten Form, wodurch es wird:

$$(x''-x_1'')(x_2'-x_1')-(x'-x_1')(x_2''-x_1'')=0 \text{ mit } (x''-x_1'')(x_2-x_1)-(x-x_1)(x_2''-x_1'')=0\,, \quad \textbf{(53. d.)}$$

so verträgt sich nun dessen Form mit den beiden Bedingungen $x_2=x_1$ und $x_2'=x_1'$, welche machen, dass es sich verwandelt in:

$$x'-x_1'=0 \quad \text{mit} \quad x-x_1=0 \quad \textbf{(53. e.)}$$

und so die verlangte Gerade, welche durch die zwei besondern Puncte geht, darstellt.

Aehnlich gestaltet sich der Hergang, wenn das Gleichungspaar für eine Gerade aufgesucht werden soll, die durch den Punct geht, dessen schiefe Coordinaten x_1, x_1', x_1'' sind, und mit einer Richtung parallel läuft, deren schiefe Projectionszahlen a, a', a'' sind. Wählte man nämlich für dieses Gleichungspaar die erste von den in (20. a.) enthaltenen Formen, so fände man:

$$a(x'-x_1')-a'(x-x_1)=0 \quad \text{mit} \quad a(x''-x_1'')-a''(x-x_1)=0\,. \quad \textbf{(53. f.)}$$

Dieses Gleichungspaar wird nun zwar im Allgemeinen die verlangte Gerade darzustellen im Stande sein, in besondern Fällen aber kann es überhaupt keine Gerade mehr darstellen und giebt dadurch zu verstehen, dass seine Form sich diesem besondern Falle nicht mehr anpassen kann. Hätte z. B. die gegebene Richtung die besondere Eigenschaft, dass bei ihr $a=0$ wäre, so zöge sich obiges Gleichungspaar in die eine Gleichung

$$x - x_1 = 0$$

zurück, und kann nun keine Gerade mehr darstellen. Nimmt man aber an den Accenten des obigen Gleichungspaares eine Vertauschung der ersten Art vor, wodurch es aus der ersten Form in die zweite übergeführt wird, und die folgende Gestalt annimmt:

$$a'(x - x_1) - a(x' - x'_1) = 0 \quad \text{mit} \quad a'(x'' - x''_1) - a''(x' - x'_1) = 0,$$

so ist es jetzt die Gerade darzustellen fähig, welche der besondern Richtung, wobei $a = 0$ wird, parallel läuft. Hätte aber diese besondere Richtung noch ausserdem die Eigenschaft, dass bei ihr nicht blos $a = 0$, sondern auch noch überdiess $a' = 0$ ist, so müsste man die erste Form durch eine Vertauschung der zweiten Art in die dritte Form überführen, um das Gleichungspaar zur Darstellung dieser besondern Geraden fähig zu machen.

Alles, was in dieser Nummer in Bezug auf Gleichungspaare, in denen schiefe Coordinaten und Projectionszahlen auftreten, gesagt worden ist, gilt ganz ebenso auch da, wo Gleichungen verlangt werden mit senkrechten Coordinaten und Projectionszahlen. Dabei lassen sich die beiderseitigen Resultate einfach dadurch aus einander ableiten, dass man die Grundzeichen a, x und die c, u mit einander vertauscht. Zum Schlusse mag daher hier nur noch die Bemerkung stehen, dass man einen der in combinirten Gleichungen oder combinirten Gleichungspaaren vorhandenen Coefficienten der 1 gleich machen kann, selbst da noch, wo die Vorzeichen gleichartig gemacht oder die Gleichungen selbst in nächste combinirte umgeändert worden sind, und diese Eigenschaft behalten sollen; wir haben indessen dieses Mittel zur Vereinfachung, da es nur von sehr geringer Bedeutung ist, zu benützen unterlassen, um den bei Winkelbestimmungen auftretenden Ausdrücken ihre volle Symmetrie zu bewahren.

104) Im Vorstehenden sind die Schwierigkeiten, auf die man beim Gebrauche der Gleichungspaare von den in (20. a. und b.) oder (22. a. und b.) angegebenen Formen stossen kann, in Fällen, wo das allgemeine Verhalten einer Geraden zu einer Ebene oder zu einer Geraden erkannt werden soll, und man in Betreff der Zulässigkeit der gewählten Form nicht völlig sicher ist, mit einer Ausführlichkeit vorgelegt worden, die man vielleicht für allzugross zu halten geneigt sein wird, um so mehr, da dieselben nicht selten so gut wie ganz verschwiegen werden; ich gieng indessen dabei von der Voraussetzung aus, dass Weitläufigkeiten, aus denen die Anwendung ihre Sicherheit schöpfen muss, keine sind. In diesem Sinne glaube ich dem früher Gesagten noch beifügen zu müssen, dass in den (24. a. oder b.) aufgestellten Formen gleichzeitig die drei der in (22. a. oder b.) mitgetheilten Gleichungspaare enthalten sind, weswegen die oben berührten Unsicherheiten wegfallen, so lange man an jenen die Betrachtungen fortlaufen lässt; diese Unsicherheiten treten aber wieder ein, sobald man die in (24. a. oder b.) angegebenen Verhältnissgleichungen wieder in zwei gewöhnliche Gleichungen auflösen will, ohne zuvor die besondere Natur der Grössen p, p', p'' oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ erkannt zu haben. So wie man nämlich die Gewissheit erlangt hat, dass keine dieser Grössen null ist, sagt jedes der aus den genannten Verhältnissgleichungen gezogene Gleichungspaar zweifelsohne der Geraden zu, die durch es dargestellt werden soll; und so wie man zu der Einsicht gelangt ist, dass eine oder zwei von jenen Grössen null sind, kann man ohne alle Zweideutigkeit aus den Verhältnissgleichungen das der Geraden zusagende Gleichungspaar herholen. Aus diesem Grunde kann man sagen, dass die durch analytische Behandlung der Geraden am räumlichen Coordinatensysteme erhaltenen Resultate eine vollkommene Allgemeinheit behalten, so lange ihr die Formen (24. a. und b.) in unveränderter Gestalt zu Grunde liegen. Da, wie wir gefunden haben,

die Grössen p, p', p'' oder 𝔭, 𝔭', 𝔭'' in ihnen keine andere Bedingung zu erfüllen brauchen als die, dass sie den schiefen und senkrechten Projectionszahlen von einer der beiden Richtungen, welche in der durch jene Verhältnissgleichungen dargestellten Geraden liegen, proportional sein müssen, man also auch statt jener Grössen diese Projectionszahlen gesetzt sich denken darf, wodurch dann aber die Verhältnissgleichungen selber von der Geraden nichts anders angeben, als einen ihrer Puncte und eine ihrer Richtungen, so hat man zur sichern Erzielung völlig allgemeiner Rechnungsresultate in Fällen, wo Gerade im räumlichen Systeme behandelt werden, nur die folgende Regel sich zum Gesetz zu machen: Man lasse die Gleichungen der Geraden nur in einer der Formen (24. a. oder b.) zu, und nehme zu dem Ende von ihr in die Rechnung nur einen ihrer Puncte und eine ihrer Richtungen auf, führe aber diese Gleichungsformen nie in eines der in (20. a. oder b.) oder in (22. a. oder b.) stehenden Gleichungspaare über, bis die vorangegangenen Betrachtungen entschieden haben, welche von den drei Projectionszahlen der in die Rechnung aufgenommenen Richtung null sind und welche nicht. Die Auflösung der Verhältnissgleichungen in Gleichungspaare wird nur da unvermeidbar, wo Durchschnitte der Geraden mit Ebenen oder andern Geraden aufgesucht werden sollen, und dieses wird im Allgemeinen nicht früher gefordert werden, als bis die besondere Richtung der Geraden bereits schon erkannt ist; wo aber in seltenen Fällen solche Aufsuchungen geschehen sollen, bevor die Richtung der Geraden in völlig bestimmter Weise angegeben werden kann, da ist die gleichzeitige Berücksichtigung der oben angegebenen möglichen Fälle unerlässlich. In der hier mitgetheilten Regel hat man den Grund zu suchen, warum später, da wo wir die Natur der krummen Linien und Flächen untersuchen, der Gebrauch von Gleichungen für Gerade in einer der in (20. a. und b.) oder (22. a. und b.) mitgetheilten Formen ganz und gar vermieden worden ist.

Die Anwendung der besprochenen Verhältnissgleichungen führt auch da, wo, wie in der vorigen Nummer geschehen ist, die Gleichungen für Gerade, welche vorgeschriebene Eigenschaften besitzen sollen, erst aufzufinden sind, zum sichern Ziele. So z. B. kann man, wo die Gerade durch zwei Puncte gehen soll, deren schiefe Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 und x_2, x'_2, x''_2 sind, die ihr in jedem Falle zusagenden Gleichungen auf die folgende Art angeben. Die Formen (24. a.) sagen nämlich sogleich aus, dass durch die Verhältnissgleichungen

$$x - x_1 : x' - x'_1 : x'' - x''_1 = p : p' : p''$$

eine Gerade dargestellt wird, welche durch den Punct geht, dessen schiefe Coordinaten x_1, x'_1, x''_1 sind, also durch den einen der verlangten, wenn dazu seine Coordinaten genommen worden sind; soll aber die Gerade auch noch durch den Punct gehen, dessen schiefe Coordinaten x_2, x'_2, x''_2 sind, so müssen diese Coordinaten für x, x', x'', in obige Gleichungen gesetzt, diese befriedigen, d. h. es muss sein:

$$x_2 - x_1 : x'_2 - x'_1 : x''_2 - x''_1 = p : p' : p''$$

und aus diesen Verhältnissgleichungen folgt in Verbindung mit den vorigen, dass man habe:

$$x - x_1 : x' - x'_1 : x'' - x''_1 = x_2 - x_1 : x'_2 - x'_1 : x''_2 - x''_1,$$

welche Gleichungen in ihrer jetzigen Gestalt die geforderte Gerade auch noch in jedem besondern Falle darzustellen fähig bleiben, weil in ihnen noch jedes der einzelnen Gleichungspaare enthalten ist, und Aehnliches gilt von je zwei andern Eigenschaften der Geraden, für welche die geeigneten Gleichungen aufgesucht werden sollen.

105) Wir haben schon im vorigen Abschnitte gesehen, dass da, wo alle zur Untersuchung gezogenen Puncte in einer und derselben Ebene liegen, das dreiaxige System durch ein zweiaxiges, welches wir das ebene genannt haben, ersetzt werden könne; diess wird daher auch da geschehen können, wo mehrere Gerade zur Untersuchung kommen, die sämmtlich in einer und derselben Ebene liegen. Wir haben dort gesehen, wie alle dem ebenen Systeme angehörigen Formeln ganz einfach aus den für das räumliche System, dessen dritte Axe senkrecht steht auf den zwei Axen des ebenen Systems, gefundenen dadurch abgeleitet werden können, dass man in diesen alle auf die dritte Axe sich beziehenden Coordinaten oder Projectionszahlen verschwinden lässt. Etwas Aehnliches gilt zwar auch hier noch, doch ist der Uebergang wegen der bei Ebenen und Geraden in die Betrachtung aufgenommenen Hilfsgrössen kein so unmittelbarer, weshalb wir uns veranlasst fühlen, diesen Uebergang noch näher vor Augen zu legen.

Man kann alle Geraden, die in einer und derselben Ebene liegen, als Durchschnitte dieser einen Ebene mit noch andern auffassen; denkt man sich daher diese Geraden auf ein senkrechtes System bezogen, dessen zwei Axen AX und AX′ in dieser Ebene liegen, und dessen dritte Axe AX″ senkrecht auf ihr steht, so hat man als Gleichung dieser Ebene die:

(54. a.) $$x''=u''=0,$$

und man kann jede in derselben Ebene liegende Gerade durch diese Gleichung in Verbindung mit noch einer, welche einer zweiten durch die Gerade hindurch gehenden Ebene angehört, darstellen. Stellt man sich nun diese zweite Ebene immer senkrecht auf der vor, in welcher die Axen AX und AX′ liegen und die durch die Gleichungen (54. a.) dargestellt wird, und denkt man sich die auf dieser zweiten Ebene senkrechte Richtung, welche als Hilfsgrösse bei der Untersuchung von Ebenen gedient hat, durch einen Punct der Geraden gehend, in welcher die Ebene (54. a.) von der zweiten Ebene geschnitten wird, so kommt diese Richtung in die Ebene (54. a.) zu liegen; diese Hilfsgrösse geräth sonach gerade erst dadurch, dass man die zweiten Ebenen senkrecht auf der ersten stehend voraussetzt, in das Gebiet des ebenen Systems, und kann in diesem als die Richtung definirt werden, welche in der durch seine Axen gelegten Ebene liegt und senkrecht auf der in Betrachtung genommenen Geraden steht. Bezeichnet man die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche eine solche Richtung an den drei Axen des senkrechten Systems giebt, durch $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ und q, q′, q″, wie zuvor, so ist in Folge der Besonderheit dieses Systems:

(54. b.) $$\mathfrak{q}''=q''=0,$$

da diese Richtung mit seiner Coordinatenebene XAX′ zusammenfällt. Dadurch nehmen die allgemeinen Gleichungen

$$\mathfrak{p}x+\mathfrak{p}'x'+\mathfrak{p}''x''=\mathfrak{P} \quad \text{und} \quad pu+p'u'+p''u''=P,$$

welche wir in §. 10. dieses Abschnitts entziffert haben, eine besondere Gestalt an, die jetzt aufgesucht werden wird. Es muss nämlich den dort in Nr. 86. geschehenen Erläuterungen gemäss

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q},\quad \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q}',\quad \frac{\mathfrak{p}''}{\mathfrak{H}}=\mathfrak{q}'' \quad \text{und} \quad \frac{p}{H}=q,\quad \frac{p'}{H}=q',\quad \frac{p''}{H}=q''$$

sein, wenn die Hilfsgrössen $\mathfrak{H}$ und H nach Anleitung der dortigen Gleichungen (6.) aus den Coeffizienten der zur Ebene gehörigen Gleichung bestimmt werden, wobei keine von diesen

beiden Hilfsgrössen, wie dort ganz allgemein gezeigt worden ist, je null werden kann, so lange die Gleichung eine Ebene wahrhaft darzustellen im Stande ist. Es geht aber aus den vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit denen (54. b.) sogleich hervor, dass bei allen unsern jetzigen zweiten Ebenen

$$p'' = \mathfrak{p}'' = 0, \qquad \textbf{(54. c.)}$$

ist, dass also die Gleichung einer jeden solchen Ebene die besondere Form

$$\mathfrak{p}x + \mathfrak{p}'x' = \mathfrak{P} \quad \text{oder} \quad pu + p'u' = P \qquad \textbf{(54. d.)}$$

annimmt, und dass man in diesen besondern Formen

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}\,, \quad \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{H}} = \mathfrak{q}' \quad \text{und} \quad \frac{p}{H} = q\,, \quad \frac{p'}{H} = q' \qquad \textbf{(54. e.)}$$

zu nehmen hat. Die Gleichungen (6.), aus welchen die Hilfsgrössen $\mathfrak{H}$ und H zu bestimmen sind, verwandeln sich an unserm jetzigen senkrechten Systeme, in welchem W′ und W″ rechte Winkel und in Folge dessen ihre Kosinuse null sind, in:

$$p^2 + p'^2 + 2pp'\cos W = H^2 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\mathfrak{p}^2 + \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}\mathfrak{p}'^2 + \left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)\mathfrak{p}\mathfrak{p}' = \mathfrak{H}^2$$

oder, wenn man an die Stelle von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1'$ nach Anleitung der im vorigen Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (104. b. und c.) ihre dem senkrechten Systeme zukommenden besondern Werthe setzt, in:

$$p^2 + p'^2 + 2pp'\cos W = H^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin^2 W}(\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{p}'^2 - 2\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\cos W) = \mathfrak{H}^2. \qquad \textbf{(54. f.)}$$

Lässt man jetzt an die Stelle des bisher ins Auge gefassten senkrechten Systems das aus den Axen AX und AX′ zusammengesetzte ebene System bei den Gleichungen (54. a. bis f.) treten, so wird man gewahr: erstlich, dass die Gleichungen (54. a. bis c.) bei diesem ebenen Systeme ganz überflüssig werden, indem, was sie aussagen, schon im Begriffe von diesem Systeme liegt; zweitens, dass die Gleichungen (54. e. bis f.) im ebenen System ganz den gleichen Sinn annehmen wie im senkrechten, wenn die Richtung, welche beim senkrechten Systeme als eine auf der zweiten Ebene senkrechte aufgefasst worden ist, beim ebenen Systeme als senkrecht auf der Geraden stehend gedacht wird, in welcher die erste Ebene von der zweiten geschnitten wird; fasst man daher auch noch drittens von der Gleichung (54. d.), welche im senkrechten Coordinatensysteme eine Ebene darstellt, auch nur die zum ebenen System gehörigen Puncte ins Auge, so nimmt sie allein schon die darzustellende Gerade in sich auf, und weil dann alle in ihr sowohl, als in der auf ihr senkrechten Richtung aufzufassenden Puncte in der Ebene des ebenen Systems liegen, sonach alle Coordinaten x, x′ oder u, u′, die hierbei etwa zur Sprache kommen könnten, als durch Linien erzeugt, die in der Ebene des Systems selber den Axen AX′, AX parallel laufen oder senkrecht auf denen AX, AX′ stehen, angesehen werden können, worauf wir schon im ersten Abschnitte, da wo von dem ebenen Systeme die Rede war, aufmerksam gemacht haben, (Absch. I. §. 5. Nr. 58. ganz am Ende), so nehmen dann die Gleichungen (54. a. bis f.) nichts mehr in sich auf, dessen Bedeutung nicht am ebenen Systeme vollständig erkannt werden könnte. Es folgt hieraus, d a s s j e d e z u m e b e n e n S y s t e m e g e h ö r i g e G e r a d e i n d i e s e m d u r c h e i n e e i n z i g e G l e i c h u n g v o n d e r F o r m (54. d.), s t a t t d e r e n m a n a u c h d i e

(54. g.) $$\mathfrak{p}(x-x_1)+\mathfrak{p}'(x'-x_1')=0 \quad \text{oder} \quad p(u-u_1)+p'(u'-u_1')=0$$

nehmen kann, wenn x_1, x_1' und u_1, u_1' die schiefen und senkrechten Coordinaten von einem dieser Geraden angehörigen Puncte anzeigen, dargestellt wird, und dass die Lage dieser Geraden in der Ebene des Systems aus der gegebenen Gleichung mittelst der Gleichungen (54. e. bis f.) vollständig entnommen werden kann, wenn man die in ihnen zum Vorschein kommenden Projectionszahlen q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ auf die Richtung bezieht, welche auf der Geraden senkrecht steht, und in der Ebene des ebenen Systems liegt.

Das hier Erwiesene gilt eben so auch noch von allen übrigen in §. 10. aufgeführten Gleichungen, welche sich dort auf eine Ebene beziehen, hier aber ihre Deutung an der Geraden finden, die im ebenen Systeme durch die Gleichung (54. d.) dargestellt wird. So gehen im ebenen Systeme, bei welchem man sich unter W' und W'' rechte Winkel zu denken hat, die dortigen Gleichungen (7.) über in:

(55. a.) $$\pm\mathfrak{q}=q+q'\cos W,\ \pm\mathfrak{q}'=q\cos W+q' \quad \text{und} \quad \pm q\sin^2 W=\mathfrak{q}-\mathfrak{q}'\cos W,\ \pm q'\sin^2 W=\mathfrak{q}'-\mathfrak{q}\cos W,$$

die (8.) verwandeln sich hier in:

(55. b.) $$\pm\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}=p+p'\cos W,\ \pm\frac{H}{\mathfrak{H}}\mathfrak{p}'=p\cos W+p' \quad \text{und} \quad \pm\frac{\mathfrak{H}}{H}p\sin^2 W=\mathfrak{p}-\mathfrak{p}'\cos W,\ \pm\frac{\mathfrak{H}}{H}p'\sin^2 W=\mathfrak{p}'-\mathfrak{p}\cos W,$$

und die (9. a. bis c.) werden hier:

(55. c.) $$\mathfrak{H}H=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}',\quad -\mathfrak{H}H=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}',\quad \mathfrak{H}^2=H^2=p\mathfrak{p}+p'\mathfrak{p}',$$

wo hier wie dort unter der Voraussetzung, dass für $\mathfrak{H}$ und H nur ihre positiven aus den Gleichungen (54. f.) sich ergebenden Werthe genommen werden, von den Gleichungen (55. a. und b.) nur die obern oder nur die untern Vorzeichen genommen werden dürfen, je nachdem die Projectionszahlen q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ auf einerlei oder auf gerade entgegengesetzte Richtungen sich beziehen, und von den Gleichungen (55. c.) die erste oder zweite benützt werden muss in den gleichen Fällen, wo in denen (55. a. und b.) das obere oder untere Vorzeichen das geforderte ist; dagegen tritt die dritte der Gleichungen (55. c.) statt einer der zwei ersten ein in dem besondern Falle, wo sich $H=\mathfrak{H}$ zeigt und zugleich die Projectionszahlen q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ auf einerlei Richtung hinführen. Hierbei treten alle die kurz vorher angezeigten Beziehungen auf das ebene System statt der dortigen auf das räumliche System ein. Selbst die den obigen eine Ebene im räumlichen Systeme darstellenden Gleichungen (1.), wenn sie combinirte waren, unter Umständen beigelegten Prädicate, womit ihre Vorzeichen als gleichartige oder sie selbst als nächste combinirte bezeichnet wurden, lassen sich hier wieder eben so auf die eine Gerade im ebenen Systeme darstellenden Gleichungen (54. d.), wenn es combinirte sind, in Anwendung bringen; man wird nämlich die Vorzeichen dieser Gleichungen als gleichartige zu bezeichnen haben, wenn die aus den Gleichungen (54. e.) unter Voraussetzung positiver Werthe von H und $\mathfrak{H}$ für q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ zu schöpfenden Zahlen einer und derselben dem ebenen Systeme zugehörigen Richtung entsprechen, und eben so wird man jene Gleichungen nächste combinirte zu nennen haben, wenn sie bei gleichartigen Vorzeichen für H und $\mathfrak{H}$ gleiche Zahlen liefern. Die oben (Seite 153.) gegebenen Kennzeichen, mit deren Hilfe die Beurtheilung, ob Gleichungen, wie die (1.) sind, gleichartige Vorzeichen haben oder nicht, und ob sie nächste combinirte sind oder nicht, ganz leicht geschehen kann, und wodurch man eben so leicht diese Eigenschaften den Gleichungen mittheilen kann, wenn sie nicht vorhanden

sind, lassen sich hier für die Gleichungen (54. d.) im ebenen Systeme wieder ganz so wie dort in Bezug auf das räumliche System aufsuchen; man gelangt so zu denselben Resultaten, nur mit dem Unterschiede, dass aus den in jenen Sätzen vorkommenden Ausdrücken die Glieder, welche p'', $\mathfrak{p}''$ oder q'', $\mathfrak{q}''$ in sich enthalten, den Relationen (54. b. und c.) zur Folge, ganz wegfallen müssen.

Nimmt man neben der einen dem ebenen Systeme angehörigen Geraden, deren combinirte Gleichungen die in (54. d.) angeschriebenen sind, noch eine zweite in die Betrachtung auf, deren combinirte Gleichungen die

$$\mathfrak{p}_0 x + \mathfrak{p}'_0 x' = \mathfrak{P}_0 \quad \text{und} \quad p_0 u + p'_0 u' = P_0 \tag{56. a.}$$

sein mögen, und versteht man unter $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$, q_0, q'_0, $\mathfrak{H}_0$ und H_0 genau das, was die Gleichungen (54. e. bis f.) dafür an die Hand geben, wenn man in ihnen die Grundzeichen $\mathfrak{p}$, p, $\mathfrak{q}$, q, $\mathfrak{H}$ und H mit dem Index 0 versieht, so bleiben auch alle übrigen in dieser Nummer mitgetheilten Gleichungen und Aussagen in Bezug auf diese zweite Gerade wahr, wenn man nur immer allen Grundbuchstaben den Index 0 beilegt, und es stellen $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$ und q_0, q'_0 die Projectionszahlen von einer der beiden Richtungen vor, welche dem ebenen Systeme angehören und auf der zweiten Geraden senkrecht stehen; bezeichnet daher θ den Winkel, welchen eine bestimmte von den zwei auf der ersten Geraden senkrechten Richtungen mit einer bestimmten von den beiden auf der zweiten Geraden senkrechten Richtungen macht, so ist immer

$$\pm\cos\theta = q\,\mathfrak{q}_0 + q'\mathfrak{q}'_0 \quad \text{und} \quad \pm\cos\theta = q_0\,\mathfrak{q} + q'_0\mathfrak{q}', \tag{56. b.}$$

und man wird in jeder dieser beiden Gleichungen unabhängig von der andern das obere Vorzeichen nehmen müssen, wenn die zwei Richtungen, auf welche sich die in ihr vorkommenden Projectionszahlen beziehen, entweder beide mit den Schenkeln des Winkels θ zusammenfallen oder beide die gerade entgegengesetzte Richtung dieser Schenkel einnehmen, hingegen wird man in jeder solchen Gleichung, unabhängig von der andern, das untere Vorzeichen nehmen müssen, wenn die eine der in ihr auftretenden Richtungen mit einem Schenkel des Winkels θ zusammenfällt, die andere dem andern Schenkel aber gerade entgegenläuft. Setzt man in die Gleichungen (56. b.) für q, q', $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ und q_0, q'_0, $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$ ihre nach Anleitung der Gleichungen (54. e.) sich ergebenden Werthe ein, so findet man:

$$\pm\cos\theta = \frac{1}{\mathfrak{H}_0\,H}(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0) \quad \text{und} \quad \pm\cos\theta = \frac{1}{\mathfrak{H}\,H_0}(p_0\,\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}'), \tag{56. c.}$$

und es gelten hinsichtlich der doppelten Vorzeichen die so eben angegebenen Regeln. Da θ unter solchen Umständen den spitzen oder stumpfen Winkel vorstellt, den zwei auf den beiden Geraden senkrecht stehende und in der Ebene des Systems liegende Richtungen mit einander bilden und dieser dem spitzen oder stumpfen Winkel gleich kommt, den die beiden Geraden mit einander machen, so ist es gleichgültig, welche von diesen zweierlei Bedeutungen man dem Winkel θ unterlegen will. — Man überzeugt sich übrigens leicht, dass zufolge der so eben hinsichtlich der doppelten Vorzeichen in den Gleichungen (56. b. oder c.) gegebenen Regeln in den beiden neben einander stehenden Gleichungen gleichzeitig das obere oder gleichzeitig das untere Vorzeichen genommen werden muss, wenn die Projectionszahlen q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, so wie die q_0, q'_0 und $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}'_0$ entweder gleichzeitig auf einerlei oder gleichzeitig auf gerade entgegengesetzte Richtungen hinführen, dass hingegen in der einen Gleichung das obere, in der andern Gleichung das untere Vorzeichen genommen werden muss, wenn das Projections-

zahlenpaar im einen Falle zu derselben, im andern Falle aber zu entgegengesetzten Richtungen hinführt. Das hier Gesagte lässt sich mit andern Worten auch so geben: Von den beiden in (56. c.) stehenden Gleichungen muss gleichzeitig das obere oder gleichzeitig das untere Vorzeichen genommen werden, je nachdem die combinirten Gleichungen der zwei betrachteten Geraden entweder in Bezug auf jede Gerade gleichartige oder in Bezug auf jede Gerade ungleichartige Vorzeichen haben, hingegen muss von der einen das obere und von der andern das untere Vorzeichen genommen werden, wenn die combinirten Gleichungen der einen Geraden gleichartige und die der andern Geraden ungleichartige Vorzeichen haben. Multiplicirt man nun die beiden Gleichungen (56. c.) mit einander, so erhält man:

(56. d.) $$\pm\cos^2\theta = \frac{1}{\mathfrak{H}_0 H_0 \mathfrak{H} H}(p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}'_0),$$

und es geht aus der so eben in Bezug auf die doppelten Vorzeichen gegebenen Regel hervor, dass in dieser Gleichung das obere Vorzeichen genommen werden müsse, wodurch sie

$$\cos^2\theta = \frac{1}{H\mathfrak{H} H_0 \mathfrak{H}_0}(p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}'_0)$$

wird, wenn die combinirten Gleichungen bei jeder Geraden entweder gleichartige oder ungleichartige Vorzeichen haben, und dass in ihr das untere Vorzeichen genommen werden müsse, wodurch sie

$$-\cos^2\theta = \frac{1}{H\mathfrak{H} H_0 \mathfrak{H}_0}(p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}')$$

wird, wenn die combinirten Gleichungen der einen Geraden gleichartige, die der andern Geraden ungleichartige Vorzeichen haben. Es ist aber nach Anleitung der Gleichungen (55. c.):

$$H\mathfrak{H} = \pm(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}') \quad \text{und} \quad H_0\mathfrak{H}_0 = \pm(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0),$$

und es muss in Folge der dort hinsichtlich der doppelten Vorzeichen gegebenen Regel in jeder dieser Gleichungen das obere oder untere Vorzeichen genommen werden, je nachdem die combinirten Gleichungen der Geraden, worauf sie sich beziehen, gleichartige oder ungleichartige Vorzeichen besitzen; multiplicirt man daher diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man:

$$H\mathfrak{H} H_0\mathfrak{H}_0 = \pm(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0),$$

und es muss in dieser das obere oder untere Vorzeichen in denselben Fällen genommen werden, wo es bei der Gleichung (56. d.) geschehen muss, woraus folgt, dass diese letztere Gleichung, wennn man in sie für $H\mathfrak{H} H_0\mathfrak{H}_0$ den hier erhaltenen Werth einsetzt, in jedem Falle wird

(57. a.) $$\cos^2\theta = \frac{(p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}')}{(p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0)},$$

und diese Gleichung nimmt, wenn die Gleichungen einer jeden von den zwei Geraden nächste combinirte sind, in welchen sowohl $H = \mathfrak{H}$ als $H_0 = \mathfrak{H}_0$ also auch $H\mathfrak{H}_0 = H_0\mathfrak{H}$ ist, und zugleich in jeder der beiden Gleichungen (56. c.) nur das obere Vorzeichen genommen werden darf, da θ in beiden denselben Winkel vorstellt, und also

(57. b.) $$p\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0 = p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}'$$

eine Folge von der Gleichung $H\mathfrak{H}_0 = H_0\mathfrak{H}$ ist, jede von den zwei nachstehenden Gestalten an:

$$\cos^2\theta = \frac{(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)^2}{(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0)} = \frac{(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}')^2}{(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0)}\,. \qquad \textbf{(57. c.)}$$

Wird $\cos\theta = 0$, so ist θ ein rechter Winkel, und dann stehen die beiden Geraden senkrecht auf einander. Dieses geschieht aber, wenn entweder

$$p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0 = 0 \quad \text{oder} \quad p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}' = 0 \qquad \textbf{(58.)}$$

ist, wobei jede von diesen Gleichungen schon in der andern enthalten ist, wie ein Blick auf die Gleichungen (56. c.) zu erkennen giebt; es trägt sonach jede der Bedingungen (58.) das Kennzeichen der senkrechten Stellung der beiden Geraden gegen einander in sich.

Wird $\cos^2\theta = 1$, also $\cos\theta = \pm 1$, so ist θ entweder null oder zweien Rechten gleich, in jedem dieser beiden Fälle laufen aber die zwei Geraden mit einander parallel. Diess geschieht also der Gleichung (57. a.) zur Folge im Allgemeinen, wenn

$$(p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)(p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}') = (p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0) \qquad \textbf{(59. a.)}$$

ist, und im Falle die beiden combinirten Gleichungspaare nächste sind, den Gleichungen (57. c.) gemäss, wenn

$$(p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0) = (p\,\mathfrak{p}_0 + p'\mathfrak{p}'_0)^2 \quad \text{oder} \quad (p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}')(p_0\mathfrak{p}_0 + p'_0\mathfrak{p}'_0) = (p_0\mathfrak{p} + p'_0\mathfrak{p}')^2 \qquad \textbf{(59. b.)}$$

ist, wo von den letzten beiden Gleichungen eine was die andere sagt. In den Bedingungen (59. a.) und (59. b.) sind die Kennzeichen der parallelen Lage zweier Geraden, welche durch Gleichungen von der in (56. a.) angegebenen Form dargestellt werden, enthalten. Aus ihnen lässt sich ein anderes einfacheres Verhalten herleiten, welches die Coeffizienten solcher Gleichungen unter sich einhalten müssen, wenn die durch die Gleichungen dargestellten Geraden mit einander parallel laufen sollen, das sich aus dem (17. c.) für Ebenen gefundenen ergiebt, wenn man die auf die dritte Axe des dem ebenen Systeme zu Grunde liegenden senkrechten sich beziehenden Projectionszahlen null sein lässt; man erhält so:

$$\mathfrak{p}_0 : \mathfrak{p}'_0 = \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' \quad \text{oder} \quad p_0 : p'_0 = p : p'. \qquad \textbf{(59. c.)}$$

Die in dieser Nummer angestellten Betrachtungen haben dargethan, dass alle der Geraden im ebenen Systeme zugehörigen Gleichungen sich aus denen für die Ebene im räumlichen Systeme gefundenen einfach dadurch erhalten lassen, dass man alle Coordinaten und Projectionszahlen an der dritten Axe verschwinden lässt, und dabei die Coordinaten der Puncte an den Axen A X und A X' als durch Linien in der Ebene des ebenen Systems, welche mit den Axen A X', A X parallel laufen, oder auf denen A X, A X' senkrecht stehen, erzeugt sich denkt, so wie die dort bei den Betrachtungen der Ebene zur Hilfe genommene auf ihr senkrechte Richtung hier als eine auf der Geraden senkrechte und in der Ebene des ebenen Systems liegende Richtung auffasst. Die Herleitungsweise der Formeln für die Gerade im ebenen Systeme aus denen für die Ebene im räumlichen Systeme ist eine völlig allgemeine, weswegen auch die Gleichung (11. d.) bei der Geraden im ebenen Systeme wird:

$$AS^2 = \frac{\mathfrak{P}\,P}{\mathfrak{p}\,p + \mathfrak{p}'p'}\,, \qquad \textbf{(60.)}$$

wenn A S den Abstand der Geraden von der Coordinatenspitze des ebenen Systems vorstellt.

Dritter Abschnitt.

Die Curve und Fläche im beliebigen Coordinatensystem.

§. 12.

Hülfssätze aus der Ableitungsrechnung enthaltend.

In die rechnende Behandlung der Curven oder Flächen gehen häufig Sätze aus der Differenzial- oder Ableitungsrechnung ein, deren für unsern Zweck wichtigste hier in der später stets gebrauchten Bezeichnungsweise aufgestellt werden sollen, und als Einleitung in das Folgende angesehen werden können.

A. Unmittelbar oder entwickelt gegebene Functionen.

106) Jeden durch irgend Rechnungsoperationen aus beliebig vielen Grössen zusammengesetzten Ausdruck kann man immer durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen, wozu wir in der Regel einen der folgenden φ, ψ, F, 𝔉, f, 𝔣 nehmen werden. Sieht man eine oder mehrere von den in einem solchen Ausdruck vorkommenden Grössen als solche an, von denen jede für sich ihren Werth ganz nach Belieben ändern kann, während man den übrigen in dem Ausdrucke vorkommenden Grössen Werthe zuschreibt, die stets dieselben bleiben, so nennt man jene die veränderlichen oder variablen Grössen, auch schlechtweg die Veränderlichen oder Variablen des Ausdrucks, diese hingegen dessen beständige oder constante Grössen, auch kurzweg dessen Beständige oder Constante. Da der hier angegebene Unterschied zwischen beständigen und veränderlichen Grössen blos in unserer Vorstellungsweise seinen Grund hat, und Grössen, die wir uns jetzt als veränderliche denken, ein andermal die Rolle von beständigen spielen können, so wie umgekehrt Grössen, die jetzt als beständige aufgefasst werden, später in unserer Vorstellung zu veränderlichen werden können, so wird es nöthig, um Verwechselungen der Prädicate zu vermeiden, diejenigen Grössen, welche man im Laufe einer Untersuchung als veränderliche ansieht, besonders hervorzuheben. Diess geschieht gewöhnlich dadurch, dass man die Buchstaben, womit die als veränderlich gedachten Grössen des Ausdrucks bezeichnet worden sind, demjenigen Buchstaben, der als Zeichen für den ganzen Ausdruck gewählt worden ist, rechts und etwas tiefer anhängt. So giebt φ_x zu verstehen, dass in dem Ausdruck φ die eine Grösse x als Veränderliche angesehen wird, $\varphi_{x,u}$ hingegen giebt zu verstehen, dass in dem Ausdruck φ die beiden Grössen x und u als Veränderliche angesehen werden und so fort, wenn drei und mehr Grössen des Ausdrucks veränderlich gedacht werden. Schon in den vorangegangenen Abschnitten und auch in der Folge noch sind die von uns gebrauchten Zeichen so gewählt worden, dass meistens alle Grössen, die gleichzeitig als Veränderliche oder als Beständige genommen werden, einen und denselben Buchstaben an sich tragen, der von einer zur andern blos mit einem Abzeichen (Accent) versehen

wird. Diese Eigenthümlichkeit unserer Zeichen macht es fast immer möglich, die in einem Ausdruck als veränderlich gedachten Grössen einfach dadurch anzudeuten, dass wir dem für den ganzen Ausdruck gewählten Buchstaben den einen Buchstaben anhängen, der allen Veränderlichen zum Grunde liegt. So giebt uns φ_x zu verstehen, dass in dem Ausdruck φ alle durch den Buchstaben x bezeichneten Grössen, die x, x', x''.... und von einander gänzlich verschieden sein können, als Veränderliche anzusehen sind. Hierbei haben wir uns freilich immer noch die Anzahl dieser Veränderlichen besonders zu merken, die sich jedoch jederzeit aus der Art einer jeden besondern Untersuchung gleichsam von selbst schon zu erkennen giebt, und daher bei Anwendungen kaum je noch besonders erwähnt zu werden braucht. Kommen in dem Ausdruck φ ausser den Veränderlichen x, x', x''.... auch noch die u, u', u''.... vor, so drücken wir diess durch $\varphi_{x,u}$ aus. Sollen in dem Ausdruck φ_x an die Stelle der Veränderlichen x, x', x''.... die Grössen ξ, ξ', ξ''.... treten, so geben wir diesen Umstand dadurch zu erkennen, dass wir φ_ξ anstatt φ_x schreiben; und $\varphi_{\xi,\eta}$ anstatt $\varphi_{x,u}$, wenn ausserdem auch noch η, η', η''.... an die Stelle von u, u', u''.... treten sollen, wobei es keinen Unterschied macht, ob man sich die Grössen ξ, ξ', ξ''.... und η, η', η''.... als Veränderliche oder als Beständige vorzustellen habe. Der Werth eines Ausdrucks ändert sich mit den Werthen seiner Veränderlichen zugleich, was wir dadurch auszusprechen pflegen, dass wir ihn eine Function von seinen Veränderlichen nennen.

107) Stellt φ_x eine Function der einen Veränderlichen x vor, so bezeichnen wir durch $\partial\varphi_x$ die Ableitung oder den Differenzialquotienten der Function φ_x, d. h. jene andere Function von x, welche man findet, indem man $x+h$ in den Ausdruck φ_x für x einsetzt, ihn hierauf in eine nach ganzen positiven Potenzen von h geordnete Reihe entwickelt, und den zur ersten Potenz von h gehörigen Coeffizienten nimmt. Die Ableitungs- oder Differenzialrechnung lehrt, wie sich $\partial\varphi_x$ aus φ_x immer durch höchst einfache Operationen erhalten lasse, durch welche Zahlverknüpfungen auch φ_x aus den darin vorkommenden Grössen entstanden sein mag. Die Ableitung von $\partial\varphi_x$ wird durch $\partial^2\varphi_x$, die von $\partial^2\varphi_x$ durch $\partial^3\varphi_x$ bezeichnet, und so fort.

Stellt φ_x eine Function der zwei Veränderlichen x und x' vor, so kann man Ableitungen dieser Function in Bezug auf die eine Veränderliche x oder in Bezug auf die andere x', oder auch theils in Bezug auf die x und theils in Bezug auf die x' nehmen wollen. Diess pflegt man dadurch anzudeuten, dass man über das Ableitungszeichen ∂ zuerst die Anzahl der in Bezug auf x hinter einander zu nehmenden Ableitungen setzt, und dann, durch ein Komma von jener getrennt, die Zahl der von diesem Resultate in Bezug auf x' hinter einander zu nehmenden. So bezeichnet, wenn m und n ganze positive Zahlen vorstellen, $\overset{m,n}{\partial}\varphi_x$ das Resultat von $m+n$ auf einander folgenden Ableitungen, von denen sich die m ersten auf die Veränderliche x, die n letztern auf die Veränderliche x' beziehen, wobei jedoch, wenn nach einer der beiden Veränderlichen gar nicht abgeleitet werden soll, anstatt der Zahl der auf sie sich beziehenden Ableitungen das Zeichen 0 gesetzt werden muss, damit man immer wisse, auf welche Veränderliche die daneben stehende Zahl zu beziehen sei. Eben so bezeichnet man, wenn φ_x eine Function der drei Veränderlichen x, x', x'' anzeigt, und m, n, p ganze positive Zahlen vor-

stellen, durch $\overset{m,n,p}{\partial}\varphi_x$ das Resultat von m + n + p Ableitungen, von denen die m ersten auf die Veränderliche x, die n folgenden auf die Veränderliche x', die p letzten auf die Veränderliche x'' Bezug nehmen, und 0 an die Stelle von einer dieser Zahlen tritt, wenn gar keine Ableitung in Bezug auf die Veränderliche, zu der sie gehört, vorgenommen werden soll. Aehnlich verfährt man bei noch mehr Veränderlichen, die denselben Buchstaben an sich tragen. Diese Bezeichnungsweise kann zu keiner Unbestimmtheit Anlass geben, weil in der Ableitungsrechnung dargethan wird, dass das Resultat solcher Ableitungen, von deren Aufeinanderfolge gänzlich unabhängig ist. Solche Ableitungen, die immer nur die eine von mehrern unabhängig Veränderlichen in einer Function treffen, oder jetzt nur die eine und später nur die andere, pflegt man mit dem Namen von Partialableitungen zu belegen. Wo Ableitungen von einer Function $\varphi_{x,u}$, im Sinne der in Nr. 106. besprochenen Bezeichnungsweise genommen, theils in Bezug auf die Veränderlichen x, x', x''...., theils in Bezug auf die Veränderlichen u, u', u''...., geschehen sollten, da könnte man sich noch immer einer der vorigen analogen Bezeichnungsweise bedienen. So würde $\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{x,u}$ das Resultat von m + n + p + q + r Ableitungen anzeigen, von denen sich die m, n, p ersten auf die Veränderlichen x, x,' x'', die q, r folgenden hingegen auf die Veränderlichen u, u' beziehen. Sollen in dergleichen Ableitungsresultaten die Grössen ξ, ξ', ξ'' an die Stelle derer x, x', x'' treten, so schreibt man, um dieses anzudeuten, $\overset{m,n,p}{\partial}\varphi_\xi$ oder $\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{\xi,u}$ anstatt $\overset{m,n,p}{\partial}\varphi_x$ oder $\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{x,u}$, und sollen auch noch die Grössen η, η' an die Stelle derer u, u' treten, so schreibt man, um dieses anzuzeigen, $\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{\xi,\eta}$ anstatt $\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{x,u}$. Offenbar kann man hierbei, so lange die Grössen ξ, ξ', ξ'' oder η, η' noch völlig unbestimmt bleiben, und ihr Buchstabe nicht schon von beständigen Grössen des Ausdrucks in Besitz genommen worden ist, die Ableitungen, welche zu dem Resultate

$$\overset{m,n,p}{\partial}\overset{q,r}{\partial}\varphi_{\xi,\eta}$$

führen, eben sowohl auf die Grössen ξ, ξ', ξ'' und η, η', als auf die x, x', x'' und u, u' beziehen; ja selbst wenn ξ, ξ', ξ'' oder η, η' Ziffernwerthe oder auch die Null vorzustellen haben, kann man die Ableitungen doch noch auf sie sich beziehen lassen, wenn man sie bis nach vollführtem Ableiten blos als Typen ansieht, die man bis dahin durch irgend ein Mittel von einander und von den Beständigen des Ausdrucks unterscheidet und bezüglich derselben erst nach vollendetem Ableiten Werthverknüpfungen unter sich und mit den übrigen Grössen des Ausdrucks eingehen lässt. Wir werden in der Folge zur Vereinfachung des Druckes die Kommata zwischen den über dem Ableitungszeichen stehenden Zahlen weglassen, was zu keiner Undeutlichkeit führen kann, da nirgends Zahlen mit zusammengesetzten Zeichen als Ableitungsindexe vorkommen; wo diess aber geschehen sollte, hat man die Kommata an ihre Stelle hin zu setzen.

108) Aus der Differenzial- oder Ableitungsrechnung ist bekannt, dass, wenn φ_x eine Function der einen Veränderlichen x vorstellt, die Gleichung

(1. a.) $$\varphi_x = \varphi_\xi + \partial\varphi_\xi x_0 + \partial^2\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \partial^3\varphi_\xi \frac{x_0^3}{1.2.3} + \cdots,$$

oder, wenn φ_x eine Function der beiden Veränderlichen x und x′ vorstellt, die Gleichung

$$\varphi_x = \varphi_\xi + [\overset{10}{\partial}\varphi_\xi x_0 + \overset{01}{\partial}\varphi_\xi x'_0] + \left[\overset{20}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\varphi_\xi x_0 x'_0 + \overset{02}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0'^2}{1.2}\right]$$
$$+ \left[\overset{30}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^3}{1.2.3} + \overset{21}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} x'_0 + \overset{12}{\partial}\varphi_\xi x_0 \frac{x_0'^2}{1.2} + \overset{03}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0'^3}{1.2.3}\right] + \cdots \qquad \textbf{(1. b.)}$$

und dass eben so die ähnlich gebildeten Gleichungen, wenn φ_x drei oder mehr Veränderliche in sich trägt, auf beiden Seiten identisch gleiche Ausdrücke darstellen, wenn in den auf ihrer linken Seite stehenden Ausdrücken für x, x′, x″.... die durch nachstehende Gleichungen bestimmten Summen

$$x = \xi + x_0, \quad x' = \xi' + x'_0, \quad x'' = \xi'' + x''_0 \ldots. \qquad \textbf{(2.)}$$

gesetzt werden. Hierbei ist es ganz einerlei, ob die Theile ξ und x_0, ξ' und x'_0, ξ'' und x''_0...., in welche die Veränderlichen x, x′, x″.... zerlegt worden sind, beide selbst wieder als Veränderliche angesehen werden, oder ob man unter den einen Theilen beständige und unter den andern veränderliche Grössen sich denkt. Nimmt man beiderlei Theile als Veränderliche an, so enthalten die Gleichungen (1. a.), (1. b.) u. s. f., wenn man $\xi + x_0$, $\xi' + x'_0$, $\xi'' + x''_0$.... an die Stelle von x, x′, x″.... setzt, den Satz in sich, welchen man den verallgemeinerten Taylorschen Satz zu nennen pflegt; denkt man sich hingegen die Theile ξ, ξ', ξ''.... als constante Grössen, und schreibt den Gleichungen (2.) gemäss $x - \xi$, $x' - \xi'$, $x'' - \xi''$.... an die Stelle von x_0, x'_0, x''_0...., so erhält man den Satz, welcher der verallgemeinerte Maclaurinsche Satz genannt wird, beide nach den Namen ihrer ersten Erfinder so genannt.

Man kann die Gleichungen (1. a.), (1. b.).... auch so schreiben:

$$\varphi_x - \varphi_\xi = \partial\varphi_\xi x_0 + \partial^2\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \partial^3\varphi_\xi \frac{x_0^3}{1.2.3} + \cdots \qquad \textbf{(3. a.)}$$

$$\varphi_x - \varphi_\xi = [\overset{10}{\partial}\varphi_\xi x_0 + \overset{01}{\partial}\varphi_\xi x'_0] + \left[\overset{20}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\varphi_\xi x_0 x'_0 + \overset{02}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0'^2}{1.2}\right]$$
$$+ \left[\overset{30}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^3}{1.2.3} + \overset{21}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0^2}{1.2} x'_0 + \overset{12}{\partial}\varphi_\xi x_0 \frac{x_0'^2}{1.2} + \overset{03}{\partial}\varphi_\xi \frac{x_0'^3}{1.2.3}\right] + \cdots \qquad \textbf{(3. b.)}$$

und so fort. Denkt man sich in diesen Gleichungen sämmtliche Theile ξ und x_0, ξ' und x'_0, ξ'' und x''_0.... als Veränderliche, so zeigen sie, wie die Werthunterschiede einer und derselben Function für verschiedene Werthe der in ihr enthaltenen Veränderlichen, durch die Unterschiede der diesen Veränderlichen beigelegten Werthe selbst ausgedrückt werden können. Die in dieser Nummer aufgestellten Gleichungen haben sämmtlich eine unbedingte Gültigkeit, so lange der Ausdruck φ sowohl zwischen ξ und x_0 als zwischen ξ' und x'_0 und zwischen ξ'' und x''_0 endlich und stetig bleibt, wobei sich von selbst versteht, dass er innerhalb dieser Grenzen seine Zusammensetzungsweise nicht verändern darf.

109) Stellt φ_x eine Function der einen Veränderlichen x vor und f_u eine Function der einen Veränderlichen u; denkt man sich ferner in der Function φ_x an die Stelle von x die Function f_u gesetzt, so geht diese Function von x in eine andere von u über, die wir durch ψ_u bezeichnen wollen, und man hat den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss:

$$\text{(4. a.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \partial\psi_u &= \partial\varphi_x \, \partial f_u \\ \partial^2\psi_u &= \partial^2\varphi_x (\partial f_u)^2 + \partial\varphi_x \, \partial^2 f_u \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

Stellt aber φ_x eine Function der zwei Veränderlichen x und x′ vor und f_u, f'_u zwei von einander verschiedene Functionen, von denen jede die beiden Veränderlichen u und u′ in sich enthält; denkt man sich ferner in der Function φ_x an die Stelle von x und x′ die Functionen f_u und f'_u gesetzt, so geht dadurch diese Function von x und x′ in eine andere von u und u′ über, die wir durch ψ_u bezeichnen wollen, und man hat den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss:

$$\text{(4. b.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{10}{\partial}\psi_u &= \overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial} f_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial} f'_u , \\ \overset{01}{\partial}\psi_u &= \overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial} f_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial} f'_u , \\ \overset{20}{\partial}\psi_u &= \overset{20}{\partial}\varphi_x (\overset{10}{\partial} f_u)^2 + 2\overset{11}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial} f_u \overset{10}{\partial} f'_u + \overset{02}{\partial}\varphi_x (\overset{10}{\partial} f'_u)^2 + \overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{20}{\partial} f_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{20}{\partial} f'_u , \\ \overset{11}{\partial}\psi_u &= \overset{20}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial} f_u \overset{01}{\partial} f_u + \overset{11}{\partial}\varphi_x (\overset{10}{\partial} f_u \overset{01}{\partial} f'_u + \overset{10}{\partial} f'_u \overset{01}{\partial} f_u) + \overset{02}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial} f'_u \overset{01}{\partial} f'_u + \overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{11}{\partial} f_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{11}{\partial} f'_u , \\ \overset{02}{\partial}\psi_u &= \overset{20}{\partial}\varphi_x (\overset{01}{\partial} f_x)^2 + 2\overset{11}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial} f_u \overset{01}{\partial} f'_u + \overset{02}{\partial}\varphi_x (\overset{01}{\partial} f'_u)^2 + \overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{02}{\partial} f_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{02}{\partial} f'_u , \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned} \right.$$

Aehnliche Gleichungen lassen sich noch bilden, wenn die Function φ_x drei oder mehr von den Veränderlichen x, x′, x″.... in sich enthält, und durch die Gleichungen

$$x = f_u , \quad x' = f'_u , \quad x'' = f''_u , \ldots .$$

in eine Function ψ_u von eben so vielen der Veränderlichen u, u′, u″.... übergeführt wird.

B. Durch Gleichungen oder unentwickelt gegebene Functionen.

110) Wenn eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen gegeben ist, so wird durch diese Gleichung die eine der beiden Veränderlichen zu einer Function der andern gemacht, die man finden würde, wenn man jene Veränderliche als unbekannte Grösse in der Gleichung, alles Uebrige dagegen als bekannt ansähe, und dann diese Unbekannte durch Auflösen der Gleichung bestimmte. Ist aber eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen gegeben, so wird durch diese Gleichung jede der Veränderlichen zu einer Function der beiden übrigen gemacht, die man durch Auflösen der Gleichung erhielte, wenn man jene Veränderliche als die einzige unbekannte Grösse in ihr ansähe, und so fort, wenn eine Gleichung zwischen vier oder mehr Veränderlichen gegeben wird. Ist z. B. die Gleichung $\varphi_{x,u} = 0$ zwischen den zwei Veränderlichen x und u gegeben, so kann man u als Function von x ansehen, was man dem so eben über die Bezeichnung der Functionen Vorgebrachten gemäss, wenn man u gleich für den Buchstaben nähme, welcher den für u durch Auflösen zu findenden Ausdruck in x bezeichnet, durch u_x an-

zeigen könnte; aber eben sowohl hätte man auch x als eine Function von u ansehen und durch x_u bezeichnen können. Ist hingegen z. B. die Gleichung $\varphi_{x,u,z} = 0$ zwischen den drei Veränderlichen x, u, z gegeben, so könnte man z als Function von x und u darstellen, und zufolge der gleichen Bezeichnungsregeln durch $z_{x,u}$ andeuten, oder u als Function von x und z gedacht durch $u_{x,z}$, oder endlich x als Function von u und z genommen durch $x_{u,z}$ bezeichnen, und so fort bei einer Gleichung zwischen vier und mehr Veränderlichen. Man nennt diejenigen in Gleichungen vorkommenden oder sonst wie in Verbindung unter einander gedachten Veränderlichen, welche man sich als Functionen der andern denkt, abhängig Veränderliche; unabhängig Veränderliche hingegen solche, die man sich nicht als Functionen von andern vorstellt. Wenn aber bei der von uns gebrauchten Bezeichnungsweise $\varphi_x = 0$ eine Gleichung zwischen den beiden Veränderlichen x und x′ vorstellt, so müsste man nach Art der so eben besprochenen Bezeichnungsweise x′, als Function von x gedacht, durch x'_x, oder, wenn $\varphi_x = 0$ eine Gleichung zwischen den drei Veränderlichen x, x′, x″ darstellt und man wollte x″ als Function von x und x′ ansehen, so müsste diess durch x''_x angedeutet werden im Sinne der in Nr. 106. eingeführten Bezeichnungsweise, und ähnlich müsste die Bezeichnung bei noch mehr Veränderlichen geschehen. In diesem letztern Falle jedoch, wo die Veränderlichen stets denselben Buchstaben in sich tragen, der schon im Functionszeichen vorkommt, ist dessen Wiederholung völlig überflüssig, und es genügt die blose Angabe des Functionszeichens schon vollkommen, wenn dazu noch die Abzeichen, welche die durch den gleichen Buchstaben vorgestellten unabhängig Veränderlichen an sich tragen, gefügt werden. Ja sogar die Beifügung dieser Abzeichen kann wegfallen, wenn wir darin mit einander übereinkommen, wie wir jetzt thun wollen, dass immer nur die Veränderliche, bei welcher der Buchstabe die meisten Accente hat, als Function der übrigen angesehen wird, denn dann sind bei einem solchen Functionszeichen immer alle diejenigen veränderlichen Grössen als unabhängige hinzu zu denken, welche der gleiche Buchstabe mit Accenten in geringerer Anzahl als das Functionszeichen hat, hergiebt. Diesem gemäss haben wir uns immer in der Function x′ die eine Veränderliche x, in der x″ die zwei Veränderlichen x und x′, in der x‴ die drei Veränderlichen x, x′, x″ zu denken u. s. f. Nach diesen Bestimmungen stellt sich nun die Bedeutung der Zeichen $\overset{m}{\eth}\, x'$, $\overset{m,n}{\eth}\, x''$, $\overset{m,n,p}{\eth}\, x'''$ ganz von selbst heraus.

Wenn gleichzeitig 2 Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen, 3 Gleichungen zwischen 4 Veränderlichen, 4 Gleichungen zwischen 5 Veränderlichen u. s. f. gegeben wären, so würden durch diese Gleichungen alle Veränderlichen bis auf eine zu Functionen dieser einen gemacht, wie man sogleich einsieht, wenn man mit Ausnahme dieser einen Veränderlichen alle übrigen in den Gleichungen als unbekannte Grössen ansieht, die sich dann durch Auflösen der Gleichungen, weil deren gerade so viele als Unbekannte sind, als Ausdrücke, worin nur noch die eine Veränderliche vorkommt, darstellen lassen. Eben so würden, wenn 2 Gleichungen zwischen 4 Veränderlichen, oder 3 Gleichungen zwischen 5 Veränderlichen, oder 4 Gleichungen zwischen 6 Veränderlichen gegeben wären, alle diese Veränderlichen bis auf zwei zu Functionen dieser zwei gemacht werden, wie sich ganz auf die gleiche Weise einsehen lässt. Allgemein kann man sich überzeugen, dass, wenn m Gleichungen zwischen m + n Veränderlichen gegeben sind, m von diesen Veränderlichen durch die m Gleichungen zu Functionen der n übri-

gen Veränderlichen gemacht werden. Tragen in einem solchen Falle alle Veränderlichen einen und denselben Buchstaben an sich, und unterscheiden sie sich von einander nur durch die diesem Buchstaben beigegebenen Abzeichen, so scheint unsere bisherige Bezeichnung mangelhaft zu werden. Sind z. B. 3 Gleichungen zwischen den 6 Veränderlichen x, x', x'', x''', x^{IV} und x^{V} gegeben, so dass 3 von ihnen zu Functionen der übrigen 3 werden, und wählen wir zu diesen letztern, dem so eben getroffenen Uebereinkommen gemäss, die x, x', x'', so müssen wir x''', x^{IV} und x^{V} als Functionen der Veränderlichen x, x', x'' auffassen, und man erkennt jetzt nicht mehr aus dem Functionszeichen x^{IV} oder x^{V} allein die in diesen Ausdrücken vorkommenden Veränderlichen mittelst der vorhin angegebenen Regel. Erwägt man jedoch, dass, wie schon in Nr. 106. angegeben worden ist, die Anzahl der unabhängig Veränderlichen, derjenigen nämlich, die nicht wieder als Functionen von andern aufgefasst werden, sich aus der Art einer jeden besondern Untersuchung gleichsam von selber schon zu erkennen giebt, so überzeugt man sich, dass sogar in einem solchen Falle die von uns eingeführte Bezeichnung zu keiner Unbestimmtheit Anlass geben kann.

111) Wenn in der Gleichung

$$\varphi_x = 0$$

die beiden Veränderlichen x und x' vorkommen, und demgemäss x' als Function von x genommen wird, so hätte diese Function, wenn sie durch Auflösen der Gleichung, x' als Unbekannte nehmend, gefunden worden wäre, der Natur der Gleichungen zufolge die Eigenschaft, dass sie, an die Stelle von x' in den Ausdruck φ_x eingesetzt, diesen vernichtete, so dass in ihm kein x mehr, es sei denn blos scheinbar, zurückbliebe. Deswegen muss nicht nur die erste, sondern auch jede der folgenden Ableitungen des Ausdrucks φ_x, in welchem man sich an die Stelle von x' die genannte Function von x geschrieben denkt, nach dem dann in ihm nur noch scheinbar vorhandenen x genommen, null geben, so dass man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss hat:

$$\text{(5. a.)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \overset{10}{\partial}\varphi_x + \overset{01}{\partial}\varphi_x\,\partial x' = 0\,, \\ \overset{20}{\partial}\varphi_x + 2\overset{11}{\partial}\varphi_x\,\partial x' + \overset{02}{\partial}\varphi_x\,(\partial x')^2 + \overset{01}{\partial}\varphi_x\,\partial^2 x' = 0\,, \\ \quad \text{u. s. f.,} \end{cases}$$

in welchen Gleichungen man sich stets unter x' die so eben beschriebene Function von x zu denken hat. Diese Gleichungen sind deshalb von so grosser Wichtigkeit, weil sie lehren, wie die Ableitungen $\partial x'$, $\partial^2 x'$, ... der Function x' sich darstellen lassen, ohne dass diese Function selbst gefunden zu sein braucht, und daher in vielen Fällen in den Stand setzen, die mit dem Auflösen der Gleichungen verknüpften Schwierigkeiten zu umgehen. Bezeichnet man zur Abkürzung $\dfrac{\overset{10}{\partial}\varphi_x}{\overset{01}{\partial}\varphi_x}$ durch φ'_x, so ändern sich die vorstehenden Gleichungen um in:

$$\text{(5. b.)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \varphi'_x + \partial x' = 0\,, \\ \overset{10}{\partial}\varphi'_x + \overset{01}{\partial}\varphi'_x\,\partial x' + \partial^2 x' = 0 \\ \quad \text{u. s. f.,} \end{cases}$$

in welchen φ'_x eine mit der Gleichung $\varphi_x = 0$ zugleich gegebene Function von x und x′ vorstellt.

Sucht man aus der ersten der vorstehenden Gleichungen (5. a.) den Werth von $\partial x'$ auf und nimmt von der so sich ergebenden Gleichung auf einander folgende Ableitungen nach x, dabei immer x′ und seine Ableitungen als Functionen von x ansehend, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \partial x' &= -\frac{\overset{10}{\partial}\varphi_x}{\overset{01}{\partial}\varphi_x}, \\ \partial^2 x' &= \frac{\overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{11}{\partial}\varphi_x - \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{20}{\partial}\varphi_x + (\overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{02}{\partial}\varphi_x - \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{11}{\partial}\varphi_x)\partial x'}{(\overset{01}{\partial}\varphi_x)^2} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.\ c.)$$

oder, wenn das Gleiche bei den Gleichungen (5. b.) geschieht:

$$\left.\begin{aligned} &\partial x' + \varphi'_x = 0 \\ &\partial^2 x' + \overset{10}{\partial}\varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial}\varphi'_x = 0 \\ &\text{u. s. f.,} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5.\ d.)$$

welches nichts anders als wieder die Gleichungen (5. a.) und (5. b.) sind, nur in etwas abgeänderter Gestalt, und wie jene die Ableitungen von x′ lediglich aus dem gegebenen Ausdruck φ_x hervorgehen lassen, wenn man in jede folgende, bevor man sie aufs Neue ableitet, für $\partial x'$ seinen aus der ersten entnommenen Werth einsetzt.

112) Wenn in der Gleichung

$$\varphi_x = 0$$

die drei Veränderlichen x, x′, x″ vorkommen und demgemäss x″ als Function von x und x′ genommen wird, so hätte diese Function, wenn sie durch Auflösen der Gleichung, x″ als Unbekannte in ihr nehmend, gefunden worden wäre, der Natur der Gleichungen zufolge die Eigenschaft, dass sie, anstatt x″ in den Ausdruck φ_x eingesetzt, diesen vernichtete, so dass in ihm weder x noch x′ mehr anders als blos scheinbar zurückbleiben könnte. Deswegen müssen die nach x oder x′ genommenen Ableitungen des Ausdrucks φ_x, wenn man in diesem unter x″ die genannte Function von x und x′ sich vorstellt, sämmtlich null geben, so dass man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss hat:

$$\overset{100}{\partial}\varphi_x + \overset{001}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial}x'' = 0 \quad \text{und} \quad \overset{010}{\partial}\varphi_x + \overset{001}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial}x'' = 0\,,$$

woraus man findet:

$$\overset{10}{\partial}x'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial}x'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} \qquad (6.\ a.)$$

und durch weiter fortgesetztes Ableiten dieser Gleichungen nach x oder x′, jedesmal für $\overset{10}{\partial}x''$ oder $\overset{01}{\partial}x''$, da wo sie entstehen, ihre durch die vorstehenden Gleichungen gegebenen Werthe einsetzend, findet man $\overset{20}{\partial}x''$, $\overset{11}{\partial}x''$, $\overset{02}{\partial}x''$ u. s. f. lediglich aus dem gegebenen Ausdruck φ_x hervorgehend. Setzt man hier der Kürze halber

$$\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi'_x \quad \text{und} \quad \frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi''_x\,,$$

so verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen (6. a.) in:

(6. b.) $$0=\varphi'_x+\overset{10}{\partial}x'' \quad \text{und} \quad 0=\varphi''_x+\overset{01}{\partial}x'',$$

in welchen φ'_x und φ''_x Functionen von x, x', x'' vorstellen, die als mit der Gleichung $\varphi_x=0$ selbst gegeben zu erachten sind. Leitet man die Gleichungen (6. b.) aufs Neue nach den unabhängig Veränderlichen x oder x' ab, so ergeben sich:

(6. c.) $$\left\{\begin{array}{l} 0=\overset{100}{\partial}\varphi'_x+\overset{001}{\partial}\varphi'_x\overset{10}{\partial}x''+\overset{20}{\partial}x'', \\ 0=\overset{010}{\partial}\varphi'_x+\overset{001}{\partial}\varphi'_x\overset{01}{\partial}x''+\overset{11}{\partial}x'', \\ 0=\overset{100}{\partial}\varphi''_x+\overset{001}{\partial}\varphi''_x\overset{10}{\partial}x''+\overset{11}{\partial}x'', \\ 0=\overset{010}{\partial}\varphi''_x+\overset{001}{\partial}\varphi''_x\overset{01}{\partial}x''+\overset{02}{\partial}x'', \end{array}\right.$$

welche mit Zuziehung derer (6. b.) übergehen in:

(6. d.) $$\left\{\begin{array}{l} 0=\overset{100}{\partial}\varphi'_x-\varphi'_x\overset{001}{\partial}\varphi'_x+\overset{20}{\partial}x'', \\ 0=\overset{010}{\partial}\varphi'_x-\varphi''_x\overset{001}{\partial}\varphi'_x+\overset{11}{\partial}x'', \\ 0=\overset{100}{\partial}\varphi''_x-\varphi'_x\overset{001}{\partial}\varphi''_x+\overset{11}{\partial}x'', \\ 0=\overset{010}{\partial}\varphi''_x-\varphi''_x\overset{001}{\partial}\varphi''_x+\overset{02}{\partial}x'', \end{array}\right.$$

und von denen die beiden, welche $\overset{11}{\partial}x''$ enthalten, zu erkennen geben, dass zwischen den Grössen φ'_x und φ''_x die Bedingungsgleichung:

(6. e.) $$\overset{010}{\partial}\varphi'_x-\varphi''_x\overset{001}{\partial}\varphi'_x=\overset{100}{\partial}\varphi''_x-\varphi'_x\overset{001}{\partial}\varphi''_x$$

statt finde. Durch weiter fortgesetztes Ableiten käme man zu Gleichungen, in denen $\overset{30}{\partial}x''$, $\overset{21}{\partial}x''$, $\overset{12}{\partial}x''$, $\overset{03}{\partial}x''$ u. s. f. auftreten.

Man sieht leicht ein, wie verfahren werden müsste, wenn in der Gleichung $\varphi_x=0$ mehr als drei Veränderliche vorkämen.

113) Wenn gleichzeitig die zwei Gleichungen

$$\varphi_x=0 \quad \text{und} \quad \Phi_x=0$$

zwischen den drei Veränderlichen x, x', x'' gegeben sind, und man demgemäss x' und x'' als Functionen von x annimmt, so hätten diese Functionen, wenn sie durch Auflösen der beiden Gleichungen, x' und x'' als Unbekannte in ihnen ansehend, gefunden worden wären, der Natur der Gleichungen zufolge die Eigenschaft, dass sie anstatt x' und x'' in die Ausdrücke φ_x und Φ_x eingesetzt diese vernichteten, so dass kein x mehr anders als blos scheinbar in ihnen zurückbliebe. Deswegen müssen die nach x genommenen Ableitungen dieser Ausdrücke, wenn man sich dabei unter x' und x'' die genannten Functionen von x vorstellt, null geben, so dass man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss hat:

(7. a.) $$\left\{\begin{array}{l} \overset{100}{\partial}\varphi_x+\overset{010}{\partial}\varphi_x\,\partial x'+\overset{001}{\partial}\varphi_x\,\partial x''=0 \quad \text{und} \\ \overset{100}{\partial}\Phi_x+\overset{010}{\partial}\Phi_x\,\partial x'+\overset{001}{\partial}\Phi_x\,\partial x''=0. \end{array}\right.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen einmal $\partial x'$ und ein andermal $\partial x''$, so erhält man zwei andere Gleichungen, in deren einer blos $\partial x'$ und deren anderer blos $\partial x''$ vorhanden ist, so dass man diese Ableitungen wie folgt ausgedrückt erhält:

$$\left.\begin{aligned} \partial x' &= -\frac{\overset{001}{\partial}\varphi_x \overset{100}{\partial}\Phi_x - \overset{100}{\partial}\varphi_x \overset{001}{\partial}\Phi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x \overset{010}{\partial}\Phi_x - \overset{010}{\partial}\varphi_x \overset{001}{\partial}\Phi_x} \\ \text{und} \qquad & \\ \partial x'' &= -\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x \overset{100}{\partial}\Phi_x - \overset{100}{\partial}\varphi_x \overset{010}{\partial}\Phi_x}{\overset{010}{\partial}\varphi_x \overset{001}{\partial}\Phi_x - \overset{001}{\partial}\varphi_x \overset{010}{\partial}\Phi_x}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.\ b.)$$

wodurch man die Ableitungen $\partial x'$ und $\partial x''$ unmittelbar durch die beiden gegebenen Ausdrücke φ_x und Φ_x darstellen kann. Setzt man auch hier wieder der Kürze wegen sowohl

$$\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi'_x \quad \text{und} \quad \frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi''_x$$

als

$$\frac{\overset{100}{\partial}\Phi_x}{\overset{001}{\partial}\Phi_x} = \Phi'_x \quad \text{und} \quad \frac{\overset{010}{\partial}\Phi_x}{\overset{001}{\partial}\Phi_x} = \Phi''_x,$$

so verwandeln sich die Gleichungen (7. a.) in:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_x + \varphi''_x\,\partial x' + \partial x'' &= 0 \\ \text{und} \qquad & \\ \Phi'_x + \Phi''_x\,\partial x' + \partial x'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.\ c.)$$

und diese liefern anstatt der Gleichungen (7. b.) die:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_x - \Phi'_x + (\varphi''_x - \Phi''_x)\,\partial x' &= 0 \\ \text{und} \qquad & \\ \varphi''_x\Phi'_x - \varphi'_x\Phi''_x + (\varphi''_x - \Phi''_x)\,\partial x'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7.\ d.)$$

Nimmt man von diesen Gleichungen immer wieder neue Ableitungen nach x, jedesmal für $\partial x'$ und $\partial x''$, da wo sie entstehen, ihre Werthe aus den vorstehenden Gleichungen einsetzend, so gelangt man zu Ausdrücken für $\partial^2 x'$, $\partial^3 x'$, ... sowohl als für $\partial^2 x''$, $\partial^3 x''$, ... welche sämmtlich blos die gegebenen Functionen φ'_x und Φ'_x so wie φ''_x und Φ''_x in sich aufnehmen. So z. B. erhält man für die zweite Ableitung von x':

$$\begin{aligned} &(\varphi''_x - \Phi''_x)\,[(\varphi''_x - \Phi''_x)(\overset{100}{\partial}\varphi'_x - \overset{100}{\partial}\Phi'_x) - (\varphi'_x - \Phi'_x)(\overset{100}{\partial}\varphi''_x - \overset{100}{\partial}\Phi''_x)] \\ &-(\varphi'_x - \Phi'_x)\,[(\varphi''_x - \Phi''_x)(\overset{010}{\partial}\varphi'_x - \overset{010}{\partial}\Phi'_x) - (\varphi'_x - \Phi'_x)(\overset{010}{\partial}\varphi''_x - \overset{010}{\partial}\Phi''_x)] \\ &-(\varphi''_x\Phi'_x - \varphi'_x\Phi''_x)\,[(\varphi''_x - \Phi''_x)(\overset{001}{\partial}\varphi'_x - \overset{001}{\partial}\Phi'_x) - (\varphi'_x - \Phi'_x)(\overset{001}{\partial}\varphi''_x - \overset{001}{\partial}\Phi''_x)] \\ &+(\varphi''_x - \Phi''_x)^3\,\partial^2 x' = 0. \end{aligned} \qquad (7.\ e.)$$

Eben so lassen sich, wenn 3 Gleichungen zwischen 4 Veränderlichen, oder 4 Gleichungen zwischen 5 Veränderlichen u. s. f. gegeben sind, und dadurch alle Veränderlichen bis auf eine zu Functionen dieser einen werden, die Ableitungen dieser Functionen nach der einen unabhängig gebliebenen Veränderlichen unmittelbar durch die in den Gleichungen gegebenen Ausdrücke darstellen.

Immer auf dem gleichen Wege fortschreitend gelangt man zu der Ueberzeugung, dass, wenn m Gleichungen zwischen $m+n$ Veränderlichen gegeben sind und dadurch m Veränderliche zu Functionen der n übrigen gemacht werden, man die Partialableitungen dieser Functionen nach den unabhängig gebliebenen Veränderlichen unmittelbar durch die mit den Gleichungen selbst gegebenen Ausdrücke darstellen könne.

114) Man wird dadurch, dass man die Ableitungen von verwickelt gegebenen Functionen darstellen kann, ohne dass diese Functionen erst durch Auflösen der Gleichungen in entwickelter Form aufgefunden zu werden brauchen, weiter in den Stand gesetzt, Umwandlungen solcher verwickelt gegebener Functionen von der Art, wie sie durch die Gleichungen (3. a.) und (3. b.) für entwickelt gegebene Functionen aufgestellt worden sind, ganz in der gleichen Weise vorzunehmen.

Ist nämlich x' eine durch eine Gleichung verwickelt gegebene Function von x, und setzen wir $x=\xi+x_0$, wodurch x in die beiden Theile ξ und x_0 zerlegt wird, zugleich aber auch $x'=\xi'+x'_0$, wo ξ' das vorstellt, was aus x' wird, wenn ξ für x gesetzt wird, so dass x'_0 den Werthunterschied der Function x' für die beiden Werthe x und ξ der in ihr vorkommenden unabhängig Veränderlichen anzeigt, so ist der Gleichung (3. a.) zufolge:

(9. a.) $$x'_0=\partial\xi' x_0+\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}+\partial^3\xi'\frac{x_0^3}{1.2.3}+\ldots\ldots,$$

durch welche Gleichung man den Werthunterschied x'_0 oder $x'-\xi'$ der verwickelt gegebenen Function als völlig gegeben anzusehen berechtigt wird, da sich die Ableitungen $\partial x'$, $\partial^2 x'\ldots$, sonach auch die $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$,.... nach dem in Nr. 111. Vorgebrachten unmittelbar aus der gegebenen Gleichung erhalten lassen.

Ist x'' eine durch eine Gleichung verwickelt gegebene Function von x und x', und setzt man $x=\xi+x_0$, $x'=\xi'+x'_0$, wodurch jede der beiden unabhängig Veränderlichen in zwei Theile zerlegt wird; lässt man aber zugleich auch $x''=\xi''+x''_0$ sein, wobei ξ'' das vorstellt, was aus der Function x'' wird, wenn in ihr ξ und ξ' für x und x' gesetzt werden, so dass x''_0 den Werthunterschied anzeigt, den diese Function hergiebt, wenn einmal x und x', ein andermal ξ und ξ' an die Stelle der in ihr vorkommenden zwei unabhängig Veränderlichen treten, so ist der Gleichung (3. b.) zufolge:

$$x''_0=\Big[\overset{10}{\partial}\xi'' x_0+\overset{01}{\partial}\xi'' x'_0\Big]+\Big[\overset{20}{\partial}\xi''\frac{x_0^2}{1.2}+\overset{11}{\partial}\xi'' x_0 x'_0+\overset{02}{\partial}\xi''\frac{x_0'^2}{1.2}\Big]$$

(9. b.) $$+\Big[\overset{30}{\partial}\xi''\frac{x_0^3}{1.2.3}+\overset{21}{\partial}\xi''\frac{x_0^2}{1.2}x'_0+\overset{12}{\partial}\xi'' x_0\frac{x_0'^2}{1.2}+\overset{03}{\partial}\xi''\frac{x_0'^3}{1.2.3}\Big]+\cdots$$

durch welche Gleichung man den Werthunterschied x''_0 oder $x''-\xi''$ als völlig gegeben ansehen darf, da sich die Partialableitungen $\overset{10}{\partial}x''$, $\overset{01}{\partial}x''$, $\overset{20}{\partial}x''$, $\overset{11}{\partial}x''$, $\overset{02}{\partial}x''$,.... sonach auch die $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$, $\overset{20}{\partial}\xi''$, $\overset{11}{\partial}\xi''$, $\overset{02}{\partial}\xi''$,.... nach dem in Nr. 112. Vorgebrachten unmittelbar aus der gegebenen Gleichung erhalten lassen.

Aehnlich könnte man verfahren, wenn die durch eine Gleichung verwickelt gegebene Function von 3 und mehr unabhängig Veränderlichen abhängig gemacht würde.

115) Sind x' und x'' durch zwei vorhandene Gleichungen verwickelt gegebene Functionen von x, und setzt man $x=\xi+x_0$, wodurch x in die beiden Theile ξ und x_0 zerlegt wird, zugleich aber auch $x'=\xi'+x'_0$ und $x''=\xi''+x''_0$, wobei ξ' und ξ'' das vorstellen, was aus

x' und x'' wird, wenn in diesen Functionen von x die Grösse ξ an die Stelle von x tritt, so dass x'_0 und x''_0 die Werthunterschiede anzeigen, welche aus jeder der Functionen x' und x'' hervorgehen, wenn einmal der Werth x, ein andermal der ξ an die Stelle der in ihnen vorkommenden unabhängig Veränderlichen tritt, so ist der Gleichung (3. a.) zufolge sowohl

$$\left.\begin{aligned} x'_0 &= \partial\xi' x_0 + \partial^2\xi' \frac{x_0^2}{1.2} + \partial^3\xi' \frac{x_0^3}{1.2.3} + \cdots \\ \text{als auch}\quad x''_0 &= \partial\xi'' x_0 + \partial^2\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \partial^3\xi'' \frac{x_0^3}{1.2.3} + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(9. c.)}$$

durch welche Gleichungen man die Werthunterschiede x'_0 und x''_0 oder $x'-\xi'$ und $x''-\xi''$, welche sich auf die verwickelt gegebenen Functionen x' und x'' beziehen, als völlig gegeben ansehen darf, da sich die Ableitungen $\partial x'$, $\partial^2 x'$, $\partial^3 x'$,.... und $\partial x''$, $\partial^2 x''$, $\partial^3 x''$,.... sonach auch die $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$, $\partial^3\xi'$,.... und $\partial\xi''$, $\partial^2\xi''$, $\partial^3\xi''$,.... nach dem in Nr. 113. Vorgebrachten unmittelbar aus den gegebenen Gleichungen erhalten lassen.

Es lässt sich aus dem Bisherigen mit Leichtigkeit entnehmen, dass ähnliche Umwandlungen einer jeden irgend wie durch Gleichungen verwickelt gegebenen Function immer in der gleichen Weise geschehen können, wesshalb wir Betrachtungen dieser Art nicht noch weiter zu verfolgen brauchen.

C. Aenderungen in der Art und Weise, wie man sich die Veränderlichen von einander abhängig denkt.

116) Wenn in der Gleichung

$$\varphi_{x,u} = 0$$

blos die beiden Veränderlichen x und u vorkommen, so kann man die eine u als Function von x ansehen, aber eben so gut auch die x als Function von der u, und die erstere müsste im Sinne der in dieser Einleitung besprochenen Bezeichnungsweise durch u_x, die andere durch x_u bezeichnet werden. Im erstern Falle kann man von Ableitungen der Function u nach der unabhängig Veränderlichen x, im andern Falle von Ableitungen der Function x nach der unabhängig Veränderlichen u reden, und es muss zwischen diesen beiderlei Ableitungen ein durch die Gleichung selbst vermittelter Zusammenhang statt finden, der jetzt angegeben werden soll. Sehen wir u als Function von x an, so ist der ersten der in (5. c.) aufgestellten Gleichungen zufolge

$$\partial u_x = -\frac{\overset{1\,0}{\partial}\varphi_{x,u}}{\overset{0\,1}{\partial}\varphi_{x,u}},$$

wenn an ihr die der gegenwärtigen Bezeichnung entsprechende Abänderung vorgenommen wird; sehen wir hingegen x als Function von u an, so ist in Folge derselben Gleichung

$$\partial x_u = -\frac{\overset{0\,1}{\partial}\varphi_{x,u}}{\overset{1\,0}{\partial}\varphi_{x,u}}$$

und durch Multiplication dieser beiden findet man:

$$\partial u_x \partial x_u = 1, \qquad \textbf{(10. a.)}$$

woraus folgt, dass das Product dieser beiderlei Ableitungen stets 1 giebt, und sich demnach die eine Ableitung auf eine höchst einfache Weise aus der andern erhalten lässt.

Es ist hier dem Buchstaben, der die Veränderliche bezeichnet, welche als Function der mit einem andern Buchstaben bezeichneten Veränderlichen angesehen wird, zur grössern Deutlichkeit und um Worterläuterungen entbehren zu können, dieser letztere Buchstabe angehängt worden; indessen werden wir in Fällen, wo nur zweierlei Buchstaben vorkommen, wie hier x und u, dieses Anhängen dadurch überflüssig machen, dass wir anstatt des Ableitungszeichens ∂ das andere δ vor den Buchstaben setzen, der die abzuleitende Function bezeichnet, so dass jedesmal, wo δ zum Ableitungszeichen genommen wird, der bei ihm stehende Buchstabe nicht, sondern der zweite von den vorhandenen Buchstaben als Zeichen der unabhängig Veränderlichen zu nehmen ist. Diese Regel befolgend können wir den Satz (10. a.) so schreiben:

(10. b.) $$\delta u \, \delta x = 1.$$

Leitet man diese Gleichung, δu als Function von x und δx als Function von u ansehend, nach x ab, so erhält man:

(10. c.) $$\delta^2 u \, \delta x + (\delta u)^2 \delta^2 x = 0$$

und wenn man nach u ableitet:

(10. d.) $$\delta u \, \delta^2 x + (\delta x)^2 \delta^2 u = 0,$$

welche letztere Gleichung man auch aus der ihr vorangehenden durch Multiplication mit δx mit Rücksichtnahme auf die Gleichung (10. b.) hätte erhalten können. Durch nochmaliges Ableiten der Gleichung (10. c.) nach x in dem angezeigten Sinne findet man:

(10. e.) $$\delta x \, \delta^3 u + 3 \delta u \, \delta^2 u \, \delta^2 x + (\delta u)^3 \delta^3 x = 0,$$

welche durch Multiplication mit δx und $(\delta x)^2$ mit Rücksichtnahme auf die Gleichung (10. b.) sich überführen lässt in:

(10. f.) $$(\delta x)^2 \delta^3 u + 3 \delta^2 u \, \delta^2 x + (\delta u)^2 \delta^3 x = 0$$

und in:

(10. g.) $$(\delta x)^3 \delta^3 u + 3 \delta x \, \delta^2 u \, \delta^2 x + \delta u \, \delta^3 x = 0.$$

117) Dieselbe Bezeichnungsweise lässt sich mit derselben vollen Sicherheit und Selbstverständlichkeit auch da anwenden, wo ausser den beiden von einander abhängig gemachten Grössen x und u noch andere $x', x'', \ldots$ als Functionen von x und wieder andere $u', u'', \ldots$ als Functionen von u vorkommen. Sieht man nämlich x als Function von u an, so muss man $x', x'', \ldots$ als mittelbare Functionen von u ansehen, deren Ableitungen dann durch $\delta x', \delta x'', \ldots$ bezeichnet werden; sieht man dagegen u als Function von x an, so muss man $u', u'', \ldots$ als mittelbare Functionen von x ansehen, deren Ableitungen wir dann durch $\delta u', \delta u'', \ldots$ bezeichnen. Wir bedienen uns in beiden Fällen des Ableitungszeichens δ aus dem Grunde, weil sich die Ableitungen auf eine Grösse beziehen, die durch einen andern Buchstaben vorgestellt wird, als die abzuleitende. Bei der so festgesetzten Bezeichnungsweise hat man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss:

(11. a.) $$\delta x' = \partial x' \, \delta x, \quad \delta x'' = \partial x'' \, \delta x, \ldots \quad \text{und} \quad \delta u' = \partial u' \, \delta u, \quad \delta u'' = \partial u'' \, \delta u \ldots$$

Im Sinne der so eben eingeführten Bezeichnungsweise sollen in der Folge durch $\overset{10}{\delta} u$ und $\overset{01}{\delta} u$ die Ableitungen von u als Function von zweien, durch einen andern Buchstaben bezeichneten Veränderlichen x und x' aufgefasst, nach der einen und nach der andern dieser zwei Veränderlichen genommen, bezeichnet werden, wobei die über dem Ableitungszeichen δ stehenden Ziffern der Reihe nach sich auf die unabhängig gedachten Veränderlichen x, x' beziehen,

wie sie vom mindest accentuirten Buchstaben x zu den mehr accentuirten auf einander folgen. Man sieht auf der Stelle ein, wie sich diese Bezeichnungsweise auch dann noch völlig sicher gebrauchen lässt, wenn u eine Function von mehr als zwei solchen Veränderlichen x, x′, x″.... vorstellt und wenn höhere als erste Ableitungen derselben genommen werden sollen; denn stellt u eine Function der drei Veränderlichen x, x′, x″ vor, so sind dem Gesagten zufolge die Zeichen $\overset{100}{\delta}u$, $\overset{010}{\delta}u$, $\overset{001}{\delta}u$, $\overset{200}{\delta}u$, $\overset{110}{\delta}u$, $\overset{020}{\delta}u$ u. s. w. von selbst verständlich. In diesem Sinne hat man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss, wenn man sich u″ als Function von u und u′, diese letztern dagegen wieder als Functionen von x und x′ vorstellt:

$$\overset{10}{\delta}u'' = \overset{10}{\partial}u''\,\overset{10}{\delta}u + \overset{01}{\partial}u''\,\overset{10}{\delta}u' \quad \text{und} \quad \overset{01}{\delta}u'' = \overset{10}{\partial}u''\,\overset{01}{\delta}u + \overset{01}{\partial}u''\,\overset{01}{\delta}u' \tag{11. b.}$$

und, wenn man sich u‴ als Function von u, u′, u″, diese letztern aber selbst wieder als Functionen von x, x′, x″ vorstellt, hat man:

$$\left.\begin{array}{c} \overset{100}{\delta}u''' = \overset{100}{\partial}u'''\,\overset{100}{\delta}u + \overset{010}{\partial}u'''\,\overset{100}{\delta}u' + \overset{001}{\partial}u'''\,\overset{100}{\delta}u'', \quad \overset{010}{\delta}u''' = \overset{100}{\partial}u'''\,\overset{010}{\delta}u + \overset{010}{\partial}u'''\,\overset{010}{\delta}u' + \overset{001}{\partial}u'''\,\overset{010}{\delta}u'', \\ \overset{001}{\delta}u''' = \overset{100}{\partial}u'''\,\overset{001}{\delta}u + \overset{010}{\partial}u'''\,\overset{001}{\delta}u' + \overset{001}{\partial}u'''\,\overset{001}{\delta}u''. \end{array}\right\} \tag{11. c.}$$

Stellen u und u′ beliebige Zusammensetzungen von x und x′ vor, wie sie durch die Gleichungen

$$u = F_x \quad \text{und} \quad u' = f_x$$

gegeben werden, in denen F_x sowohl als f_x beliebige Functionen von x und x′ anzeigen, und denkt man sich in diesen Gleichungen x und x′ als unbekannt, alles Uebrige hingegen als bekannt, so würde man durchs Auflösen derselben in Bezug auf die beiden Unbekannten x und x′ diese als Functionen von u und u′ dargestellt erhalten, welche in die vorstehenden Gleichungen an die Stelle von x und x′ gesetzt, diese Gleichungen identisch machen würden, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist; fasst man daher F_x und f_x in dem Sinne auf, dass man sich in ihnen an die Stelle von x und x′ die angegebenen Functionen von u und u′ gesetzt denkt, so muss die Ableitung von F_x nach u und nach u′ geben 1 und 0, so wie auch die Ableitung von f_x nach u′ und nach u geben muss 1 und 0, d. h. es muss sein:

$$1 = \overset{10}{\partial}F_x\,\overset{10}{\delta}x + \overset{01}{\partial}F_x\,\overset{10}{\delta}x' \quad \text{und} \quad 1 = \overset{10}{\partial}f_x\,\overset{01}{\delta}x + \overset{01}{\partial}f_x\,\overset{01}{\delta}x',$$

so wie

$$0 = \overset{10}{\partial}F_x\,\overset{01}{\delta}x + \overset{01}{\partial}F_x\,\overset{01}{\delta}x' \quad \text{und} \quad 0 = \overset{10}{\partial}f_x\,\overset{10}{\delta}x + \overset{01}{\partial}f_x\,\overset{10}{\delta}x',$$

wodurch eine bestimmte von den Functionen F_x und f_x abhängige Relation zwischen $\overset{10}{\delta}x$ und $\overset{10}{\delta}x'$ und zwischen $\overset{01}{\delta}x$ und $\overset{01}{\delta}x'$ festgestellt wird, welche man im Sinne der bisherigen Bezeichnungen auch so schreiben kann:

$$1 = \overset{10}{\delta}u\,\overset{10}{\delta}x + \overset{01}{\delta}u\,\overset{10}{\delta}x' \quad \text{und} \quad 1 = \overset{10}{\delta}u'\,\overset{01}{\delta}x + \overset{01}{\delta}u'\,\overset{01}{\delta}x', \tag{12. a.}$$

so wie

$$0 = \overset{10}{\delta}u\,\overset{01}{\delta}x + \overset{01}{\delta}u\,\overset{01}{\delta}x' \quad \text{und} \quad 0 = \overset{10}{\delta}u'\,\overset{10}{\delta}x + \overset{01}{\delta}u'\,\overset{10}{\delta}x'. \tag{12. b.}$$

Stellen

$$x = \mathfrak{F}_u \quad \text{und} \quad x' = \mathfrak{f}_u$$

die Resultate vor, welche man durchs Auflösen der obigen Gleichungen erhielte, wenn man sich in diesen blos x und x′ als Unbekannte dächte, und wendet man auf diese Gleichungen die eben durchgeführten Betrachtungen aufs Neue an, so gelangt man zu den folgenden Relationen:

(12. c.) $$1=\overset{10}{\delta}x\,\overset{10}{\delta}u+\overset{01}{\delta}x\,\overset{10}{\delta}u' \quad\text{und}\quad 1=\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}u+\overset{01}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}u',$$

so wie

(12. d.) $$0=\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}u+\overset{01}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}u' \quad\text{und}\quad 0=\overset{10}{\delta}x'\,\overset{10}{\delta}u+\overset{01}{\delta}x'\,\overset{10}{\delta}u',$$

welche aus den vorigen durch eine wechselseitige Vertauschung der Grössen x, x' und u, u' mit einander hervorgehen und auch unmittelbar aus den Gleichungen (12. a. und b.) gefunden werden können. Eliminirt man nämlich aus den ersten der Gleichungen (12. a.) und (12. b.) einmal die Grösse $\overset{10}{\delta}u$ und ein andermal die Grösse $\overset{01}{\delta}u$, so erhält man:

$$\overset{01}{\delta}x=-\overset{01}{\delta}u(\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x) \quad\text{und}\quad \overset{01}{\delta}x'=\overset{10}{\delta}u(\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x)$$

und eben so giebt die Elimination der Grössen $\overset{10}{\delta}u'$ und $\overset{01}{\delta}u'$ aus den letzten der genannten Gleichungen

$$\overset{10}{\delta}x=\overset{01}{\delta}u'(\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x) \quad\text{und}\quad \overset{10}{\delta}x'=-\overset{10}{\delta}u'(\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x),$$

woraus sich sogleich die folgenden ergeben:

(12. e.) $$-\frac{\overset{01}{\delta}x}{\overset{01}{\delta}u}=\frac{\overset{01}{\delta}x'}{\overset{10}{\delta}u}=\frac{\overset{10}{\delta}x}{\overset{01}{\delta}u'}=-\frac{\overset{10}{\delta}x'}{\overset{10}{\delta}u'}=\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x,$$

mittelst welcher sich nun die erwähnten Ueberführungen mit der grössten Leichtigkeit bewirken lassen; eliminirt man dagegen aus den Gleichungen (12. a.) und (12. b.) die Grössen $\overset{10}{\delta}x$, $\overset{01}{\delta}x$ und $\overset{10}{\delta}x'$, $\overset{01}{\delta}x'$, so erhält man auf die gleiche Weise, oder auch durch eine blose Vertauschung der Grössen x, x' und u, u' mit einander:

(12. f.) $$-\frac{\overset{01}{\delta}u}{\overset{01}{\delta}x}=\frac{\overset{01}{\delta}u'}{\overset{10}{\delta}x}=\frac{\overset{10}{\delta}u}{\overset{01}{\delta}x'}=-\frac{\overset{10}{\delta}u'}{\overset{10}{\delta}x'}=\overset{10}{\delta}u\,\overset{01}{\delta}u'-\overset{10}{\delta}u'\,\overset{01}{\delta}u.$$

Die Gleichungen (12. e.) und (12. f.) liefern ferner:

(12. g.) $$(\overset{10}{\delta}x\,\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\,\overset{01}{\delta}x)(\overset{10}{\delta}u\,\overset{01}{\delta}u'-\overset{10}{\delta}u'\,\overset{01}{\delta}u)=1$$

und:

(12. h.) $$\frac{\overset{10}{\delta}x'}{\overset{01}{\delta}x}=\frac{\overset{10}{\delta}u'}{\overset{01}{\delta}u},\quad \frac{\overset{10}{\delta}x}{\overset{01}{\delta}x'}=\frac{\overset{01}{\delta}u'}{\overset{10}{\delta}u} \quad\text{und}\quad \frac{\overset{01}{\delta}x'}{\overset{01}{\delta}x}=-\frac{\overset{10}{\delta}u}{\overset{01}{\delta}u},\quad \frac{\overset{10}{\delta}x}{\overset{10}{\delta}x'}=-\frac{\overset{01}{\delta}u'}{\overset{10}{\delta}u'},\quad \frac{\overset{01}{\delta}x}{\overset{10}{\delta}x}=-\frac{\overset{01}{\delta}u}{\overset{01}{\delta}u'},\quad \frac{\overset{01}{\delta}x'}{\overset{10}{\delta}x'}=-\frac{\overset{10}{\delta}u}{\overset{10}{\delta}u'},$$

von welchen letztern je drei schon in den drei übrigen enthalten sind. Leitet man die Gleichungen (12. a.) und (12. b.) wiederholt nach x, x' und u, u' ab, so erhält man Relationen, die zwischen den höhern Partialableitungen von x, x' und u, u' statt finden und mittelst der Gleichungen, aus denen sie entstanden sind, auf unsäglich viele Arten sich abändern lassen.

118) Da, wo durch eine Anzahl von Gleichungen eben so viele Veränderliche zu Functionen der noch übrigen gemacht werden, bringt es zuweilen Vortheil, diese unabhängig Veränderlichen selbst wieder als Functionen von Grössen anzusehen, die gar nicht unter den in der Untersuchung durch Zeichen eingeführten vorkommen und dadurch die abhängig Veränderlichen zu mittelbaren Functionen dieser neuen Grössen werden zu lassen. Diese Vorstellungs-

weise bringt den Vortheil, dass man zu jeder Zeit über diese unbestimmt gelassenen Grössen ganz nach Gefallen und so verfügen kann, wie es die jedesmaligen Umstände als am räthlichsten erscheinen lassen. In diesem Falle kann man dann von Ableitungen einer jeden Veränderlichen nach diesen neuen Grössen sprechen, deren Zeichen ganz unbestimmt bleiben, nur dass dazu nicht solche gewählt werden dürfen, die in der Untersuchung schon zu andern Zwecken verbraucht worden sind. Wir können daher neue Zeichen für diese neuen Grössen dadurch ganz entbehrlich machen, dass wir in solchen Fällen ein von den bisherigen verschiedenes Ableitungszeichen einführen, wozu wir das d wählen wollen. So gibt also $\overset{m}{d} x''$ die mte Ableitung der Veränderlichen x″ nach einer beliebigen unter den vorhandenen gar nicht vorkommenden Grösse zu erkennen, $\overset{m,n}{d} u'''$ giebt das Resultat von $m+n$ auf einander folgenden Ableitungen der Veränderlichen u‴ zu verstehen, von welchen die m ersten sich auf eine, die n andern auf eine zweite von jener verschiedene Grösse sich beziehen, deren beider Zeichen ausserhalb der schon in die Untersuchung aufgenommenen ganz nach Belieben gewählt werden kann, aber eben deswegen auch ganz ungewählt bleiben darf.

Diess vorausgeschickt sieht man nun ohne Mühe ein, dass, wenn bei irgend einer Untersuchung x′, x″, x‴.... als Functionen von x gedacht werden müssen, und man will x selbst wieder als Function einer neuen Grösse ansehen, die Ableitung dieser Function nach dieser neuen Grösse, auch wenn beide, jene Function sowohl als diese Grösse, nicht weiter bestimmt werden, doch durch dx angegeben werden wird, während die Veränderlichen x′, x″, x‴.... dieselben Functionen von dieser neuen unbestimmt gelassenen Function bleiben müssen, die sie zuvor von der noch unabhängig gedachten Veränderlichen x waren, und also mittelbare Functionen der neu eingeführten Grösse werden, daher hat man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss:

$$dx' = \eth x' \, dx \,, \quad dx'' = \eth x'' \, dx \,, \quad dx''' = \eth x''' \, dx \,, \ldots \qquad \textbf{(13. a.)}$$

oder

$$\eth x' = \frac{dx'}{dx} \,, \quad \eth x'' = \frac{dx''}{dx} \,, \quad \eth x''' = \frac{dx'''}{dx} \,, \ldots \qquad \textbf{(13. b.)}$$

Leitet man diese Gleichungen noch einmal nach der neu eingeführten Grösse ab, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \eth^2 x' \, dx &= \frac{dx\, d^2x' - dx'\, d^2x}{(dx)^2} \quad \text{oder} \quad \eth^2 x' = \frac{dx\, d^2x' - dx'\, d^2x}{(dx)^3} \,, \\ \eth^2 x'' \, dx &= \frac{dx\, d^2x'' - dx''\, d^2x}{(dx)^2} \quad \text{oder} \quad \eth^2 x'' = \frac{dx\, d^2x'' - dx''\, d^2x}{(dx)^3} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(13. c.)}$$

und ganz auf dieselbe Weise lassen sich auch die noch höhern Ableitungen von x′, x″, x‴.... nach x in Ableitungen derselben Veränderlichen und der x nach der neuen, ganz unbestimmt gelassenen, unabhängig Veränderlichen ausdrücken.

Hätte man sich hingegen in irgend einer begonnenen Untersuchung die Veränderlichen x″, x‴,.... als Functionen der beiden unabhängig gebliebenen x und x′ gedacht, und man wollte diese an einer beliebigen Stelle der Untersuchung selbst wieder als noch unbestimmt gelassene Zusammensetzungen von zwei neuen unabhängig bleibenden Veränderlichen sich denken, die vorläufig mit den übrigen Grössen der Aufgabe in gar keine Beziehung gebracht werden sollen, so müsste man jetzt die Veränderlichen x″, x‴,.... als dieselben Functionen dieser

unbestimmt gelassenen Zusammensetzungen auffassen, die sie vorher von x und x′ waren, weswegen man den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss hat:

(13. d.) $$\overset{10}{d} x'' = \overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{d} x + \overset{01}{\partial} x'' \overset{10}{d} x' \quad \text{und} \quad \overset{01}{d} x'' = \overset{10}{\partial} x'' \overset{01}{d} x + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{d} x',$$

und jede der andern abhängig Veränderlichen liefert ein dem hier gegebenen völlig ähnliches Paar von Gleichungen, das sich aus dem vorstehenden dadurch ergiebt, dass man für x'' die spätere Veränderliche x''' oder x^{iv} u. s. f. setzt. Aus den Gleichungen (13. d.) lassen sich die Partialableitungen von x'' nach x und x′, nämlich $\overset{10}{\partial} x''$ und $\overset{01}{\partial} x''$, finden, und man erhält:

(13. e.) $$\overset{10}{\partial} x'' = \frac{\overset{10}{d} x'' \overset{01}{d} x' - \overset{01}{d} x'' \overset{10}{d} x'}{\overset{10}{d} x \overset{01}{d} x' - \overset{01}{d} x \overset{10}{d} x'} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} x'' = \frac{\overset{10}{d} x'' \overset{01}{d} x - \overset{01}{d} x'' \overset{10}{d} x}{\overset{01}{d} x \overset{10}{d} x' - \overset{10}{d} x \overset{01}{d} x'}$$

und durch Verwechselung von x'' mit x''', x^{iv}, ... erhält man die den übrigen abhängig Veränderlichen zugehörigen Gleichungen, welche wir aus diesem Grunde füglich weglassen können. Auch kann man durch wiederholtes Ableiten der Gleichungen (13. e.) und der diesen ähnlichen nach den neu eingeführten unabhängig Veränderlichen die höhern Partialableitungen von x'', x'''.... nach x und x′ durch Ableitungen derselben Veränderlichen und der x und x′ nach den neu eingeführten Veränderlichen ausdrücken. Wollte oder müsste man sich im gegenwärtigen Falle die beiden unabhängig Veränderlichen x und x′ nicht als beliebige Functionen von zwei neuen unbestimmt gelassenen Grössen, sondern als zwei verschiedene Zusammensetzungen von einer und derselben unbestimmt gelassenen neuen Grösse denken, so wären dadurch die abhängig Veränderlichen x'', x'''.... zu Functionen dieser zwei beliebigen Zusammensetzungen, also unbestimmte mittelbare Functionen der einen neu eingeführten Grösse geworden, und die Ableitungsrechnung hätte jetzt an die Stelle der beiden Gleichungen (13. d.) nur die eine:

(14.) $$d x'' = \overset{10}{\partial} x'' d x + \overset{01}{\partial} x'' d x'$$

setzen können, oder die, welche sich durch Vertauschung von x'' mit x''', x^{iv},.... aus der vorstehenden ergeben, wodurch die Partialableitungen $\overset{10}{\partial} x''$, $\overset{01}{\partial} x''$ oder $\overset{10}{\partial} x'''$, $\overset{01}{\partial} x'''$,.... sich nicht mehr einzeln bestimmen liessen, aber doch eine Relation zwischen je zweien derselben festgestellt würde. Man sieht leicht ein, wie die hier begonnenen Betrachtungen sich gestalten, wenn anstatt der beiden x und x′ die drei unabhängig Veränderlichen x, x′, x″ oder auch noch mehr vorhanden gewesen wären.

Hätte man endlich im Geiste einer begonnenen Untersuchung die Veränderlichen x′, x″,... als Functionen der einen x angesehen, diese letztere aber selbst wieder als eine Zusammensetzung von einer als unabhängig genommenen Grösse u, die in der Aufgabe schon bestimmt worden ist, und man wollte u von einer ausserhalb den Grössen der Aufgabe liegenden und vorläufig gänzlich unbestimmt gelassenen neuen Grösse abhängig machen, so hätte man sich unter u eine unbestimmte Zusammensetzung dieser neuen Grösse vorzustellen und unter x, x′, x″... dieselben Functionen dieser unbestimmt gebliebenen Zusammensetzung, welche sie zuvor von u waren, so dass man x als eine mittelbare Function der unbestimmt gelassenen Grösse und x′, x″,.... als Functionen von dieser mittelbaren Function sich zu denken hätte, weswegen die Ableitungsrechnung unter solchen Umständen und im Sinne der von uns eingeführten Bezeichnungen gäbe:

(15. a.) $$d x = \delta x \, d u, \quad d x' = \partial x' d x, \quad d x'' = \partial x'' d x, \ldots.$$

woraus man fände:

$$\delta x = \frac{dx}{du}, \quad \delta x' = \frac{dx'}{dx}, \quad \delta x'' = \frac{dx''}{dx}, \ldots \qquad \textbf{(15. b.)}$$

oder auch, weil

$$\delta x' = \delta x' \delta x, \quad \delta x'' = \delta x'' \delta x, \ldots$$

ist:

$$\delta x = \frac{dx}{du}, \quad \delta x' = \frac{dx'}{du}, \quad \delta x'' = \frac{dx''}{du} \ldots \qquad \textbf{(15. c.)}$$

Leitet man die Gleichungen (15. b.) wiederholt nach der neu eingeführten, ausserhalb den Grössen der Aufgabe gewählten unabhängig Veränderlichen ab, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 x \; du &= \frac{du\, d^2x - dx\; d^2u}{(du)^2}, \\ \delta^2 x' \; dx &= \frac{dx\, d^2x' - dx'\; d^2x}{(dx)^2}, \\ \delta^2 x'' \; dx &= \frac{dx\, d^2x'' - dx''\; d^2x}{(dx)^2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(15. d.)}$$

und so weiter, und die Gleichungen (15. c.) liefern durch die gleiche Behandlung:

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 x &= \frac{du\, d^2x - dx\; d^2u}{(du)^3}, \\ \delta^2 x' &= \frac{du\, d^2x' - dx'\; d^2u}{(du)^3}, \\ \delta^2 x'' &= \frac{du\, d^2x'' - dx''\; d^2u}{(du)^3} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(15. e.)}$$

und so fort. Auf demselben Wege fortgehend, lassen sich auch die dritten und höhern Ableitungen von x, x', x''... nach u darstellen.

119) Die vorstehenden Nummern zeigen in allgemeinster Weise, welcher Zusammenhang zwischen den Ableitungen der Functionen, bei welchen man sich nach und nach eine stets abgeänderte Abhängigkeitsweise der in ihnen vorkommenden Grössen vorstellt, statt findet; bevor wir aber diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch die Abhängigkeitsübertragungen in der besondern Form durchnehmen, in der sie bei Anwendungen der Ableitungsrechnung auf Gegenstände, welche im Raume erscheinen, aufzutreten pflegen, weil wir so eine öftere Wiederholung derselben Betrachtungen im Laufe der später folgenden Untersuchung zu vermeiden hoffen dürfen. Stellt zuvörderst

$$\varphi_x = 0 \qquad \textbf{(16. a.)}$$

eine Gleichung zwischen den zwei Veränderlichen x und x' vor, in der wir x' als Function von x ansehen, so dass auf sie die vorhin in Nr. 111. aufgestellte Gleichung

$$\delta x' + \varphi'_x = 0 \qquad \textbf{(16. b.)}$$

anwendbar ist, wenn φ'_x wie dort den Quotienten $\frac{\overset{10}{\partial}\varphi_x}{\underset{01}{\partial}\varphi_x}$ vorstellt. Werden hierauf die Grössen

x und x′ von zwei andern u und u′ abhängig gemacht durch die beiden Gleichungen vom ersten Grade:

(16. c.) $$x = \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u' \quad \text{und} \quad x' = \mu'_0 + \mu'_1 u + \mu'_2 u',$$

in welchen μ_0, μ_1, μ_2 und μ'_0, μ'_1, μ'_2 beliebige constante Grössen vorzustellen haben, und setzt man für x und x′ in die Gleichung (16. a.) ihre durch die Gleichungen (16. c.) gegebenen Ausdrücke in u und u′ ein, so verwandelt sich jene Gleichung in eine andere

(17. a.) $$\psi_u = 0,$$

welche mit der erstern einerlei Inhalt hat, aber anstatt x und x′ treten in ihr u und u′ auf. Durch diese letztere Gleichung, wenn man sie für sich betrachtet, wird u′ zu einer Function von u gemacht, für welche der obern Gleichung (5. b.) zufolge

(17. b.) $$\partial u' + \psi'_u = 0$$

ist, wenn ψ'_u den Quotienten $\frac{\overset{10}{\partial} \psi_u}{\underset{01}{\partial} \psi_u}$ vorstellt. Denkt man sich die Gleichungen (16. c.) nach den als unbekannt betrachteten Grössen u und u′ aufgelöst, so kommen zwei andere Gleichungen vom ersten Grade

(17. c.) $$u = \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x' \quad \text{und} \quad u' = \nu'_0 + \nu'_1 x + \nu'_2 x'$$

zum Vorschein, welche mit denen (16. c.) einen und denselben Inhalt haben, und in denen wieder ν_0, ν_1, ν_2 und ν'_0, ν'_1, ν'_2 constante Grössen vorstellen. Diese letztern Gleichungen besitzen die Eigenschaft, dass, wenn man an die Stelle von u und u′ ihre durch sie in x und x′ gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (17. a.) einsetzt, diese sich wieder in die Gleichung (16. a.) umgestaltet. Die 3 Gleichungen (16. a.) und (16. c.) sowohl als die drei (17. a.) und (17. c.), in welchen die vier Veränderlichen x, x′ und u, u′ auftreten, machen drei von diesen Grössen zu Functionen der vierten. Fasst man erstlich x, x′ und u′ als Functionen von u auf, und leitet in diesem Sinne die Gleichungen (16. c.) nach u ab, u′ als mittelbar durch die Gleichung $\psi_u = 0$ gegebene Function von u, x und x′ aber als die mittelbar durch die Gleichungen (16. c.) gegebenen Functionen von u ansehend, so erhält man:

(18. a.) $$\delta x = \mu_1 + \mu_2 \partial u' \quad \text{und} \quad \delta x' = \mu'_1 + \mu'_2 \partial u';$$

fasst man hingegen u, u′ und x′ als Functionen von x auf, von denen die letztere mittelbar durch die Gleichung $\varphi_x = 0$ gegeben ist, die ersten beiden aber mittelbar aus den Gleichungen (17. c.) hervorgehen, und leitet man diese letztern Gleichungen in diesem Sinne nach x ab, so erhält man:

(18. b.) $$\delta u = \nu_1 + \nu_2 \partial x' \quad \text{und} \quad \delta u' = \nu'_1 + \nu'_2 \partial x'.$$

Da δu die Ableitung von u, als Function von x gedacht, und δx die Ableitung von x, als Function von u gedacht, bezeichnet und also der Gleichung (10. b.) gemäss $\delta x \delta u = 1$ ist, so geben die ersten der Gleichungen (18. a.) und (18. b.):

(19. a.) $$(\mu_1 + \mu_2 \partial u')(\nu_1 + \nu_2 \partial x') = 1,$$

woraus eine der Ableitungen $\partial u'$ und $\partial x'$ aus der andern sich finden lässt. Setzt man in diese letzte Gleichung für $\partial x'$ und $\partial u'$ ihre aus den Gleichungen (16. a.) und (17. a.) erhaltenen Werthe nach Anleitung der Gleichungen (5. b.) ein, so verwandelt sie sich in:

(19. b.) $$(\mu_1 - \mu_2 \psi'_u)(\nu_1 - \nu_2 \varphi'_x) = 1$$

und giebt so die Abhängigkeit zu erkennen, welche zwischen den aus den Gleichungen (16. a.) und (17. a.) hergeholten Quotienten φ'_x und ψ'_u stattfindet.

Leitet man die Gleichungen (18. a.) noch einmal nach u, die (18. b.) noch einmal nach x ab, so ergiebt sich im ersten Falle:

$$\partial^2 x = \mu_2 \partial^2 u' \quad \text{und} \quad \partial^2 x' = \mu'_2 \partial^2 u', \qquad \textbf{(20. a.)}$$

im andern Falle:

$$\partial^2 u = \nu_2 \partial^2 x' \quad \text{und} \quad \partial^2 u' = \nu'_2 \partial^2 x', \qquad \textbf{(20. b.)}$$

und setzt man die hier für $\partial^2 x$ und $\partial^2 u$ erhaltenen Werthe in eine der Gleichungen (10. c.) oder (10. d.), z. B. in die erstere, so kommt:

$$\nu_2 \partial^2 x' \, \partial x + \mu_2 \partial^2 u' (\partial u)^2 = 0,$$

welche, wenn man sie successive mit ∂u und $(\partial x)^2$ multiplicirt und auf die Gleichung (10. b.) Rücksickt nimmt, die beiden folgenden Formen annehmen kann:

$$\nu_2 \partial^2 x' + \mu_2 \partial^2 u' (\partial u)^3 = 0 \quad \text{und} \quad \nu_2 \partial^2 x' (\partial x)^3 + \mu_2 \partial^2 u' = 0, \qquad \textbf{(21. a.)}$$

mittelst welcher sich eine von den beiden Ableitungen $\partial^2 x'$ und $\partial^2 u'$ in die andere übertragen lässt. Leitet man die Gleichung (16. b.) nach x und die (17. b.) nach u ab, so findet man:

$$\overset{10}{\partial} \varphi'_x + \overset{01}{\partial} \varphi'_x \partial x' + \partial^2 x' = 0 \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial} \psi'_u + \overset{01}{\partial} \psi'_u \partial u' + \partial^2 u' = 0,$$

oder mit Rücksicht auf die aus den Gleichungen (16. b.) und (17. b.) für $\partial x'$ und $\partial u'$ sich ergebenden Werthe:

$$\overset{10}{\partial} \varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial} \varphi'_x + \partial^2 x' = 0 \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial} \psi'_u - \psi'_u \overset{01}{\partial} \psi'_u + \partial^2 u' = 0$$

und die hieraus für $\partial^2 x'$ und $\partial^2 u'$ sich ergebenden Werthe machen, wenn man sie in die Gleichungen (21. a.) einsetzt, diese übergehen in:

$$\nu_2 (\overset{10}{\partial} \varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial} \varphi'_x) + \mu_2 (\overset{10}{\partial} \psi'_u - \psi'_u \overset{01}{\partial} \psi'_u)(\partial u)^3 = 0$$

und

$$\nu_2 (\overset{10}{\partial} \varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial} \varphi'_x)(\partial x)^3 + \mu_2 (\overset{10}{\partial} \psi'_u - \psi'_u \overset{01}{\partial} \psi'_u) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(22. a.)}$$

Weil aber zufolge der ersten der Gleichungen (18. a.) und (18. b.) mit Rücksicht auf die Gleichungen (16. b.) und (17. b.)

$$\partial x = \mu_1 - \mu_2 \psi'_u \quad \text{und} \quad \partial u = \nu_1 - \nu_2 \varphi'_x$$

ist, so gehen die beiden vorigen Gleichungen über in:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_2 (\overset{10}{\partial} \varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial} \varphi'_x) + \mu_2 (\overset{10}{\partial} \psi'_u - \psi'_u \overset{01}{\partial} \psi'_u)(\nu_1 - \nu_2 \varphi'_x)^3 = 0 \\ \text{und} \quad &\nu_2 (\overset{10}{\partial} \varphi'_x - \varphi'_x \overset{01}{\partial} \varphi'_x)(\mu_1 - \mu_2 \psi'_u)^3 + \mu_2 (\overset{10}{\partial} \psi'_u - \psi'_u \overset{01}{\partial} \psi'_u) = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(21. b.)}$$

in denen beiden sich eine und dieselbe zwischen $\overset{10}{\partial} \varphi'_x$, $\overset{01}{\partial} \varphi'_x$ und $\overset{10}{\partial} \psi'_u$, $\overset{01}{\partial} \psi'_u$, d. h. zwischen den zweiten Partialableitungen von φ und ψ, stattfindende Relation zu erkennen giebt, die sich auch unmittelbar aus der Gleichung (19. b.) ableiten lässt.

Auf dieselbe Weise fortfahrend kann man Gleichungen zwischen den dritten und höhern Ableitungen von x' und u' nach x und u und zwischen den dritten und höhern Partialableitungen

von φ und ψ aufstellen. Auch kann man aus den zweiten der Gleichungen (18. a.) und (18. b.) Relationen zwischen $\partial x'$ und $\partial u'$ herleiten, welche sich von der (19. a.) darin unterscheiden, dass in ihnen blos Coefficienten der Gleichungen (16. c.) oder der Gleichungen (17. c.) vorkommen und eben deswegen in vielen Fällen directer zum Ziele führen. Schreibt man nämlich jene Gleichungen im Sinne unserer Bezeichnung so:

$$\partial x' \delta x = \mu_1' + \mu_2' \partial u' \quad \text{und} \quad \partial u' \delta u = \nu_1' + \nu_2' \partial x',$$

so geben sie unter Berücksichtigung der ersten Gleichungen (18. a.) und (18. b.):

(22. a.)
$$\partial x' = \frac{\mu_1' + \mu_2' \partial u'}{\mu_1 + \mu_2 \partial u'} \quad \text{und} \quad \partial u' = \frac{\nu_1' + \nu_2' \partial x'}{\nu_1 + \nu_2 \partial x'},$$

und setzt man in diese für $\partial x'$ und $\partial u'$ ihre Werthe aus den Gleichungen (16. b.) und (17. b.) ein, so erhält man noch:

(22. b.)
$$\varphi_x' = \frac{\mu_2' \psi_u' - \mu_1'}{\mu_1 - \mu_2 \psi_u'} \quad \text{und} \quad \psi_u' = \frac{\nu_2' \varphi_x' - \nu_1'}{\nu_1 - \nu_2 \varphi_x'}.$$

Eine von den bisherigen verschiedene Form solcher Gleichungen erhält man noch, wenn man die (22. a.) oder die (22. b.) mit einander multiplicirt, und dabei die Gleichungen (19. a.) und (19. b.) zu Rathe zieht, wo sich dann ergiebt:

(22. c.)
$$\partial x' \partial u' = (\mu_1' + \mu_2' \partial u')(\nu_1' + \nu_2' \partial x') \quad \text{und}$$

(22. d.)
$$\varphi_x' \psi_u' = (\mu_2' \psi_u' - \mu_1')(\nu_2' \varphi_x' - \nu_1').$$

Die vielerlei Formen, in welchen die Relationen zwischen $\partial x'$ und $\partial u'$ oder φ_x' und ψ_u' sich zeigen, haben ihren Grund in dem bestimmten Zusammenhange, in welchem die Coefficienten μ_1, μ_2, μ_1', μ_2' und ν_1, ν_2, ν_1', ν_2' unter einander stehen, welcher Folge der zwischen den Gleichungen (16. c.) und (17. c.) festgesetzten Abhängigkeit ist. Aus dem Umstande nämlich, dass die letzteren dieser Gleichungen die nach u und u' aufgelösten ersteren, und die ersteren die nach x und x' aufgelösten letzteren sind, folgt dass

(23. a.)
$$\begin{cases} \mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2 = \dfrac{\mu_2'}{\nu_1} = -\dfrac{\mu_2}{\nu_2} = -\dfrac{\mu_1'}{\nu_1'} = \dfrac{\mu_1}{\nu_2'} \quad \text{oder} \\ \nu_1 \nu_2' - \nu_1' \nu_2 = \dfrac{\nu_2'}{\mu_1} = -\dfrac{\nu_2}{\mu_2} = -\dfrac{\nu_1'}{\mu_1'} = \dfrac{\nu_1}{\mu_2'} \end{cases}$$

und zugleich

(23. b.)
$$(\mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2)(\nu_1 \nu_2' - \nu_1' \nu_2) = 1$$

ist, wie man sogleich gewahr wird, wenn man die Gleichungen (16. c.) nach u und u', oder die (17. c.) nach x und x' auflöst und im erstern Falle die Resultate mit den Gleichungen (17. c.), im andern Falle mit denen (16. c.), welchen sie identisch gleich sein müssen, zusammenhält. Diese Relationen ziehen eine grosse Mannigfaltigkeit der Formen nach sich, die sich noch mehr bei den höhern Ableitungen geltend macht. So z. B. erhält man, wenn die erste der Gleichungen (22. a.) nach u, die andere nach x abgeleitet wird:

$$\partial^2 x' \delta x = \frac{(\mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2) \partial^2 u'}{(\mu_1 + \mu_2 \partial u')^2}, \quad \partial^2 u' \delta u = \frac{(\nu_1 \nu_2' - \nu_1' \nu_2) \partial^2 x'}{(\nu_1 + \nu_2 \partial x')^2},$$

welche auf den ersten Anblick von den Gleichungen (21. a.) sehr verschieden zu sein scheinen, aber in diese übergehen, wenn man für δx und δu ihre Werthe aus den ersten der

Gleichungen (18. a.) und (18. b.) und für $\mu_1\mu_2' - \mu_1'\mu_2$ und $\nu_1\nu_2' - \nu_1'\nu_2$, den Gleichungen (23.) gemäss, $-\frac{\mu_2}{\nu_2}$ und $-\frac{\nu_2}{\mu_2}$ setzt.

120) Wäre anstatt der Gleichung (16. a.) die

$$\varphi_x = 0 \tag{24. a.}$$

zwischen den drei Veränderlichen x, x′, x″ gegeben gewesen, der zufolge wir x″ als Function von x und x′ anzusehen hätten, so dass nach Anleitung der Gleichungen (6. b.)

$$\overset{10}{\partial} x'' + \varphi_x' = 0 \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} x'' + \varphi_x'' = 0 \tag{24. b.}$$

ist, wenn unter φ_x' und φ_x'' die Quotienten $\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}$ und $\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}$ verstanden werden, und werden unter diesen Umständen die Grössen x, x′, x″ mittelst dreier Gleichungen vom ersten Grade von drei andern Grössen u, u′, u″ abhängig gemacht, zufolge derer

$$x = \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u' + \mu_3 u'', \quad x' = \mu_0' + \mu_1' u + \mu_2' u' + \mu_3' u'', \quad x'' = \mu_0'' + \mu_1'' u + \mu_2'' u' + \mu_3'' u'' \tag{24. c.}$$

ist, worin sämmtliche mit dem Buchstaben μ versehene Coefficienten constante Grössen vorstellen, so wird die Gleichung (24. a.), wenn man in dieselbe für x, x′, x″ ihre durch die Gleichungen (24. c.) gegebenen Ausdrücke in u, u′, u″ setzt, in eine andere

$$\psi_u = 0 \tag{25. a.}$$

umgewandelt, welche mit der vorigen einerlei Inhalt hat, in der aber an die Stelle von x, x′, x″ die Grössen u, u′, u″, wiewohl mit verändertem Baue der Ausdrücke φ und ψ, getreten sind. Durch diese letztere Gleichung, für sich genommen, wird man berechtigt, u″ als Function von u und u′ anzusehen, so dass nach Anleitung der Gleichungen (6. b.)

$$\overset{10}{\partial} u'' + \psi_u' = 0 \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} u'' + \psi_u'' = 0 \tag{25. b.}$$

ist, wenn man unter ψ_u' und ψ_u'' die Quotienten $\frac{\overset{100}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u}$ und $\frac{\overset{010}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u}$ sich denkt. Sieht man in den Gleichungen (24. c.) u, u′, u″ als unbekannte Grössen, alles übrige hingegen als bekannt an, und löst sie in Bezug auf diese Unbekannten auf, so erhält man drei neue Gleichungen von der Form:

$$u = \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x' + \nu_3 x'', \quad u' = \nu_0' + \nu_1' x + \nu_2' x' + \nu_3' x'', \quad u'' = \nu_0'' + \nu_1'' x + \nu_2'' x' + \nu_3'' x'', \tag{25. c.}$$

welche mit denen (24. c.) einerlei Inhalt haben und in welchen alle mit dem Buchstaben ν versehenen Coefficienten constante Grössen sind. Diese letztern Gleichungen besitzen die Eigenschaft, dass sie die Gleichung (25. a.) wieder in die (24. a.) zurückführen, wenn man in erstere für u, u′, u″ die aus ihnen sich ergebenden Ausdrücke in x, x′, x″ setzt. Die vorstehenden 6 Gleichungen bilden daher einen in sich zurück laufenden Cyclus von Gleichungen, in welchem die drei ersten und die drei letzten in völlig bestimmter Weise von einander abhängig sind, was eine Abhängigkeit zwischen den Partialableitungen von x″ und u″, so wie zwischen denen von φ und ψ nach sich zieht, die wir jetzt näher kennen lernen werden.

Die vier Gleichungen (24. a.) und (24. c.), so wie die vier Gleichungen (25. a.) und (25. c.), in welchen die sechs Veränderlichen x, x', x'' und u, u', u'' auftreten, machen vier von diesen, die man beliebig auswählen kann, zu Functionen der zwei noch übrigen. Fassen wir zuerst x, x', x'' und u'' als Functionen von u und u' auf, und leiten wir in diesem Sinne die Gleichungen (24. c.) sowohl nach u als auch nach u' ab, wobei wir uns u'' als die durch die Gleichung $\psi_u = 0$ gegebene Function von u und u', x, x', x'' als mittelbar durch die Gleichungen (24. c.) gegebene Functionen derselben Grössen u und u' zu denken haben, so kommt:

(26. a.) $$\overset{10}{\delta} x = \mu_1 + \mu_3 \overset{10}{\partial} u'', \quad \overset{10}{\delta} x' = \mu'_1 + \mu'_3 \overset{10}{\partial} u'', \quad \overset{10}{\delta} x'' = \mu''_1 + \mu''_3 \overset{10}{\partial} u''$$

und

(26. b.) $$\overset{01}{\delta} x = \mu_2 + \mu_3 \overset{01}{\partial} u'', \quad \overset{01}{\delta} x' = \mu'_2 + \mu'_3 \overset{01}{\partial} u'', \quad \overset{01}{\delta} x'' = \mu''_2 + \mu''_3 \overset{01}{\partial} u'';$$

fassen wir hierauf u, u', u'' und x'' als Functionen von x und x' auf, und leiten wir in diesem Sinne die Gleichungen (25. c.) sowohl nach x als auch nach x' ab, wobei wir uns x'' als eine durch die Gleichung $\varphi_x = 0$ gegebene Function von x und x', u, u', u'' dagegen als mittelbar durch die Gleichungen (25. c.) gegebene Functionen von denselben Grössen x und x' zu denken haben, so kommt:

(27. a.) $$\overset{10}{\delta} u = \nu_1 + \nu_3 \overset{10}{\partial} x'', \quad \overset{10}{\delta} u' = \nu'_1 + \nu'_3 \overset{10}{\partial} x'', \quad \overset{10}{\delta} u'' = \nu''_1 + \nu''_3 \overset{10}{\partial} x''$$

und

(27. b.) $$\overset{01}{\delta} u = \nu_2 + \nu_3 \overset{01}{\partial} x'', \quad \overset{01}{\delta} u' = \nu'_2 + \nu'_3 \overset{01}{\partial} x'', \quad \overset{01}{\delta} u'' = \nu''_2 + \nu''_3 \overset{01}{\partial} x''.$$

Da aber hier, wo bald x und x' als Functionen von u und u', bald u und u' als Functionen von x und x' betrachtet werden, die Gleichungen (12. g.) und (12. h.) ihre Anwendung finden, so wird, wenn man an die Stelle der dortigen Ableitungen ihre hier in den letzten vier Gruppen gegebenen Werthe setzt:

(28. a.) $$[\mu_1 \mu'_2 - \mu'_1 \mu_2 + (\mu'_2 \mu_3 - \mu_2 \mu'_3) \overset{10}{\partial} u'' + (\mu_1 \mu'_3 - \mu'_1 \mu_3) \overset{01}{\partial} u''] \times$$
$$[\nu_1 \nu'_2 - \nu'_1 \nu_2 + (\nu'_2 \nu_3 - \nu_2 \nu'_3) \overset{10}{\partial} x'' + (\nu_1 \nu'_3 - \nu'_1 \nu_3) \overset{01}{\partial} x''] = 1$$

und

(28. b.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\mu'_1 + \mu'_3 \overset{10}{\partial} u''}{\mu_2 + \mu_3 \overset{01}{\partial} u''} = \frac{\nu'_1 + \nu'_3 \overset{10}{\partial} x''}{\nu_2 + \nu_3 \overset{01}{\partial} x''}, \quad \frac{\mu_1 + \mu_3 \overset{10}{\partial} u''}{\mu'_2 + \mu'_3 \overset{01}{\partial} u''} = \frac{\nu'_2 + \nu'_3 \overset{01}{\partial} x''}{\nu_1 + \nu_3 \overset{10}{\partial} x''}, \\
&\frac{\mu'_2 + \mu'_3 \overset{01}{\partial} u''}{\mu_2 + \mu_3 \overset{01}{\partial} u''} = -\frac{\nu_1 + \nu_3 \overset{10}{\partial} x''}{\nu_2 + \nu_3 \overset{01}{\partial} x''}, \quad \frac{\mu_1 + \mu_3 \overset{10}{\partial} u''}{\mu'_1 + \mu'_3 \overset{10}{\partial} u''} = -\frac{\nu'_2 + \nu'_3 \overset{01}{\partial} x''}{\nu'_1 + \nu'_3 \overset{10}{\partial} x''}, \\
&\frac{\mu_2 + \mu_3 \overset{01}{\partial} u''}{\mu_1 + \mu_3 \overset{10}{\partial} u''} = -\frac{\nu_2 + \nu_3 \overset{01}{\partial} x''}{\nu'_2 + \nu'_3 \overset{01}{\partial} x''}, \quad \frac{\mu'_2 + \mu'_3 \overset{01}{\partial} u''}{\mu'_1 + \mu'_3 \overset{01}{\partial} u''} = -\frac{\nu_1 + \nu_3 \overset{10}{\partial} x''}{\nu'_1 + \nu'_3 \overset{10}{\partial} x''},
\end{aligned}\right.$$

welche zur Darstellung der Partialableitungen von u'' in Partialableitungen von x'' dienen können und von welchen je drei der in (28. b.) enthaltenen schon in den drei übrigen enthalten sind. Setzt man in diesen Gleichungen an die Stelle von $\overset{10}{\partial} x''$, $\overset{01}{\partial} x''$ und $\overset{10}{\partial} u''$, $\overset{01}{\partial} u''$ ihre durch die Gleichungen (24. b.) und (25. b.) gelieferten Werthe $-\varphi'_x$, $-\varphi''_x$ und $-\psi'_u$, $-\psi''_u$, so verwandeln sie sich in:

(29. a.) $$[\mu_1 \mu'_2 - \mu'_1 \mu_2 - (\mu'_2 \mu_3 - \mu_2 \mu'_3) \psi'_u - (\mu_1 \mu'_3 - \mu'_1 \mu_3) \psi''_u] \times$$
$$[\nu_1 \nu'_2 - \nu'_1 \nu_2 - (\nu'_2 \nu_3 - \nu_2 \nu'_3) \varphi'_x - (\nu_1 \nu'_3 - \nu'_1 \nu_3) \varphi''_x] = 1$$

und

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\mu_3'\psi_u'-\mu_1'}{\mu_3\psi_u''-\mu_2}=\dfrac{\nu_3'\varphi_x'-\nu_1'}{\nu_3\varphi_x''-\nu_2}, & \dfrac{\mu_3\psi_u'-\mu_1}{\mu_3'\psi_u''-\mu_2'}=\dfrac{\nu_3'\varphi_x''-\nu_2'}{\nu_3\varphi_x'-\nu_1}, \\[2ex] \dfrac{\mu_3'\psi_u''-\mu_2'}{\mu_3\psi_u''-\mu_2}=-\dfrac{\nu_3\varphi_x'-\nu_1}{\nu_3\varphi_x''-\nu_2}, & \dfrac{\mu_3\psi_u'-\mu_1}{\mu_3'\psi_u'-\mu_1'}=-\dfrac{\nu_3'\varphi_x''-\nu_2'}{\nu_3'\varphi_x'-\nu_1'}, \\[2ex] \dfrac{\mu_3\psi_u''-\mu_2}{\mu_3\psi_u'-\mu_1}=-\dfrac{\nu_3\varphi_x''-\nu_2}{\nu_3'\varphi_x''-\nu_2'}, & \dfrac{\mu_3'\psi_u''-\mu_2'}{\mu_3'\psi_u'-\mu_1'}=-\dfrac{\nu_3\varphi_x'-\nu_1}{\nu_3'\varphi_x'-\nu_1'},\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(29. b.)}$$

wodurch die zwischen den Partialableitungen von φ und ψ stattfindenden Relationen an die Hand gegeben werden. Mit den Gleichungen (28. a.) und (28. b.) gleichbedeutende, aber schon ihrer grössern Symmetrie wegen ungleich vortheilhaftere Gleichungen erhält man, wenn man zufolge der Gleichungen (11. b.) in den letzten der Gleichungen (27. a.) und (27. b.)

$$\overset{10}{\delta}u''=\overset{10}{\partial}u''\overset{10}{\delta}u+\overset{01}{\partial}u''\overset{10}{\delta}u' \quad \text{und} \quad \overset{01}{\delta}u''=\overset{10}{\partial}u''\overset{01}{\delta}u+\overset{01}{\partial}u''\overset{01}{\delta}u'$$

und in den letzten derer (26. a.) und (26. b.)

$$\overset{10}{\delta}x''=\overset{10}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{01}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x' \quad \text{und} \quad \overset{01}{\delta}x''=\overset{10}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{01}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x'$$

setzt, wodurch sie werden:

$$\overset{10}{\partial}u''\overset{10}{\delta}u+\overset{01}{\partial}u''\overset{10}{\delta}u'=\nu_1''+\nu_3''\overset{10}{\partial}x'' \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}u''\overset{01}{\delta}u+\overset{01}{\partial}u''\overset{01}{\delta}u'=\nu_2''+\nu_3''\overset{01}{\partial}x'',$$

so wie

$$\overset{10}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{01}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x'=\mu_1''+\mu_3''\overset{10}{\partial}u'' \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{01}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x'=\mu_2''+\mu_3''\overset{01}{\partial}u'',$$

und mit Zuziehung der beiden ersten in (27. a.) und (27. b.), so wie der beiden ersten in (26. a.) und (26. b.) enthaltenen Gleichungen übergehen in:

$$\overset{10}{\partial}u''(\nu_1+\nu_3\overset{10}{\partial}x'')+\overset{01}{\partial}u''(\nu_1'+\nu_3'\overset{10}{\partial}x'')=\nu_1''+\nu_3''\overset{10}{\partial}x'',$$

$$\overset{10}{\partial}u''(\nu_2+\nu_3\overset{01}{\partial}x'')+\overset{01}{\partial}u''(\nu_2'+\nu_3'\overset{01}{\partial}x'')=\nu_2''+\nu_3''\overset{01}{\partial}x''$$

und

$$\overset{10}{\partial}x''(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')+\overset{01}{\partial}x''(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')=\mu_1''+\mu_3''\overset{10}{\partial}u'',$$

$$\overset{10}{\partial}x''(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')+\overset{01}{\partial}x''(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')=\mu_2''+\mu_3''\overset{01}{\partial}u'',$$

aus denen sich sogleich die folgenden ergeben:

$$-\overset{10}{\partial}x''=\frac{\nu_1''-\nu_1'\overset{01}{\partial}u''-\nu_1\overset{10}{\partial}u'}{\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u''}, \quad -\overset{01}{\partial}x''=\frac{\nu_2''-\nu_2'\overset{01}{\partial}u''-\nu_2\overset{10}{\partial}u''}{\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u''}, \quad \textbf{(30. a.)}$$

und

$$-\overset{10}{\partial}u''=\frac{\mu_1''-\mu_1'\overset{01}{\partial}x''-\mu_1\overset{10}{\partial}x''}{\mu_3''-\mu_3'\overset{01}{\partial}x''-\mu_3\overset{10}{\partial}x''}, \quad -\overset{01}{\partial}u''=\frac{\mu_2''-\mu_2'\overset{01}{\partial}x''-\mu_2\overset{10}{\partial}x''}{\mu_3''-\mu_3'\overset{01}{\partial}x''-\mu_3\overset{10}{\partial}x''}, \quad \textbf{(30. b.)}$$

wodurch jede der Partialableitungen $\overset{10}{\partial}x''$ und $\overset{01}{\partial}x''$ durch die beiden Partialableitungen $\overset{10}{\partial}u''$ und $\overset{01}{\partial}u''$, so wie jede von diesen letztern durch die beiden erstern dargestellt wird. Wir unterlassen es, noch anders geformte Gleichungen zwischen den Grössen $\overset{10}{\partial}x''$, $\overset{01}{\partial}x''$ und $\overset{10}{\partial}u''$, $\overset{01}{\partial}u''$

aufzustellen und bemerken blos, dass alle diese verschiedenen Formen ihren Grund in der Abhängigkeit haben, in der die Coeffizienten der Gleichungen (24. c.) und (25. c.) zu einander stehen, und die man kennen lernt, wenn man die einen wirklich aus den andern herleitet.

Setzt man in den Gleichungen (30. a.) und (30. b.) für $\overset{10}{\partial} x''$, $\overset{01}{\partial} x''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (24. b.) und für $\overset{10}{\partial} u''$, $\overset{01}{\partial} u''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (25. b.), so verwandeln sich dieselben in:

(30. c.) $$\varphi'_x = \frac{\nu''_1 + \nu'_1 \psi''_u + \nu_1 \psi'_u}{\nu''_3 + \nu'_3 \psi''_u + \nu_3 \psi'_u}, \quad \varphi''_x = \frac{\nu''_2 + \nu'_2 \psi''_u + \nu_2 \psi'_u}{\nu''_3 + \nu'_3 \psi''_u + \nu_2 \psi'_u}$$

und

(30. d.) $$\psi'_u = \frac{\mu''_1 + \mu'_1 \varphi''_x + \mu_1 \varphi'_x}{\mu''_3 + \mu'_3 \varphi''_x + \mu_3 \varphi'_x}, \quad \psi''_u = \frac{\mu''_2 + \mu'_2 \varphi''_x + \mu_2 \varphi'_x}{\mu''_3 + \mu'_3 \varphi''_x + \mu_2 \varphi'_x},$$

worin sich das Verhalten zwischen den Partialableitungen der Ausdrücke φ und ψ auf eine sehr einfache Weise ausspricht.

Leitet man die bisher aufgestellten Gleichungen wiederholt nach x und x′ oder nach u und u′ ab, so stösst man auf Gleichungen, welche Relationen zwischen den zweiten und höhern Partialableitungen von x″ und u″ oder zwischen den zweiten und höhern Partialableitungen der Ausdrücke φ und ψ an die Hand geben. Auch hier wieder wird man, je nachdem man diesen oder jenen Weg einschlägt, auf Relationen von sehr verschiedener Form zwischen denselben Partialableitungen stossen, die ihren Grund in dem Umstande haben, dass die in (24. c.) und (25. c.) enthaltenen Gleichungen ihrem Inhalte nach eine und dieselben sind, nur mit dem Unterschiede, dass erstere in einer nach x, x′, x″, letztere in einer nach u, u′, u″ aufgelösten Form hingestellt sind; setzt man daher die Werthe von u, u′, u″ aus den letztern in die erstern, so müssen die dadurch sich ergebenden Gleichungen identische sein, welche zu folgenden Relationen führen, zu welchen man, und zwar auf eine noch directere Weise, gelangt, wenn man die Gleichungen (25. c.) der Reihe nach einmal mit μ_1, μ_2, μ_3, ein andermal mit μ'_1, μ'_2, μ'_3, zum drittenmal mit μ''_1, μ''_2, μ''_3 multiplicirt und jedesmal die drei erhaltenen Resultate addirt, und diese Summen mit den Gleichungen (24. c.), denen sie identisch gleich sein müssen, zusammenhält:

(31. a.) $$\ldots\left\{\begin{array}{l} \mu_1 \nu_1 + \mu_2 \nu'_1 + \mu_3 \nu''_1 = 1, \quad \mu_1 \nu_2 + \mu_2 \nu'_2 + \mu_3 \nu''_2 = 0, \quad \mu_1 \nu_3 + \mu_2 \nu'_3 + \mu_3 \nu''_3 = 0, \\ \mu'_1 \nu_1 + \mu'_2 \nu'_1 + \mu'_3 \nu''_1 = 0, \quad \mu'_1 \nu_2 + \mu'_2 \nu'_2 + \mu'_3 \nu''_2 = 1, \quad \mu'_1 \nu_3 + \mu'_2 \nu'_3 + \mu'_3 \nu''_3 = 0, \\ \mu''_1 \nu_1 + \mu''_2 \nu'_1 + \mu''_3 \nu''_1 = 0, \quad \mu''_1 \nu_2 + \mu''_2 \nu'_2 + \mu''_3 \nu''_2 = 0, \quad \mu''_1 \nu_3 + \mu''_2 \nu'_3 + \mu''_3 \nu''_3 = 1. \end{array}\right.$$

Diese Gleichungen sind ihrer Form nach dieselben wie die im ersten Abschnitte §. 2. unter (80.) aufgestellten, nur dass hier ν_1, ν'_1, ν''_1 steht, wo dort A, A′, A″, ν_2, ν'_2, ν''_2, wo dort A_1, A'_1, A''_1, ν_3, ν'_3, ν''_3, wo dort A_2, A'_2, A''_2; ferner hier μ_1, μ_2, μ_3, wo dort B, B_1, B_2, μ'_1, μ'_2, μ'_3, wo dort B′, B'_1, B'_2, μ''_1, μ''_2, μ''_3, wo dort B″, B''_1, B''_2, weswegen sich aus ihnen die gleichen Relationen, wie die dort unter (81. a.) aufgestellten sind, herleiten lassen und die sich in folgender Weise schreiben lassen:

(31. b.) $$\ldots\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} N = \dfrac{\nu'_2 \nu''_3 - \nu''_2 \nu'_3}{\mu_1} = \dfrac{\nu''_2 \nu_3 - \nu_2 \nu''_3}{\mu_2} = \dfrac{\nu_2 \nu'_3 - \nu'_2 \nu_3}{\mu_3} \\ = \dfrac{\nu''_1 \nu'_3 - \nu'_1 \nu''_3}{\mu'_1} = \dfrac{\nu_1 \nu''_3 - \nu''_1 \nu_3}{\mu'_2} = \dfrac{\nu'_1 \nu_3 - \nu_1 \nu'_3}{\mu'_3} \\ = \dfrac{\nu'_1 \nu''_2 - \nu''_1 \nu'_2}{\mu''_1} = \dfrac{\nu''_1 \nu_2 - \nu_1 \nu''_2}{\mu''_2} = \dfrac{\nu_1 \nu'_2 - \nu'_1 \nu_2}{\mu''_3}, \end{array}\right.$$

wo zur Abkürzung

$$\nu_1 \nu_2' \nu_3'' - \nu_1 \nu_2'' \nu_3' - \nu_1' \nu_2 \nu_3'' + \nu_1' \nu_2'' \nu_3 + \nu_1'' \nu_2 \nu_3' - \nu_1'' \nu_2' \nu_3 = \mathrm{N} \qquad \textbf{(31. c.)}$$

gesetzt worden ist. Aehnliche Relationen erhält man auch, wenn man die Werthe von x, x′, x″ aus den Gleichungen (24. c.) in die Gleichungen (25. c.) setzt, wodurch man auf identische Gleichungen geführt werden muss, welche Relationen aber auch aus den vorigen durch wechselseitige Vertauschung von μ und ν hergeholt werden können und sind:

$$\left.\begin{array}{lll} \nu_1 \mu_1 + \nu_2 \mu_1' + \nu_3 \mu_1'' = 1\,, & \nu_1 \mu_2 + \nu_2 \mu_2' + \nu_3 \mu_2'' = 0\,, & \nu_1 \mu_3 + \nu_2 \mu_3' + \nu_3 \mu_3'' = 0\,, \\ \nu_1' \mu_1 + \nu_2' \mu_1' + \nu_3' \mu_1'' = 0\,, & \nu_1' \mu_2 + \nu_2' \mu_2' + \nu_3' \mu_2'' = 1\,, & \nu_1' \mu_3 + \nu_2' \mu_3' + \nu_3' \mu_3'' = 0\,, \\ \nu_1'' \mu_1 + \nu_2'' \mu_1' + \nu_3'' \mu_1'' = 0\,, & \nu_1'' \mu_2 + \nu_2'' \mu_2' + \nu_3'' \mu_2'' = 0\,, & \nu_1'' \mu_3 + \nu_2'' \mu_3' + \nu_3'' \mu_3'' = 1 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(32. a.)}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{M} = \dfrac{\mu_2' \mu_3'' - \mu_2'' \mu_3'}{\nu_1} = \dfrac{\mu_2'' \mu_3 - \mu_2 \mu_3''}{\nu_2} = \dfrac{\mu_2 \mu_3' - \mu_2' \mu_3}{\nu_3} \\ \quad = \dfrac{\mu_1'' \mu_3' - \mu_1' \mu_3''}{\nu_1'} = \dfrac{\mu_1 \mu_3'' - \mu_1'' \mu_3}{\nu_2'} = \dfrac{\mu_1' \mu_3 - \mu_1 \mu_3'}{\nu_3'} \\ \quad = \dfrac{\mu_1' \mu_2'' - \mu_1'' \mu_2'}{\nu_1''} = \dfrac{\mu_1'' \mu_2 - \mu_1 \mu_2''}{\nu_2''} = \dfrac{\mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2}{\nu_3''}\,, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(32. b.)}$$

wenn zur Abkürzung

$$\mu_1 \mu_2' \mu_3'' - \mu_1 \mu_2'' \mu_3' - \mu_1' \mu_2 \mu_3'' + \mu_1' \mu_2'' \mu_3 + \mu_1'' \mu_2 \mu_3' - \mu_1'' \mu_2' \mu_3 = \mathrm{M} \qquad \textbf{(32. c.)}$$

gesetzt wird. Auch folgt noch weiter, dass

$$\mathrm{M}\,\mathrm{N} = 1 \qquad \textbf{(33.)}$$

ist, wie man sogleich findet, wenn man aus den ersten beiden neben einander stehenden Gleichungen (31. a.) μ_3 eliminirt, wodurch man findet:

$$\nu_2'' = \mu_1 (\nu_1 \nu_2'' - \nu_2 \nu_1'') + \mu_2 (\nu_1' \nu_2'' - \nu_1'' \nu_2')\,,$$

welche Gleichung mittelst der in (31. b.) aufgestellten übergeht in:

$$\nu_2'' = \mathrm{N}\,(\mu_2 \mu_1'' - \mu_1 \mu_2'')$$

und nun mit Rücksicht auf die Gleichungen (32. b.) die angegebene wird. Diese Relationen setzen uns in den Stand, vorstehenden Gleichungen allerhand Gestalten zu geben, aus denen man jedesmal die einfachsten auszuwählen hat. So gestatten sie uns, die Gleichungen (28. a.) und (29. a.) in viel einfacherer Weise darzustellen. Dividirt man nämlich jene Gleichungen mit der (33) und nimmt Rücksicht auf die (31. b.) und (32. b.), so lassen sich dieselben so schreiben:

$$(\nu_3'' - \nu_3 \overset{10}{\partial} \mathrm{u}'' - \nu_3' \overset{01}{\partial} \mathrm{u}'')(\mu_3'' - \mu_3 \overset{10}{\partial} \mathrm{x}'' - \mu_3' \overset{01}{\partial} \mathrm{x}') = 1 \qquad \textbf{(34. a.)}$$

und

$$(\nu_3'' + \nu_3 \psi_{\mathrm{u}}' + \nu_3' \psi_{\mathrm{u}}'')(\mu_3'' + \mu_3 \varphi_{\mathrm{x}}' + \mu_3' \varphi_{\mathrm{x}}'') = 1\,. \qquad \textbf{(34. b.)}$$

Um den Gebrauch jener Relationen an einem dazu geeigneten Beispiele zu erläutern, wollen wir aus den Gleichungen (30. a.) Relationen zwischen den zweiten Ableitungen von x″ und u″ herholen, wiewohl sich dieses Ziel auf kürzerem Wege erreichen lässt. Leitet man jede der Gleichungen (30. a.) sowohl nach u als nach u′ ab, so erhält man mit Rücksicht auf die Relationen (31. b.):

$$-(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{20}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{11}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x')=N[-(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')\overset{20}{\partial}u''+(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}u''],$$

$$-(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{11}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{02}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x')=N[(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')\overset{20}{\partial}u''-(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}u'']$$

und

$$-(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{20}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{11}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x')=N[(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')\overset{02}{\partial}u''-(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}u''],$$

$$-(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{11}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{02}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x')=N[-(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')\overset{02}{\partial}u''+(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}u''],$$

und diese Gleichungen nehmen mit Rücksicht auf die (26. a.) und (26. b.) die folgende Gestalt an:

$$(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{20}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{11}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x')=N(+\overset{01}{\delta}x'\overset{20}{\partial}u''-\overset{10}{\delta}x'\overset{11}{\partial}u''),$$

$$(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{11}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x+\overset{02}{\partial}x''\overset{10}{\delta}x')=N(-\overset{01}{\delta}x\overset{20}{\partial}u''+\overset{10}{\delta}x\overset{11}{\partial}u'')$$

und

$$(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{20}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{11}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x')=N(-\overset{10}{\delta}x'\overset{02}{\partial}u''+\overset{01}{\delta}x'\overset{11}{\partial}u''),$$

$$(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2(\overset{11}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x+\overset{02}{\partial}x''\overset{01}{\delta}x')=N(+\overset{10}{\delta}x\overset{02}{\partial}u''-\overset{01}{\delta}x\overset{11}{\partial}u'').$$

Man kann aus den ersten beiden dieser vier letzten Gleichungen $\overset{20}{\partial}u''$ und $\overset{11}{\partial}u''$ und aus den letzten beiden $\overset{02}{\partial}u''$ und $\overset{11}{\partial}u''$ finden, und erhält so:

$$N(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x)\overset{20}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2\,[(\overset{10}{\delta}x)^2\overset{20}{\partial}x''+2\overset{10}{\delta}x\overset{10}{\delta}x'\overset{11}{\partial}x''+(\overset{10}{\delta}x')^2\overset{02}{\partial}x''],$$

$$N(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x)\overset{11}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2[\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x\overset{20}{\partial}x''+(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'+\delta x'\delta x)\overset{11}{\partial}x''+\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x'\overset{02}{\partial}x''],$$

$$N(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x)\overset{02}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')^2\,[(\overset{01}{\delta}x)^2\overset{20}{\partial}x''+2\overset{01}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'\overset{11}{\partial}x''+(\overset{01}{\delta}x')^2\overset{02}{\partial}x''].$$

Setzt man nun der Gleichung (33.) zufolge $\frac{1}{M}$ für N und zu gleicher Zeit für $\overset{10}{\delta}x$, $\overset{01}{\delta}x$, $\overset{10}{\delta}x'$, $\overset{01}{\delta}x'$ ihre Werthe aus den Gleichungen (26. a.) und (26. b.), so wird zunächst

$$N(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x)=\frac{\mu_1\mu_2'-\mu_1'\mu_2+(\mu_1\mu_3'-\mu_1'\mu_3)\overset{01}{\partial}u''+(\mu_2'\mu_3-\mu_2\mu_3')\overset{10}{\partial}u''}{M}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (32. b.):

$$N(\overset{10}{\delta}x\overset{01}{\delta}x'-\overset{10}{\delta}x'\overset{01}{\delta}x)=\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'',$$

und hierauf gehen die vorigen drei Gleichungen über in:

(35. a.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\overset{20}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''\,\nu_3\overset{10}{\partial}u'')[(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')^2\overset{20}{\partial}x''+2(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}x''\\
&\qquad\qquad+(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')^2\overset{02}{\partial}x''],\\
&\overset{11}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')[(\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')\overset{20}{\partial}x''\\
&+((\mu_1+\mu_3\overset{10}{\partial}u'')(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')+(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')(\mu_2+\mu_1\overset{01}{\partial}u''))\overset{11}{\partial}x''+(\mu_1'+\mu_3'\overset{10}{\partial}u'')(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')\overset{02}{\partial}x''],\\
&\overset{02}{\partial}u''=(\nu_3''-\nu_3'\overset{01}{\partial}u''-\nu_3\overset{10}{\partial}u'')[(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')^2\overset{20}{\partial}x''+2(\mu_2+\mu_3\overset{01}{\partial}u'')(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')\overset{11}{\partial}x''\\
&\qquad\qquad+(\mu_2'+\mu_3'\overset{01}{\partial}u'')^2\overset{02}{\partial}x''],
\end{aligned}\right.$$

welche Gleichungen sich mit Zuziehung derer (26. a.) auch auf die nachstehende einfachere Weise schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{20}{\partial} u'' &= (\nu_3'' - \nu_3' \overset{01}{\partial} u'' - \nu_3 \overset{10}{\partial} u'')\,[(\overset{10}{\delta} x)^2 \overset{20}{\partial} x'' + 2\, \overset{10}{\delta} x\, \overset{10}{\delta} x'\, \overset{11}{\partial} x'' + (\overset{10}{\delta} x')^2 \overset{02}{\partial} x''],\\
\overset{11}{\partial} u'' &= (\nu_3'' - \nu_3' \overset{01}{\partial} u'' - \nu_3 \overset{10}{\partial} u'')\,[\overset{10}{\delta} x\, \overset{01}{\delta} x\, \overset{20}{\partial} x'' + (\overset{10}{\delta} x \overset{01}{\delta} x' + \overset{10}{\delta} x' \overset{01}{\delta} x) \overset{11}{\partial} x'' + \overset{10}{\delta} x' \overset{01}{\delta} x' \overset{02}{\partial} x''],\\
\overset{02}{\partial} u'' &= (\nu_3'' - \nu_3' \overset{01}{\partial} u'' - \nu_3 \overset{10}{\partial} u'')\,[(\overset{01}{\delta} x)^2 \overset{20}{\partial} x'' + 2\, \overset{01}{\delta} x\, \overset{01}{\delta} x'\, \overset{11}{\partial} x'' + (\overset{01}{\delta} x')^2 \overset{02}{\partial} x''].
\end{aligned}\right\} \quad (35.\ b.)$$

Zu ähnlichen Resultaten führen auf dieselbe Weise die Gleichungen (30. b.), welche sich aber schon aus den vorstehenden durch wechselseitige Vertauschung der Buchstaben x und u so wie derer ν und μ mit einander erhalten lassen. Aus den so gefundenen Relationen zwischen den zweiten Partialableitungen von x'' und u'' lassen sich dann auch die zwischen den zweiten Partialableitungen von φ und ψ mittelst der Gleichungen (24. b.) und (25. b.) herholen.

121) Hätte man schliesslich anstatt der einen Gleichung (24. a.) die beiden

$$\varphi_x = 0\,, \quad \Phi_x = 0 \qquad (36.\ a.)$$

vorgelegt bekommen, wo in φ_x sowohl als in Φ_x die drei Veränderlichen x, x', x'' vorkommen, so werden durch das gleichzeitige Bestehen dieser beiden Gleichungen zwei von den drei Veränderlichen zu Functionen der dritten gemacht und man hat, im Falle x' und x'' als Functionen von x genommen werden, den Gleichungen (7. d.) gemäss:

$$\varphi_x' - \Phi_x' + (\varphi_x'' - \Phi_x'')\,\partial x' = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_x'' \Phi_x' - \varphi_x' \Phi_x'' + (\varphi_x'' - \Phi_x'')\,\partial x'' = 0\,, \qquad (36.\ b.)$$

wenn man unter φ_x', Φ_x' und φ_x'', Φ_x'' die Quotienten $\dfrac{\overset{100}{\partial} \varphi_x}{\overset{001}{\partial} \varphi_x}$, $\dfrac{\overset{100}{\partial} \Phi_x}{\overset{001}{\partial} \Phi_x}$ und $\dfrac{\overset{010}{\partial} \varphi_x}{\overset{001}{\partial} \varphi_x}$, $\dfrac{\overset{010}{\partial} \Phi_x}{\overset{001}{\partial} \Phi_x}$ versteht. Werden nun wieder die Veränderlichen x, x', x'' von drei andern u, u', u'' durch die drei Gleichungen vom ersten Grade

$$x = \mu_0 + \mu_1 u + \mu_2 u' + \mu_3 u'', \quad x' = \mu_0' + \mu_1' u + \mu_2' u' + \mu_3' u'', \quad x'' = \mu_0'' + \mu_1'' u + \mu_2'' u' + \mu_3'' u'' \qquad (36.\ c.)$$

abhängig gemacht, und setzt man die hierdurch für x, x', x'' gegebenen Ausdrücke in die Gleichungen (36. a.) ein, so gehen diese in zwei andere:

$$\psi_u = 0 \quad \text{und} \quad \Psi_u = 0 \qquad (37.\ a.)$$

von demselben Inhalt über, in denen ψ und Ψ im Allgemeinen die drei Veränderlichen u, u', u'' in sich tragen werden, und die durch ihr gleichzeitiges Bestehen zwei von diesen Grössen zu Functionen der dritten machen. Sieht man in diesen Gleichungen u' und u'' als Functionen von u an, so hat man den Gleichungen (7. d.) gemäss:

$$\psi_u' - \Psi_u' + (\psi_u'' - \Psi_u'')\,\partial u' = 0 \quad \text{und} \quad \psi_u'' \Psi_u' - \psi_u' \Psi_u'' + (\psi_u'' - \Psi_u'')\,\partial u'' = 0\,; \qquad (37.\ b.)$$

und fasst man in den Gleichungen (36. c.) die Grössen u, u', u'' als Unbekannte alles Uebrige in ihnen als bekannt auf, so giebt die Auflösung der genannten Gleichungen in Bezug auf diese Unbekannten drei neue Gleichungen vom ersten Grade, nämlich:

$$u = \nu_0 + \nu_1 x + \nu_2 x' + \nu_3 x'', \quad u' = \nu_0' + \nu_1' x + \nu_2' x' + \nu_3' x'', \quad u'' = \nu_0'' + \nu_1'' x + \nu_2'' x' + \nu_3'' x'' \qquad (37.\ c.)$$

ganz so wie in der vorigen Nummer. Diese Ausdrücke von u, u', u'' würden, wenn man sie an die Stelle dieser Grössen in die Gleichungen (37. a.) setzte, wieder die Gleichungen (36. a.)

liefern, so dass von den letzten drei Gleichungen zu den ersten drei genau der gleiche Uebergang stattfindet, wie von diesen zu jenen und also alle sechs einen in sich zurücklaufenden Cyclus bilden. Die 5 Gleichungen (36. a.) und (36. c.) machen 5 von den 6 Veränderlichen x, x', x'' und u, u', u'' zu Functionen der sechsten und das Gleiche thun auch die Gleichungen (37. a.) in Verbindung mit denen (37. c.). Fassen wir zuerst x, x', x'' und u', u'' als Functionen von u auf, und leiten wir in diesem Sinne die Gleichungen (36. c.) nach u ab, wobei wir uns u', u'' als die durch die Gleichungen (37. a.) gegebenen Functionen von u, hingegen x, x', x'' als die durch die Gleichungen (36. c.) gegebenen Functionen von derselben unabhängig Veränderlichen u denken, während in diesen letzten Gleichungen die Grössen u', u'' als die durch die Gleichungen (37. a.) gegebenen Functionen von u anzusehen sind, so liefert die Ableitungsrechnung dieser Vorstellungsweise zur Folge:

(38. a.) $$\delta x = \mu_1 + \mu_2 \partial u' + \mu_3 \partial u'', \quad \delta x' = \mu'_1 + \mu'_2 \partial u' + \mu'_3 \partial u'', \quad \delta x'' = \mu''_1 + \mu''_2 \partial u' + \mu''_3 \partial u''.$$

Leiten wir hierauf die Gleichungen (37. c.) in der Art nach x ab, dass wir x' und x'' als die mittelbar durch die Gleichungen (36. a.) gegebenen Functionen von x, hingegen u, u', u'' als die durch die Gleichungen (37. c.), in denen man sich unter x' und x'' die eben genannten Functionen zu denken hat, mittelbar gegebenen Functionen von derselben unabhängig Veränderlichen x ansehen, so liefert die Ableitungsrechnung im Sinne dieser Vorstellungsweise:

(38. b.) $$\delta u = \nu_1 + \nu_2 \partial x' + \nu_3 \partial x'', \quad \delta u' = \nu'_1 + \nu'_2 \partial x' + \nu'_3 \partial x'', \quad \delta u'' = \nu''_1 + \nu''_2 \partial x' + \nu''_3 \partial x'';$$

und ein nochmaliges Ableiten der Gleichungen (38. a.) und (38. b.) liefert:

(38. c.) $$\ldots\ldots \begin{cases} \partial^2 x = \mu_2 \partial^2 u' + \mu_3 \partial^2 u'', \quad \partial^2 x' = \mu'_2 \partial^2 u' + \mu'_3 \partial^2 u'', \quad \partial^2 x'' = \mu''_2 \partial^2 u' + \mu''_3 \partial^2 u'' \\ \text{und} \\ \partial^2 u = \nu_2 \partial^2 x' + \nu_3 \partial^2 x'', \quad \partial^2 u' = \nu'_2 \partial^2 x' + \nu'_3 \partial^2 x'', \quad \partial^2 u'' = \nu''_2 \partial^2 x' + \nu''_3 \partial^2 x''. \end{cases}$$

Da im gegenwärtigen Falle bald x als Function von u und bald u als Function von x betrachtet und daher der Gleichung (10. b.) gemäss $\delta x \delta u = 1$ ist, so hat man zuvörderst:

(39. a.) $$(\mu_1 + \mu_2 \partial u' + \mu_3 \partial u'')(\nu_1 + \nu_2 \partial x' + \nu_3 \partial x'') = 1,$$

und ausserdem geben die 2 letzten Gleichungen in (38. a.) sowohl als die in (38. b.), wenn man in ihnen den Gleichungen (11. a.) gemäss

$$\delta x' = \partial x' \delta x, \quad \delta x'' = \partial x'' \delta x \quad \text{und} \quad \delta u' = \partial u' \delta u, \quad \delta u'' = \partial u'' \delta u$$

setzt und für δx und δu ihre Werthe aus den ersten der Gleichungen (38. a.) und (38. b.) nimmt:

(39. b.) $$\partial x' = \frac{\mu'_1 + \mu'_2 \partial u' + \mu'_3 \partial u''}{\mu_1 + \mu_2 \partial u' + \mu_3 \partial u''}, \quad \partial x'' = \frac{\mu''_1 + \mu''_2 \partial u' + \mu''_3 \partial u''}{\mu_1 + \mu_2 \partial u' + \mu_3 \partial u''}$$

und

(39. c.) $$\partial u' = \frac{\nu'_1 + \nu'_2 \partial x' + \nu'_3 \partial x''}{\nu_1 + \nu_2 \partial x' + \nu_3 \partial x''}, \quad \partial u'' = \frac{\nu''_1 + \nu''_2 \partial x' + \nu''_3 \partial x''}{\nu_1 + \nu_2 \partial x' + \nu_3 \partial x''}.$$

Durch weiter fortgesetztes Ableiten kann man leicht die Werthe von $\partial^2 x'$, $\partial^2 x''$, $\partial^3 x'$, $\partial^3 x''\ldots$ oder von $\partial^2 u'$, $\partial^2 u''$, $\partial^3 u'$, $\partial^3 u''\ldots$ auffinden. So z. B. geben die Gleichungen (39. b.), wenn man sie nach u ableitet:

$$\left.\begin{array}{l} \partial^2 x' \, \delta x = \dfrac{[\mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2 - (\mu_2 \mu_3' - \mu_2' \mu_3) \, \partial u''] \, \partial^2 u' + [\mu_1 \mu_3' - \mu_1' \mu_3 + (\mu_2 \mu_3' - \mu_2' \mu_3) \, \partial u'] \, \partial^2 u''}{(\mu_1 + \mu_2 \, \partial u' + \mu_3 \, \partial u'')^2} \\ \text{und} \\ \partial^2 x'' \, \delta x = \dfrac{[\mu_1 \mu_2'' - \mu_1'' \mu_2 - (\mu_2 \mu_3'' - \mu_2'' \mu_3) \, \partial u''] \, \partial^2 u' + [\mu_1 \mu_3'' - \mu_1'' \mu_3 + (\mu_2 \mu_3'' - \mu_2'' \mu_3) \, \partial u'] \, \partial^2 u''}{(\mu_1 + \mu_2 \, \partial u' + \mu_3 \, \partial u'')^2}, \end{array}\right\} \quad \textbf{(39. d.)}$$

welche durch den in (38. a.) angegebenen Werth von δx übergehen in:

$$\left.\begin{array}{l} \partial^2 x' = \dfrac{[\mu_1 \mu_2' - \mu_1' \mu_2 - (\mu_2 \mu_3' - \mu_2' \mu_3) \, \partial u''] \, \partial^2 u' + [\mu_1 \mu_3' - \mu_1' \mu_3 + (\mu_2 \mu_3' - \mu_2' \mu_3) \, \partial u'] \, \partial^2 u''}{(\mu_1 + \mu_2 \, \partial u' + \mu_3 \, \partial u'')^3} \\ \text{und} \\ \partial^2 x'' = \dfrac{[\mu_1 \mu_2'' - \mu_1'' \mu_2 - (\mu_2 \mu_3'' - \mu_2'' \mu_3) \, \partial u''] \, \partial^2 u' + [\mu_1 \mu_3'' - \mu_1'' \mu_3 + (\mu_2 \mu_3'' - \mu_2'' \mu_3) \, \partial u'] \, \partial^2 u''}{(\mu_1 + \mu_2 \, \partial u' + \mu_3 \, \partial u'')^3}, \end{array}\right\} \quad \textbf{(39. e.)}$$

und eben so verfährt man in allen andern Fällen.

D. Aufstellung eines Satzes, wodurch sich der Uebergang von der Ableitungsrechnung zu andern als Zahleigenschaften leicht und sicher bewerkstelligen lässt.

122) Wir zerspalten diesen Satz je nach der Anzahl der vorhandenen Grössen in folgende Unterfälle:

a) Lassen sich zwei von einander verschiedene Grössen A und B durch zwei von einander verschiedene, aber nach steigenden Potenzen einer und derselben Veränderlichen fortlaufende ähnliche Reihen mit ganzen und positiven Exponenten darstellen, so dass man hat:

$$\left.\begin{array}{l} A = y^m (K + K_1 y + K_2 y^2 + \ldots) \text{ und} \\ B = y^m (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_1 y + \mathfrak{K}_2 y^2 + \ldots), \end{array}\right. \quad \textbf{(40. a.)}$$

wobei K, K_1, K_2, ... und $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, ... beliebige reelle und endliche Grössen vorstellen, die mit Ausnahme von K und $\mathfrak{K}$ auch Null sein können; und sind die Grössen A und B von solcher Art, dass deren Unterschied bei jedem möglichst klein gedachten Werth von y in Vergleich zu ihnen selbst verschwindend klein wird, so muss sein:

$$K = \mathfrak{K}. \quad \textbf{(40. b.)}$$

b) Lassen sich zwei von einander verschiedene Grössen A und B durch zwei von einander verschiedene, aber nach steigenden Potenzen zweier Veränderlichen fortlaufende ähnliche Reihen mit ganzen und positiven Exponenten darstellen, so dass man hat:

$$\left.\begin{array}{l} A = y^m y'^n \, [K + (K_1 y + K' y') + (K_2 y^2 + K_1' y y' + K'' y'^2) + \ldots] \\ B = y^m y'^n \, [\mathfrak{K} + (\mathfrak{K}_1 y + \mathfrak{K}' y') + (\mathfrak{K}_2 y^2 + \mathfrak{K}_1' y y' + \mathfrak{K}'' y'^2) + \ldots] \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(41. a.)}$$

wobei K, K_1, K', ... und $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}'$, ... beliebige reelle und endliche Grössen vorstellen, die mit Ausnahme von K und $\mathfrak{K}$ auch Null sein können; und sind die Grössen A und B von solcher Art, dass deren Unterschied bei jeden möglichst klein gedachten Werthen von y und y' in Vergleich zu ihnen selbst verschwindend klein wird, so muss immer noch sein:

$$K = \mathfrak{K}. \quad \textbf{(41. b.)}$$

c) Man kann schon aus den beiden in a) und b) aufgestellten Fällen leicht entnehmen, wie der Satz lauten würde, wenn die beiden Grössen A und B durch ähnliche Reihen darge-

stellt werden könnten, die nach Potenzen von drei oder mehr Veränderlichen mit ganzen positiven Exponenten fortliefen.

Die Richtigkeit dieses Satzes springt schier von selbst in die Augen, doch wollen wir, seines grossen Einflusses bei Anwendungen der verschiedensten Art halber, dessen Beweis hier nicht übergehen.

Beweis zu a) Die Gleichungen (40. a.) geben sogleich den Unterschied der beiden Grössen A und B an die Hand; es ist nämlich

$$A - B = y^m [(K - \mathfrak{K}) + (K_1 - \mathfrak{K}_1) y + (K_2 - \mathfrak{K}_2) y^2 + \ldots],$$

und diese Gleichung verwandelt sich bei einem möglichst kleinen Werth von y, wo jedes folgende Glied der in eckige Klammern eingeschlossenen Reihe verschwindend klein wird in Vergleich zu jedem wirklich vorhandenen früheren derselben Reihe, entweder in

(42.) $$A - B = y^m (K - \mathfrak{K}),$$

wenn $K - \mathfrak{K}$ nicht der Null gleich ist, oder in

$$A - B = y^m [(K_1 - \mathfrak{K}_1) y + (K_2 - \mathfrak{K}_2) y^2 + \ldots],$$

wenn $K - \mathfrak{K}$ der Null gleich ist, und man kann in diesem letztern Falle anstatt der in eckige Klammern eingeschlossenen Reihe das erste in ihr wirklich vorhandene Glied allein nehmen, weil alle übrigen bei dem möglichst klein gedachten Werthe von y gegen dieses eine völlig verschwinden, dieses eine aber enthält offenbar die erste oder eine noch höhere Potenz von y in sich; stellt daher r eine ganze positive Zahl vor, die entweder 1 oder grösser als 1 ist, so lässt sich der Unterschied zwischen A und B in dem Falle, wo $K - \mathfrak{K} = 0$ und y möglichst klein ist, so darstellen:

(43.) $$A - B = y^{m+r} (K_r - \mathfrak{K}_r).$$

Nun liefern aber die Gleichungen (40. a.) für einen möglichst klein gedachten Werth von y, da K und $\mathfrak{K}$ nicht null sind, stets

(44.) $$A = y^m K \quad \text{und} \quad B = y^m \mathfrak{K},$$

woraus folgt, dass der in (42.) angegebene Unterschied zwischen A und B, welcher stattfindet, wenn $K - \mathfrak{K}$ nicht der Null gleich ist, vergleichbar ist mit den in (44.) angegebenen Werthen von A und B selber, da in allen dreien y in derselben Potenz vorkommt, dass aber der in (43.) angegebene Unterschied zwischen A und B, welcher statt findet, wenn $K - \mathfrak{K} = 0$ ist, verschwindend klein in Vergleich zu den in (44.) angegebenen Werthen von A und B wird, weil er eine höhere Potenz des möglichst klein gedachten y als diese in sich trägt. Folglich muss jedesmal, wenn $A - B$ verschwindend klein in Vergleich zu A und B ist, $K - \mathfrak{K} = 0$ oder $K = \mathfrak{K}$ sein.

Beweis zu b). Die Gleichungen (41. a.) geben sogleich den Unterschied der beiden Grössen A und B an die Hand; es ist nämlich:

$$A - B = y^m y'^n [(K - \mathfrak{K}) + ((K_1 - \mathfrak{K}_1) y + (K' - \mathfrak{K}') y') + ((K_2 - \mathfrak{K}_2) y^2 + (K'_1 - \mathfrak{K}'_1) y y' + (K'' - \mathfrak{K}'') y'^2) + \ldots];$$

diese Gleichung verwandelt sich aber bei möglichst klein gedachten Werthen von y und y', wo jedes folgende Glied der in eckige Klammern eingeschlossenen Reihe, welches alle Theile von einerlei Dimension in Bezug auf y und y' in sich aufnimmt, verschwindend klein wird in Vergleich zu jedem wirklich vorhandenen frühern solchen Gliede, entweder in:

(45.) $$A - B = y^m y'^n (K - \mathfrak{K}),$$

wenn $K-\mathfrak{K}$ nicht der Null gleich wird, oder in:

$$A-B=y^m y'^n[((K_1-\mathfrak{K}_1)y+(K'-\mathfrak{K}')y')+((K_2-\mathfrak{K}_2)y^2+(K_1'-\mathfrak{K}_1')yy'+(K''-\mathfrak{K}'')y'^2)+\ldots],$$

wenn $K-\mathfrak{K}$ der Null gleich ist, und man kann in diesem letztern Falle anstatt der in eckige Klammern eingeschlossenen Reihe das erste in ihr wirklich vorhandene Glied allein nehmen, weil alle übrigen gegen dieses bei möglichst klein gedachten Werthen von y und y' völlig verschwinden, dieses eine aber gehört offenbar entweder zur ersten oder zu einer noch höhern Dimension in Bezug auf y und y'; stellt daher r die Zahl 1 oder eine noch grössere ganze positive Zahl vor, so ist der Unterschied zwischen A und B in dem Falle, wo $K-\mathfrak{K}=0$ ist und y sowohl als y' möglichst klein gedacht werden, stets so darzustellen:

$$A-B=y^m y'^n[(K_r-\mathfrak{K}_r)y^r+(K'_{r-1}-\mathfrak{K}'_{r-1})y^{r-1}y'+(K''_{r-2}-\mathfrak{K}''_{r-2})y^{r-2}y'^2+\ldots]. \qquad (46.)$$

Nun liefern aber die Gleichungen (41. a.) für möglichst klein gedachte Werthe von y und y', da weder K noch $\mathfrak{K}$ null ist, stets:

$$A=y^m y'^n K \quad \text{und} \quad B=y^m y'^n \mathfrak{K}, \qquad (47.)$$

woraus folgt, dass der in (45.) angegebene Unterschied zwischen A und B, welcher stattfindet, wenn $K-\mathfrak{K}$ nicht der Null gleich ist, vergleichbar ist mit den in (47.) angegebenen Werthen von A und B, da in allen dreien y und y' in einer und derselben Dimension erscheinen, dass hingegen der in (46.) angegebene Unterschied zwischen A und B, welcher statt findet, wenn $K-\mathfrak{K}=0$ ist, verschwindend klein in Vergleich zu den in (47.) angegebenen Werthen von A und B wird, weil er lauter Theile der $m+n+r$ten Dimension in Bezug auf y und y' in sich enthält, während diese blos Theile der $m+n$ten Dimension in sich aufnehmen, und jene Dimension der Zahl r zur Folge stets grösser als diese ist. Folglich muss jedesmal, wenn $A-B$ verschwindend klein in Vergleich zu A und B ist, $K-\mathfrak{K}=0$ oder $K=\mathfrak{K}$ sein.

Beweis zu c). Der Beweis dieses Satzes, wenn die Reihen nach Potenzen von 3 und mehr Veränderlichen fortlaufen, lässt sich immer wieder auf dieselbe Weise führen, wie schon der völlig gleichförmige Gang desselben in den Fällen a) und b) deutlich genug zu erkennen giebt.

§. 13.

Von der ebenen Curve.

Unser Gang war bisher immer so, dass wir aus den Betrachtungen der Gegenstände im Raume die besondere Betrachtungsweise ableiteten, welche genügt, wenn alle Puncte der untersuchten Gegenstände in einer und derselben Ebene liegen; jetzt aber, wo alle Vorstellungen eine zusammengesetztere Natur annehmen, wird es besser sein, wenn wir die Untersuchungen der letztern Art vorausgehen und erst auf sie die der erstern Art folgen lassen, weil so das Verwickeltere sich aus dem Einfachern Licht verschaffen kann.

123) Wenn in einer Gleichung wie

$$\varphi_x=0 \quad \text{oder} \quad \psi_u=0 \qquad (1.)$$

nur die zwei Veränderlichen x und x' oder u und u' vorkommen und diese Veränderlichen die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines unbestimmten Punctes O in Bezug auf zwei Axen AX, AX' eines beliebigen ebenen Coordinatensystems vorzustellen haben, so stellt jede solche

Gleichung alle diejenigen Puncte der Coordinatenebene dar, deren Coordinaten sie wahr machen, alle übrigen Puncte der Coordinatenebene sowohl als des ausserhalb derselben liegenden Raumes hingegen werden durch die Gleichung ausgeschlossen; es stellt mithin jede solche Gleichung einen Complex von Puncten, die in der Coordinatenebene liegen, dar, dessen Wesenheit wir nun näher kennen lernen wollen.

Fehlt in der Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ eine der Veränderlichen x und x' oder u und u' ganz und gar, so wird die andere in der Gleichung allein zurückbleibende Veränderliche durch diese Gleichung selbst völlig bestimmt und verliert eben dadurch den Character einer veränderlichen Grösse vollständig. Je nach der Natur der Gleichung schreibt diese der in ihr noch allein vorkommenden Coordinate nur einen oder mehrere, auch wohl unendlich viele Werthe vor, die jedoch stets die Eigenschaft besitzen, dass sie nie stetig in einander übergehen, sondern immer um endliche, wenn auch noch so kleine Grössen von einander verschieden sind. Ist nun x' die eine in der Gleichung $\varphi_x = 0$ noch vorhandene Coordinate, und liefert diese Gleichung für x' bestimmte, aus einander liegende Werthe in irgend einer Anzahl, so führen diese, wenn man ihnen noch die Bestimmung $x = 0$ beifügt, zu eben so vielen in der Axe AX' getrennt von einander liegenden Puncten hin; weil aber der Gleichung $\varphi_x = 0$ die Bestimmung $x = 0$ völlig gleichgültig ist, da x in ihr gar nicht vorkommt, man sich also unter x eben so gut jeden andern Werth wie den 0 denken darf, so stellt jene Gleichung alle Puncte dar, die den Geraden angehören, welche man parallel zur Axe AX durch die so eben in der Axe AX' aufgefundenen Puncte legt, denn alle Puncte einer jeden solchen Geraden entsprechen dem einen durch die Gleichung vorgeschriebenen Werth von x'.

Ist hingegen u' die eine in der Gleichung $\psi_u = 0$ vorkommende Coordinate, so liefert diese Gleichung für u' bestimmte aus einander liegende Werthe in gewisser Anzahl, während sie u völlig unbestimmt lässt. Diese für u' sich ergebenden Werthe führen, wenn man ihnen noch die Bestimmung $u = 0$ beifügt, auf eben so viele in der Polaraxe A$\mathfrak{X}'$, welche senkrecht auf der Grundaxe AX steht, liegende, von einander getrennte Puncte hin; weil aber der Gleichung $\psi_u = 0$ die Bestimmung $u = 0$ ganz gleichgültig ist, da u in ihr gar nicht vorkommt, man sich also unter u eben so gut jeden andern wirklichen Werth wie den 0 vorstellen darf, so stellt obige Gleichung alle Puncte der Geraden dar, die man sich durch die so eben in der Polaraxe A$\mathfrak{X}'$ aufgefundenen Puncte senkrecht zur Grundaxe AX' oder, was dasselbe ist, parallel zur Polaraxe A$\mathfrak{X}$ gelegt denkt, denn alle Puncte einer jeden solchen Geraden entsprechen einem der bestimmten Werthe, die der Coordinate u' durch die Gleichung $\psi_u = 0$ angewiesen worden sind.

Jede von den Gleichungen (1.) stellt mithin, wenn in ihr von den beiden Coordinaten, auf welche sie sich bezieht, nur die eine vorkommt, im ebenen Coordinatensysteme einen Complex von eben so vielen aus einander liegenden parallelen Geraden dar, als die Gleichung der einen, in ihr allein vorkommenden Coordinate Werthe anweist.

Kommen aber in einer von den Gleichungen (1.) die beiden Veränderlichen gleichzeitig vor, welche man sich als Coordinaten von Puncten auf ein ebenes System bezogen zu denken hat, so stellt jede solche Gleichung im Allgemeinen eine krumme, in der Ebene des Coordinatensystems liegende Linie dar, wie sich so zeigen lässt.

Heben wir von den zur Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ gehörigen Puncten irgend einen O heraus, und bezeichnen wir durch ξ, ξ' oder η, η' die diesem einen Puncte angehörigen Werthe von x, x' oder u, u'; denken wir uns ferner durch diesen beliebigen einen Punct O

zwei neue Axen O X und O X′ gelegt, welche mit den vorigen parallel und gleichläufig sind, so dass den im ersten Abschnitte (§. 2.) mitgetheilten Gleichungen (7.) zur Folge, wenn man in ihnen der Natur des ebenen Systems gemäss $x''=u''=0$ und $\xi''=\eta''=0$ sein lässt, was $x_0''=u_0''=0$ nach sich zieht, und dadurch zu erkennen giebt, dass man das neue Coordinatensystem sich wieder als ein ebenes zu denken hat, welches mit dem vorigen nach Aussage der genannten Gleichungen (7.) durch die Gleichungen

$$x=\xi+x_0\,,\quad x'=\xi'+x_0' \quad \text{oder} \quad u=\eta+u_0\,,\quad u'=\eta'+u_0' \tag{49.}$$

zusammenhängt, in denen x_0, x_0' die schiefen, u_0, u_0' die senkrechten, dem Puncte, dessen Coordinaten im ursprünglichen System x, x' und u, u' waren, angehörigen Coordinaten im neuen ebenen System, dessen Axen O X und O X′ sind, vorstellen: so findet zwischen diesen beiderlei Coordinaten, wenn man sich der Natur der Gleichungen (48.) nach x' als Function x oder u' als Function von u denkt, welche Function jedesmal unter den in diesem Abschnitte (§. 12. Nr. 114.) angegebenen Umständen sich befindet, zufolge der dortigen Gleichung (9. a.) eine von den beiden nachstehenden Relationen statt:

$$x_0'=\partial\xi' x_0+\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}+\partial^3\xi'\frac{x_0^3}{1.2.3}+\ldots \tag{50. a.}$$

oder

$$u_0'=\partial\eta' u_0+\partial^2\eta'\frac{u_0^2}{1.2}+\partial^3\eta'\frac{u_0^3}{1.2.3}+\ldots \tag{50. b.}$$

Diese Relationen umfassen, auf die Axen O X und O X′ bezogen, noch alle die Puncte, welche von den Gleichungen (48.), auf die Axen A X, A X′ bezogen, dargestellt werden, so dass also durch die Gleichungen (48.) und durch die (50. a. und b.) ein und derselbe Complex von Puncten gegeben wird. Fassen wir nun von allen diesen Puncten einen O′ ins Auge, der von dem vorigen O verschieden ist, diesem aber stets näher rückt, so werden die ihm angehörigen Grössen x_0 oder u_0 stets kleinere Werthe annehmen, und da die auf der rechten Seite der Gleichungen (50. a. oder b.) später kommenden Glieder immer höhere Potenzen von x_0 oder u_0 in sich tragen, als die ihnen vorangegangenen, so müssen die später kommenden in Vergleich zu den ihnen vorausgegangenen in immer grösserem Verhältnisse kleiner werden, je kleiner man sich x_0 oder u_0 denkt; lässt man daher x_0 oder u_0 in Gedanken möglichst klein, aber doch nicht völlig null werden, so hat man sich auch, vorausgesetzt, dass die Grössen $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$, $\partial^3\xi'$,... oder $\partial\eta'$, $\partial^2\eta'$, $\partial^3\eta'$,... lauter endliche Werthe an sich tragen, den Werth eines jeden später folgenden Gliedes unvergleichlich kleiner als den eines jeden ihm voranstehenden zu denken, falls dieses letztere wirklich vorhanden ist, weshalb jener Werth gegen diesen, falls er nicht null ist, völlig verschwindet. Für solche Puncte also, welche man sich in grösster Nähe bei dem O liegend denkt, gehen die Gleichungen (50. a. oder b.) über in:

$$x_0'=\partial\xi' x_0 \quad \text{oder} \quad u_0'=\partial\eta' u_0\,, \tag{51.}$$

wenn nicht $\partial\xi'=0$ oder $\partial\eta'=0$ in einem besondern Falle ist. Jede dieser beiden letzten Gleichungen aber stellt im ebenen Systeme, wenn man x_0 und x_0' oder u_0 und u_0' alle Werthe vorstellen lässt, die jene Gleichungen wahr machen, den im zweiten Abschnitte geschehenen Untersuchungen (Nr. 105.) gemäss, eine durch den Punct O gehende Gerade dar, und giebt dadurch zu verstehen, dass in den durch die Gleichungen (48.) dargestellten Gebilden von jedem beliebig hervorgehobenen Puncte O derselben aus sich andere Puncte anreihen, die auf

eine möglichst klein gedachte Strecke wie die Puncte einer Geraden neben einander liegen. Weil aber bei jedem andern hervorgehobenen Puncte O im Allgemeinen ξ und ξ' oder η und η' und deshalb auch $\partial\xi'$ oder $\partial\eta'$ andere durch die zwischen ihnen statt findenden Gleichungen gegebene Werthe annehmen werden, so wird die Richtung, in welcher sich die Puncte auf eine möglichst kurz gedachte Strecke wie in einer Geraden an einander reihen, von einer Stelle des Gebildes zur andern in der Regel sich stetig abändern, und eben deswegen wird dieses Gebilde im Allgemeinen den Character einer krummen Linie an sich tragen, und da alle Puncte des Gebildes in einer und derselben Ebene liegen, werden wir es eine ebene Curve nennen.

Die bis hierher aus einer Gleichung, welche entweder die beiden schiefen oder die beiden senkrechten Coordinaten eines ebenen Systems in sich aufnimmt, gezogenen Schlüsse ändern sich nicht, wenn eine oder mehrere von den Ableitungen $\partial^2\xi'$, $\partial^3\xi''$, ... oder $\partial^2\eta'$, $\partial^3\eta'$, ... null werden. Ja sogar wenn $\partial\xi'$ oder $\partial\eta'$ null wird, bleibt alles Gesagte noch unverändert wahr; denn obgleich es scheinen möchte, dass man, wenn z. B. $\partial\xi'=0$ ist, an die Stelle der ersten Gleichung (51.) die $x_0'=\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}$, oder wenn auch $\partial^2\xi'=0$ sein sollte, die $x_0'=\partial^3\xi'\frac{x_0^3}{1.2.3}$ u. s. w. zu setzen hätte, weil in diesem Falle die Glieder $\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}$ oder $\partial^3\xi'\frac{x_0^3}{1.2.3}$ u. s. w. nicht mehr als verschwindend klein in Vergleich zu den ihnen vorangegangenen, die jetzt wahrhaft null sind, angesehen werden dürfen, so überzeugt man sich doch leicht, dass selbst in einem solchen Falle die durch die erste Gleichung (51.), welche jetzt $x_0'=0$ wird, dargestellte Gerade die Richtung anzeigt, in welcher die Puncte an der hervorgehobenen Stelle sich linienartig an einander reihen. In der That wollte man im gegenwärtigen Falle anstatt der Gleichung $x_0'=0$ die $x_0'=\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}$ oder die $x_0'=\partial^3\xi'\frac{x_0^3}{1.2.3}$ u. s. w. nehmen, so würde man für x_0' Werthe erhalten, die unvergleichlich kleiner als der möglichst klein gedachte Werth x_0 selber wären, und schon deshalb könnten die durch zwei, solchen Werthen von x_0' und x_0 entsprechende Puncte gelegten Geraden und die durch $x_0'=0$ dargestellte keinen Winkel von angebbarer Grösse mit einander bilden, so dass die Gleichung $x'=0$ immer noch die Richtung anzeigt, in welcher sich an dieser Stelle die Puncte an einander reihen. Das Gleiche lässt sich aber ganz eben so auch in Betreff der senkrechten Coordinaten erweisen.

Obgleich nun aber die Fälle, wo einer oder mehrere der zu den auf einander folgenden Potenzen von x_0 oder u_0 gehörigen Coeffizienten in den Reihen (50. a. oder b.) null werden, nicht aus der allgemeinen Regel heraustreten, so giebt es doch andere Ausnahmen von dieser Regel, die wir anzeigen werden, da deren Kenntniss erst volles Licht auf den hier vorgeführten Gegenstand wirft. Wenn wir aus einer der Gleichungen (48.) durch das Auflösen derselben die eine Coordinate x' oder u' durch die andere x oder u bestimmen, so werden sich die erstern in der Regel als mehrförmige Ausdrücke dieser letztern ergeben, so dass man im Allgemeinen zu jedem beliebig gewählten Werthe x oder u für x' oder u' so viele Werthe auffindet, als solche Formen in dem für x' oder u' erhaltenen Ausdruck vorhanden sind. Jede dieser einzelnen Formen kann man für sich allein als eine zwischen x' und x oder zwischen u' und u gegebene Gleichung ansehen, auf welche alles oben Gesagte seine Anwendung findet; und in der That, da wir in den oben geschehenen Betrachtungen die Grössen ξ und ξ' oder η und η' nur auf einen einzigen in den Gleichungen (48.) enthaltenen Punct bezogen haben, der dann in der Regel nur zu einer von den mehrern Formen gehören wird, so springt in die

Augen, dass jede dieser mehrern Formen für sich zu einem besondern linienartigen Gebilde hinführen wird, das wir einen Zweig des ganzen Gebildes nennen wollen. In besondern Fällen aber können allerdings mehrere von diesen einzelnen Formen für denselben Werth von x oder u zu einerlei Werth von x′ oder u′ führen, welches dann der Fall sein wird, wenn sich an einer Stelle zwei oder mehrere von den verschiedenen Zweigen gegenseitig durchkreuzen, und solche Stellen der Curve haben den Namen der vielfachen Puncte erhalten. Obgleich nun die zu solchen vielfachen Puncten gehörigen Werthe von x und x′ oder u und u′ gleichzeitig mehrere der einzelnen Formen wahr machen müssen, so kann es doch geschehen, dass die solchen Stellen entsprechenden Werthe von $\partial x'$, $\partial \xi'$ oder $\partial u'$, $\partial \eta'$, welche sich auf die verschiedenen Zweige der Curve beziehen, von einander verschieden sind an den Stellen, wo x′, ξ′ oder u′, η′ einerlei Werth besitzen; dann durchschneiden sich die Zweige in dem vielfachen Punct in Richtungen, die einen Winkel von endlicher Grösse mit einander machen. Solche Zweige, welche an dergleichen Stellen auch für $\partial x'$, $\partial \xi'$ oder $\partial u'$, $\partial \eta'$ einerlei Werth liefern, besitzen eine gemeinschaftliche Richtung bei dem vielfachen Puncte.

Sollte es geschehen, dass sich unter den mehrern Formen, die man für x′ oder u′ aus der Gleichuug (48.) findet, eine von der Gestalt $x' = p x + P$ oder $u' = \mathfrak{p} u + \mathfrak{P}$ vorfindet, wobei p, P oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{P}$ constante Grössen vorstellen, so giebt diess zu verstehen, dass der dieser Form entsprechende Zweig eine Gerade ist. In einem solchen Falle lassen sich aber die Gleichungen (48.) stets auf eine der zwei nachstehenden Formen bringen:

$$(x' - p x - P)\,\varphi'_x = 0 \quad \text{oder} \quad (u' - \mathfrak{p} u - \mathfrak{P})\,\psi'_u = 0,$$

welche alle Puncte in sich fassen, die den Gleichungen

$$x' - p x - P = 0 \quad \text{und} \quad \varphi'_x = 0$$

oder

$$u' - \mathfrak{p} u - \mathfrak{P} = 0 \quad \text{und} \quad \psi'_u = 0$$

einzeln angehören. Diess ist indessen nur ein besonderer Fall des folgenden allgemeinen Satzes, in welchem alle ähnlichen Erscheinungen ihre Begründung finden. Kann man nämlich die Gleichungen (48.) auf eine von den Formen

$$\varphi'_x \varphi''_x = 0 \quad \text{oder} \quad \psi'_u \psi''_u = 0 \qquad \textbf{(52. a.)}$$

bringen, und sind die Factoren φ'_x, φ''_x oder ψ'_u, ψ''_u von solcher Beschaffenheit, dass die Werthe von x und x′ oder von u und u′, welche den einen Factor zu Null machen, den andern nicht auf Form $\frac{a}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ bringen, so werden die vorstehenden Gleichungen durch alle die Werthe von x und x′ oder u und u′ befriedigt, welche den einen oder den andern von ihren beiden Factoren zu Null machen, während solche Werthe der Veränderlichen, die keinen der beiden Factoren auf Null bringen, offenbar auch nicht im Stande sind, die obigen Gleichungen zu befriedigen. Es ist daher gestattet, die Gleichung $\varphi'_x \varphi''_x = 0$ als einen Verein der beiden Gleichungen

$$\varphi'_x = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''_x = 0 \qquad \textbf{(52. b.)}$$

aufzufassen, wenn man sich die beiden letzten als von einander völlig unabhängig denkt, und eben so kann man die Gleichung $\psi'_u \psi''_u = 0$ als einen Verein der beiden Gleichungen

$$\psi'_u = 0 \quad \text{und} \quad \psi''_u = 0 \qquad \textbf{(52. c.)}$$

auffassen, wenn man diese letzten beiden als völlig unabhängig von einander sich denkt. Es folgt hieraus, dass das in einer Gleichung von der Form (52. a.) enthaltene Gebilde nichts anders ist, als eine Vereinigung der zwei in den Gleichungen (52. b.) oder (52. c.) enthaltenen Gebilde, vorausgesetzt, dass die Werthe der Veränderlichen, welche den einen Factor zu Null machen, den andern nicht auf eine in der Rechnung unzulässige Form bringen.

Ausserdem giebt es noch andere Umstände, welche machen können, dass der vorhin angegebene allgemeine Bau der durch die Gleichungen (48.) dargestellten Curve an einzelnen Stellen eine Modification erleidet. Diess geschieht namentlich da, wo eine oder mehrere der Ableitungen $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$,.... oder $\partial\eta'$, $\partial^2\eta'$,.... die Form $\frac{a}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ erhalten und eben hierdurch zu verstehen geben, dass bei solchen Stellen die Reihe (50. a.) oder (50. b.) ihre Anwendbarkeit verliert. Für diese Stellen, welche stets nur Ausnahmen von der Regel bilden, müssen auf die gleiche Weise, wie in der Lehre vom Grössten und Kleinsten unter ähnlichen Umständen geschieht, besondere, ihnen angemessene Entwickelungen aufgesucht und an die Stelle der Reihen (50. a.) oder (50. b.) gesetzt werden, aus denen man dann die Eigenthümlichkeit der Curve an einer solchen Stelle zu beurtheilen hat. Gemeinhin zeigt es sich dabei, dass da, wo eine oder mehrere der Ableitungen $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$,.... oder $\partial\eta'$, $\partial^2\eta'$,.... die Form $\frac{a}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, diess entweder das plötzliche Aufhören eines Curvenzweiges, das durch den Uebergang der Coordinatenwerthe vom Reellen ins Imaginäre hervorgerufen wird, oder eine plötzliche Richtungsänderung der Curve von einem endlichen Betrage, oder sonst eine Contiunitätsunterbrechung anderer Art ankündige. Man pflegt die Beurtheilung aller an einzelnen Stellen auftretenden besondern Eigenthümlichkeiten einer durch eine Gleichung gegebenen ebenen Curve die **Discussion dieser Gleichung** zu nennen. Die Discussion einer Gleichung geschieht in derselben Weise, es mag diese Gleichung auf ein senkrechtes oder auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem bezogen werden, weshalb wir es hier unterlassen können, weiter auf dieselbe einzugehen.

124) Die eine ebene Curve darstellende Gleichung ist entweder gegeben und es sollen aus ihr die Eigenschaften dieser Curve abgeleitet werden, oder es wird die Curve selbst durch eine sie characterisirende Eigenschaft gegeben, und man soll aus dieser Eigenschaft die Gleichung der Curve finden. Um das hierbei einzuhaltende Verfahren an einem einfachen Beispiele vor Augen zu legen, wollen wir die Gleichung für eine in der Ebene des Systems liegende Kreislinie, deren Mittelpunct und Radius gegeben ist, aufsuchen. Die characteristische Eigenschaft der Kreislinie besteht darin, dass alle ihre Puncte gleich weit von ihrem Mittelpuncte abliegen, welcher gleiche Abstand ihr Radius oder Halbmesser genannt wird; bezeichnen daher x_1, x'_1 die schiefen, u_1, u'_1 die senkrechten Coordinaten ihres Mittelpunctes, ferner x, x' die schiefen, u, u' die senkrechten Coordinaten von irgend einem Puncte O der Kreislinie selber, beide auf die Axen AX, AX′ eines ebenen Coordinatensystems bezogen, in dessen Ebene die Kreislinie liegt, und stellt r die Länge vom Radius der fraglichen Kreislinie vor, so ist in Gemässheit der ersten Gleichung (108. d.) (Absch. I. §. 5.) *)

*) Wir verweisen hier auf die im ersten Abschnitte (Nr. 58.) für das ebene System besonders aufgestellten Formeln, die sich indessen eben so leicht auch aus den allgemeinen dadurch erhalten lassen, dass man in diesen $x''= u''= 0$ und $a''= c''= 0$ setzt, welches letztere Verfahren wir daher auch eben so gut eintreten lassen können.

$$(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')=r^2. \qquad (53.\ a.)$$

Jeder Punct, dessen Coordinatenwerthe, für x, x′ und u, u′ gesetzt, die vorstehende Gleichung wahr machen, gehört der verlangten Kreislinie an, so wie umgekehrt jeder Punct dieser Kreislinie die vorstehende Gleichung befriedigt, somit stellt die Gleichung (53. a.) die verlangte Kreislinie wahrhaft dar. Die Gleichung (53. a.) besitzt die Eigenthümlichkeit, dass in ihr gleichzeitig schiefe und senkrechte Coordinaten der Puncte auftreten. Man könnte zwar die senkrechten mittelst der dritten und vierten, oder die schiefen mittelst der fünften und sechsten der Gleichungen (108. d.) (Absch. I. §. 5.) eliminiren und so zu einer Gleichung gelangen, wodurch die Kreislinie entweder nur in schiefen oder nur in senkrechten Coordinaten dargestellt wird; dadurch aber würde die Gleichung ihre Einfachheit verlieren, weshalb man besser thut, sie bei weiterem Gebrauche stets in ihrer gemischten Form beizubehalten. Wie diess geschehen könne, wollen wir durch die Aufsuchung einiger von den Haupteigenschaften klar zu machen suchen.

Bezeichnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ die schiefen, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$ die senkrechten Coordinaten von irgend einem in der Ebene des Coordinatensystems liegenden Puncte O_1 und ϱ die Entfernung dieses Punctes von irgend einem Puncte der Kreislinie, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch x, x′ und u, u′ vorgestellt werden, so ist zufolge der so eben benützten Gleichungen (108. d.):

$$(x-\mathfrak{x})(u-\mathfrak{u})+(x'-\mathfrak{x}')(u'-\mathfrak{u}')=\varrho^2. \qquad (53.\ b.)$$

Zieht man die beiden Gleichungen (53. a.) und (53. b.) von einander ab, so erhält man:

$$(x-\mathfrak{x})(u-\mathfrak{u})+(x'-\mathfrak{x}')(u'-\mathfrak{u}')-(x-x_1)(u-u_1)-(x'-x_1')(u'-u_1')=\varrho^2-r^2, \qquad (53.\ c.)$$

und diese Gleichung geht, wenn man in ihr den Theil

$$(x-\mathfrak{x})(u-\mathfrak{u})+(x'-\mathfrak{x}')(u'-\mathfrak{u}')$$

durch

$$(x-x_1+x_1-\mathfrak{x})(u-u_1+u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1'+x_1'-\mathfrak{x}')(u'-u_1'+u_1'-\mathfrak{u}')$$

oder

$$(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')+(x-x_1)(u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1')(u_1'-\mathfrak{u}')$$
$$+(x_1-\mathfrak{x})(u-u_1)+(x_1'-\mathfrak{x}')(u'-u_1')+(x_1-\mathfrak{x})(u_1-\mathfrak{u})+(x_1'-\mathfrak{x}')(u_1'-\mathfrak{u}')$$

ersetzt, über in:

$$(x-x_1)(u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1')(u_1'-\mathfrak{u}')+(x_1-\mathfrak{x})(u-u_1)+(x_1'-\mathfrak{x}')(u'-u_1')+(x_1-\mathfrak{x})(u_1-\mathfrak{u})$$
$$+(x_1'-\mathfrak{x}')(u_1'-\mathfrak{u}')=\varrho^2-r^2. \qquad (53.\ d.)$$

Bezeichnet nun R den Abstand des Punctes O_1 von dem Mittelpunct des Kreises, so ist nach Anleitung der obigen Gleichung (108. d.):

$$(x_1-\mathfrak{x})(u_1-\mathfrak{u})+(x_1'-\mathfrak{x}')(u_1'-\mathfrak{u}')=R^2; \qquad (53.\ e.)$$

bezeichnen ferner p, p′ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die vom Mittelpunct der Kreislinie nach dem beliebigen in ihr liegenden Puncte O hinzielende Richtung an den Axen AX, AX′ giebt, so ist nach Anleitung der Gleichungen (3.) (Absch. I. §. 2.), wenn man die auf die dritte Axe sich beziehenden Gleichungen weglässt, der Natur des ebenen Systems gemäss:

$$p=\frac{x-x_1}{r},\quad p'=\frac{x'-x_1'}{r}\quad \text{und}\quad \mathfrak{p}=\frac{u-u_1}{r},\quad \mathfrak{p}'=\frac{u'-u_1}{r}, \qquad (53.\ f.)$$

und eben so ist, wenn q, q' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen vorstellen, welche die vom Mittelpunct der Kreislinie nach dem beliebig wo in ihrer Ebene liegenden Punct O_1 hinzielende Richtung an denselben Axen giebt:

(53. g.) $$q=\frac{\mathfrak{x}-x_1}{R},\quad q'=\frac{\mathfrak{x}'-x_1'}{R}\quad \text{und}\quad \mathfrak{q}=\frac{\mathfrak{u}-u_1}{R},\quad \mathfrak{q}'=\frac{\mathfrak{u}'-u_1'}{R}.$$

Aus den Gleichungen (53. f.) und (53. g.) findet man, dass

$$(x-x_1)(u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1')(u_1'-\mathfrak{u}')=-(p\,\mathfrak{q}+p'\mathfrak{q}')\,rR$$

und

$$(\mathfrak{u}-u_1)(x_1-\mathfrak{x})+(\mathfrak{u}'-u_1')(x_1'-\mathfrak{x}')=-(q\,\mathfrak{p}+q'\mathfrak{p}')\,rR$$

ist; weil aber, wenn θ den Winkel bezeichnet, den die beiden vom Mittelpunct der Kreislinie nach den Puncten O und O_1 hinzielenden Richtungen mit einander machen, nach Anleitung der oben (Absch. I. §. 2.) gegebenen Gleichungen (9. a. und b.), wenn man in ihnen, der Natur des ebenen Systems gemäss, die auf die dritte Axe sich beziehenden Projectionszahlen null sein lässt,

$$\cos\theta=p\,\mathfrak{q}+p'\mathfrak{q}'=q\,\mathfrak{p}+q'\mathfrak{p}'$$

ist, wodurch die vorigen zwei Gleichungen werden:

(53. h.) $$(x-x_1)(u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1')(u_1'-\mathfrak{u}')=(\mathfrak{u}-u_1)(x_1-\mathfrak{x})+(\mathfrak{u}'-u_1')(x_1'-\mathfrak{x}')=-rR\cos\theta,$$

so geht mittelst der Gleichungen (53. e.) und (53. h.) die (53. d.) über in:

$$R^2-2rR\cos\theta+r^2=\varrho^2,$$

welche sich auf jede der zwei folgenden Formen bringen lässt:

$$(R-r)^2+4rR\sin^2\tfrac{1}{2}\theta=\varrho^2\quad \text{und}\quad (R+r)^2-4rR\cos^2\tfrac{1}{2}\theta=\varrho^2,$$

in denen sich nun mittelbar die folgenden Eigenschaften der Kreislinie aussprechen: Die von einem in der Ebene der Kreislinie irgendwo liegenden Puncte O_1 nach einem beliebigen Puncte O der Kreislinie gezogene Gerade ist am kleinsten und gleich $\pm(R-r)$, wenn ihre Verlängerung durch den Mittelpunct geht; sie ist dagegen am grössten und gleich $R+r$, wenn der Mittelpunct in ihr liegt. Die Länge dieser Geraden wird gleich $2r\sin\frac{1}{2}\theta$, wenn der Punct O_1 in der Kreislinie liegt, wo dann $R=r$ und die Gerade O_1O eine Sehne wird, und man sieht, dass die Sehne stets kleiner als der Durchmesser ist, und um so kleiner wird, je weiter sie sich vom Mittelpunct entfernt.

125) Zur Darstellung einer ebenen Curve ist eine von den Gleichungen (48.), entweder die, welche schiefe, oder die, welche senkrechte Coordinaten in sich aufnimmt, hinreichend, und zuweilen bringt es Vortheil, eine solche Gleichung durch eine andere zu ersetzen, in welcher theils schiefe und theils senkrechte Coordinaten vorkommen, wie in der vorigen Nummer geschehen ist. Es können jedoch auch zwei Gleichungen vorhanden sein, welche beide eine und dieselbe Curve darstellen, dann nennen wir, wie schon bei der Ebene geschehen ist, die beiden einem und demselben Gebilde angehörigen Gleichungen **combinirte Gleichungen**, und insbesondere werden wir uns dieser Benennung bei solchen zwei Gleichungen bedienen, von welchen die eine blos schiefe, die andere blos senkrechte Coordinaten in sich trägt. Zwischen den in combinirten Gleichungen auftretenden schiefen und senkrechten Coordinaten finden, in so fern sie sich auf einerlei Puncte im Raume beziehen, im Allgemeinen jene Relationen statt, welche wir im ersten Abschnitte als den zu einem und demselben Puncte gehörigen beiderlei

Coordinaten eigenthümlich aufgefunden haben; hier aber, wo das Coordinatensystem ein ebenes ist, sind die daselbst (§. 5. Nr. 58.) mitgetheilten Gleichungen anwendbar, von welchen die (108. b.) zeigen, dass

$$u = x + x'\cos W\,,\quad u' = x\cos W + x' \quad \text{und} \quad x\sin^2 W = u - u'\cos W\,,\quad x'\sin^2 W = u' - u\cos W \qquad \textbf{(54. a.)}$$

ist, wenn x, x′ die schiefen, u, u′ die senkrechten Coordinaten von einem und demselben Puncte der durch combinirte Gleichungen, wie die (.48) sind, gegebenen Curve vorstellen. So wie die Relationen (54. a.) stets zwischen den in combinirten Gleichungen auftretenden auf einerlei Puncte der Curve sich beziehenden Coordinaten im ebenen Systeme statt haben, so können sie auch dazu dienen, wenn nur eine Gleichung der Curve gegeben ist, andere zu finden, welche zu jener combinirte sind; man hat zu diesem Ende nur in die eine gegebene Gleichung anstatt einer oder mehrerer Coordinaten der einen Art ihre durch vorstehende Relationen gegebenen Ausdrücke in Coordinaten der andern Art zu setzen. Drückt man auf solche Weise alle senkrechten Coordinaten in schiefen aus, so gelangt man zu der Gleichung von der Form $\varphi_x = 0$, und drückt man alle schiefen in senkrechten aus, so gelangt man zu der Gleichung $\psi_u = 0$, und diese geht in jene oder jene in diese über, wenn man für u, u′ oder x, x′ ihre durch die Gleichungen (54. a.) gegebenen Werthe setzt.

Da diesem nach zwischen den zwei combinirten Gleichungen $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$, welche eine ebene Curve darstellen, alle jene Beziehungen obwalten, welche in diesem Abschnitte (§. 12. Nr. 119.) als zwischen den dortigen eben so bezeichneten Gleichungen bestehend vorausgesetzt worden sind, so müssen alle dort erhaltenen Resultate auch hier noch ihre Gültigkeit behalten, wenn man in ihnen μ_0, μ_1, μ_2 mit 0, $\frac{1}{\sin^2 W}$, $-\frac{\cos W}{\sin^2 W}$ und μ'_0, μ'_1, μ'_2 mit 0, $-\frac{\cos W}{\sin^2 W}$, $\frac{1}{\sin^2 W}$, so wie ν_0, ν_1, ν_2 mit 0, 1, $\cos W$ und ν'_0, ν'_1, ν'_2 mit 0, $\cos W$, 1 vertauscht, wie die Vergleichung der hier bestehenden Gleichungen (54. a.) mit den dort angenommenen (16. c.) und (17. c.) unmittelbar an die Hand giebt; daher hat man den dortigen Gleichungen (18. a. und b.) zur Folge:

$$\left.\begin{aligned} &\delta x\sin^2 W = 1 - \eth u'\cos W\,,\quad \delta x'\sin^2 W = \eth u' - \cos W \\ \text{und}\quad &\delta u = 1 + \eth x'\cos W\,,\quad \delta u' = \cos W + \eth x', \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(54. b.)}$$

und eben so geben die dortigen Gleichungen (20. a. und b.):

$$\left.\begin{aligned} &\delta^2 x\sin^2 W = -\eth^2 u'\cos W\,,\quad \delta^2 x'\sin^2 W = \eth^2 u' \\ \text{und}\quad &\delta^2 u = \eth^2 x'\cos W\,,\quad \delta^2 u' = \eth^2 x'. \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(54. c.)}$$

Ferner nehmen die dortigen Gleichungen (22. a.) hier die nachstehende Form an:

$$\eth x' = \frac{\eth u' - \cos W}{1 - \eth u'\cos W}\,,\quad \eth u' = \frac{\cos W + \eth x'}{1 + \eth x'\cos W}\,, \qquad \textbf{(54. d.)}$$

wobei wir bemerken wollen, dass die Gleichungen (54. b.) bis (54. d.) sich auch unmittelbar aus denen (54. a.) durch Ableiten nach x oder u erhalten lassen, dass wir sie jedoch aus den im zwölften Paragraphen gegebenen Resultaten entnommen haben, um ihre Stellung zu den allgemeinen Vorschriften der Ableitungsrechnung schärfer bezeichnen zu können. Die Gleichun-

gen (54. c.) ergeben sich aus denen (54. b.), wenn man die auf erster Zeile stehenden nach u, die auf zweiter Zeile stehenden nach x ableitet. Eben so kann man aus den Gleichungen (54. d.), welche die zwischen den ersten Ableitungen $\partial u'$ und $\partial x'$ eintretenden Beziehungen aufdecken, die herholen, wodurch das gegenseitige Verhalten zwischen den zweiten Ableitungen $\partial^2 x'$ und $\partial^2 u'$ angezeigt wird; leitet man nämlich die vordere der genannten Gleichungen nach u, die hintere nach x ab, so findet man:

$$\partial^2 x' \delta x = \frac{\partial^2 u' \sin^2 W}{(1 - \partial u' \cos W)^2}, \quad \partial^2 u' \delta u = \frac{\partial^2 x' \sin^2 W}{(1 + \partial x' \cos W)^2}$$

und diese verwandeln sich, die vordern Gleichungen (54. b.) berücksichtigend, in:

(54. e.) $$\partial^2 x' = \frac{\partial^2 u' \sin^4 W}{(1 - \partial u' \cos W)^3}, \quad \partial^2 u' = \frac{\partial^2 x' \sin^2 W}{(1 + \partial x' \cos W)^3}.$$

Aehnlich lassen sich, wo es gefordert wird, aus den hier gegebenen Relationen die erhalten, welche zwischen den dritten und höhern Ableitungen der Coordinaten, wobei eine von ihnen zur unabhängig Veränderlichen genommen wird, statt finden, worauf wir indessen hier nicht weiter eingehen werden.

Dagegen wollen wir an dieser Stelle noch von jenen Formen handeln, welche die vorstehenden Gleichungen annehmen, wenn nicht mehr eine der Coordinaten selbst, sondern eine ausser ihnen liegende Grösse, von der man sich alle Coordinaten abhängig denkt, zur unabhängig Veränderlichen genommen wird, wobei wir uns auf die Gleichungen, welche denen (54. b.) analog sind, beschränken können, da sich alle übrigen aus diesen durch bloses Ableiten leicht erhalten lassen. In diesem Falle hat man, den im vorigen Paragraphen (Nr. 118.) gegebenen Erörterungen gemäss, nur in jenen Gleichungen die Ableitungen nach x oder u durch Ableitungen nach der neuen Unabhängigen zu ersetzen, welches jederzeit mit Beihilfe der dortigen Gleichungen (13. b.) oder (15. c.) geschehen kann. Diese geben in unserm gegenwärtigen Falle:

(55. a.) $$\begin{cases} \delta x = \dfrac{dx}{du}, \quad \delta x' = \dfrac{dx'}{du}, \quad \partial u' = \dfrac{du'}{du} \\ \text{oder} \\ \delta u = \dfrac{du}{dx}, \quad \delta u' = \dfrac{du'}{dx}, \quad \partial x' = \dfrac{dx'}{dx}, \end{cases}$$

und hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (54. b.) in:

(55. b.) $$\begin{cases} dx \sin^2 W = du - du' \cos W, \quad dx' \sin^2 W = du' - du \cos W \\ \text{und} \\ du = dx + dx' \cos W, \quad du' = dx \cos W + dx', \end{cases}$$

welche die gesuchten sind. Vergleicht man die Gleichungen (55. b.) mit denen (54. a.), so wird man gewahr, dass jene in Bezug auf dx, dx' und du, du' genau das sind, was diese in Bezug auf x, x', u, u', woraus weiter folgt, dass es immer einen Punct im Raume giebt, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch dx, dx' und du, du' vorgestellt werden können, und dass also von diesen Grössen alles das gilt, was von den Coordinaten eines Punctes wahr ist. So ist namentlich nach Aussage der im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichung (16.), wenn man sie für das ebene Coordinatensystem dadurch einrichtet, dass man in ihr die auf die dritten Axen sich beziehenden Coordinaten einer jeden Art null sein lässt:

(55. c.) $$x\,du + x'\,du' = u\,dx + u'\,dx',$$

welche Gleichung man auch aus denen (55. b.) mit Zuziehung derer (54. a.) herleiten kann. Dividirt man diese Gleichung einmal mit du, ein andermal mit dx, jedesmal an die Stelle der entstehenden Quotienten zweier Ableitungen ihre durch die Gleichungen (55. a.) angezeigten Werthe setzend, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} x + x'\partial u' = u\delta x + u'\delta x' \\ \text{und} \\ x\delta u + x'\delta u' = u + u'\partial x', \end{array}\right\} \quad \text{(55. d.)}$$

welche Gleichungen für die unabhängig Veränderlichen u und x das sind, was die (55. c.) in Betreff der neuen Unabhängigen ist. Letztere treten nur deshalb in einer weniger symmetrischen Form als die erstere auf, weil die Ableitung der in ihnen zur unabhängig Veränderlichen genommenen Coordinate 1 wird und so dem Auge sich entzieht. Auf die hier angezeigten allgemeinen Relationen stützt sich aber die nun folgende Untersuchung der Natur der ebenen Curve.

126) Die beiden Gleichungen (51.) gehören einer und derselben Geraden an, wenn die Gleichungen (48.) einer und derselben Curve angehören, d. h. combinirte sind. Man kann sich hiervon noch auf folgende Weise directe überzeugen: Setzt man nämlich in die Gleichungen (51.) für x_0, x'_0 und u_0, u'_0 ihre durch die Gleichungen (49.) gegebenen Werthe, wodurch die dort auf die Axen OX, OX′ bezogene Gerade jetzt wieder auf das aus den Axen AX und AX′ gebildete System bezogen wird, so werden sie:

$$x' - \xi' = \partial\xi'(x - \xi) \quad \text{und} \quad u' - \eta' = \partial\eta'(u - \eta), \quad \text{(56. a.)}$$

und da zwischen $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ dieselben Relationen statt finden, wie die zwischen $\partial x'$ und $\partial u'$ in den Gleichungen (54. d.) angezeigten, wenn die Gleichungen (48.) combinirte sind, so hat man:

$$\partial\xi' = \frac{\partial\eta' - \cos W}{1 - \partial\eta'\cos W} \quad \text{und} \quad \partial\eta' = \frac{\cos W + \partial\xi'}{1 + \partial\xi'\cos W};$$

durch diese Werthe gehen aber die Gleichungen (56. a.) nach Wegschaffung der Nenner über in:

$$(x' - \xi') + (x - \xi)\cos W = \partial\eta'\,[(x' - \xi')\cos W + (x - \xi)] \quad \text{und}$$
$$(u' - \eta') - (u - \eta)\cos W = \partial\xi'\,[(u - \eta) - (u' - \eta')\cos W],$$

welche mit Zuziehung der im ersten Abschnitte aufgestellten Formeln (108. d.), ξ, ξ' und η, η' an die Stelle von x_1, x'_1 und u_1, u'_1 setzend, wieder in die Gleichungen (56. a.) zurück gehen, aber so, dass aus der ersten die zweite und aus der zweiten die erste geworden ist, was zu erkennen giebt, dass beide Gleichungen völlig einerlei Inhalt haben.

Die Gerade, welche, wenn die Gleichungen (48.) combinirte sind, durch jede der Gleichungen (51.) oder (56. a.) dargestellt wird, in denen man sich unter $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ die aus den Gleichungen $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$ zu entnehmenden Werthe von $\partial x'$ und $\partial u'$, welche dem Puncte O angehören, zu denken hat, die Gerade also, welche, wie wir in Nr. 123. gesehen haben, die Richtung der Curve an der Stelle O zu erkennen giebt, wird die Berührungslinie oder Tangente der ebenen Curve am Puncte O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten an den ursprünglichen Axen ξ, ξ' und η, η' sind, genannt. Man kann den Gleichungen der Tangente noch eine andere, in manchen Fällen sehr brauchbare Gestalt geben. Erwägt man nämlich, dass den in §. 12. Nr. 111. niedergelegten Ergebnissen zufolge, welche sich auf eine

Gleichung mit zwei Veränderlichen erstrecken, nach Aussage der ersten Gleichung (5. a.) allgemein $\partial x' = -\frac{\overset{10}{\partial}\varphi_x}{\overset{01}{\partial}\varphi_x}$ und $\partial u' = -\frac{\overset{10}{\partial}\psi_u}{\overset{01}{\partial}\psi_u}$ ist, und man also, ξ, ξ' für x, x' und η, η' für u, u' setzend, hat:

$$\partial\xi' = -\frac{\overset{10}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{01}{\partial}\varphi_\xi} \quad \text{und} \quad \partial\eta' = -\frac{\overset{10}{\partial}\psi_\eta}{\overset{01}{\partial}\psi_\eta};$$

und setzt man diese Werthe von $\partial\xi'$, $\partial\eta'$ in die Gleichungen (56. a.), so wandeln sie sich um in:

(56. b.) $$(x-\xi)\overset{10}{\partial}\varphi_\xi + (x'-\xi')\overset{01}{\partial}\varphi_\xi = 0 \quad \text{und} \quad (u-\eta)\overset{10}{\partial}\psi_\eta + (u'-\eta')\overset{01}{\partial}\psi_\eta = 0;$$

sie stellen so die Tangente der Curve am Puncte O in andern Formen dar, in solchen nämlich, die sich unmittelbar aus den Gleichungen (48.) erhalten lassen.

127) Wir wollen noch eine zweite Art, die Tangente einer ebenen Curve zu bestimmen, angeben, durch die man zu Ausdrücken hingeführt wird, welche in spätern Untersuchungen eine grosse Rolle spielen. Stellen nämlich auch hier wieder

$$\varphi_x = 0 \quad \text{und} \quad \psi_u = 0$$

die combinirten Gleichungen einer ebenen Curve vor, von denen die erste die schiefen Coordinaten x, x', die andere die senkrechten Coordinaten u, u' aller Puncte der ebenen Curve in sich trägt, und will man die Richtung dieser Curve an einem beliebigen ihrer Puncte O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten wir durch ξ, ξ' und η, η' bezeichnen wollen, kennen lernen, so darf man nur die Gerade aufsuchen, welche durch den hervorgehobenen Punct O geht, und deren Puncte zunächst um O herum möglichst nahe bei Puncten der Curve liegen; diese so bestimmte Gerade ist die Tangente der Curve an der Stelle O.

Denkt man sich durch den bezeichneten Punct O zwei neue Axen OX und OX' gelegt, welche den vorigen parallel und gleichläufig sind, und bezeichnet man durch x_0, x_0' und u_0, u_0' die schiefen und senkrechten Coordinaten eines beliebigen, jedoch von dem O verschiedenen Punctes O' der Curve, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten an den ursprünglichen Axen x, x' und u, u' sind, so finden zwischen den Grössen x, x', x_0, x_0', ξ, ξ' und u, u', u_0, u_0', η, η' die Gleichungen (49.) statt, und es lassen sich x_0' und u_0' durch die Gleichungen (50. a. und b.) in Reihen darstellen, die nach den Potenzen von x_0 oder u_0 fortschreiten, und es ist, wenn R den Abstand des Punctes O' von dem O bezeichnet, der ersten im ersten Abschnitt mitgetheilten Gleichung (108. b.) analog:

(57. a.) $$R^2 = x_0 u_0 + x_0' u_0'.$$

Legt man jetzt durch den Punct O eine vorläufig noch völlig unbestimmt bleibende Gerade, und denkt man sich vom Puncte O' aus auf diese Gerade ein Loth gefällt, von dem sie im Puncte S geschnitten wird; bezeichnet man ferner die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche diese Gerade, in der Richtung von O nach S hin aufgefasst, an den Axen AX und AX' oder an den ihnen parallelen und gleichläufigen OX und OX' liefert, einstweilen durch p, p' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, und stellt Θ den spitzen Winkel vor, welchen die Richtung AS mit der von O nach O' hinzielenden bildet, so ist der im ersten Abschnitt aufgestellten Gleichung (13.) zur Folge, wenn man in ihr die auf die dritte Axe sich beziehenden Coordinaten und

Projectionszahlen, den ersten in (108. a. und b.) stehenden Gleichungen gemäss null sein lässt:

$$\mathrm{R}\cos\Theta = \mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x'_0 = p\,u_0 + p'u'_0\,;$$

es ist aber $\mathrm{R}\cos\Theta$ die Länge des vom Lothe abgeschnittenen Stücks O S der Geraden; bezeichnet man also diese Länge durch Π, so dass

$$\mathrm{R}\cos\Theta = \Pi \qquad \textbf{(57. b.)}$$

ist, so verwandeln sich die vorstehenden Gleichungen in:

$$\Pi = \mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x'_0 \quad \text{und} \quad \Pi = p\,u_0 + p'u'_0, \qquad \textbf{(57. c.)}$$

und multiplicirt man diese letzten beiden mit einander, so kommt:

$$\Pi^2 = (\mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x'_0)(p\,u_0 + p'u'_0)\,. \qquad \textbf{(57. d.)}$$

Bezeichnet man noch durch E die Länge des von O′ aus auf die Gerade gefällten Lothes, bis zu dem Durchschnittspuncte S zwischen beiden genommen, nämlich die Länge O′ S, so hat man, weil O′ O S ein bei S rechtwinkliges Dreieck und demgemäss $O'S^2 = O'O^2 - OS^2$ ist:

$$E^2 = \mathrm{R}^2 - \Pi^2,$$

oder, wenn man für R^2 und Π^2 ihre in den Gleichungen (57. a.) und (57. d.) enthaltenen Werthe setzt:

$$E^2 = x_0 u_0 + x'_0 u'_0 - (\mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x'_0)(p\,u_0 + p'u'_0)\,. \qquad \textbf{(57. e.)}$$

Erwägt man nun, dass E^2 das Quadrat des Abstandes des beliebigen Curvenpunctes O′ von der durch O gelegten und noch völlig unbestimmt gelassenen Geraden ist, und dass sich in diesem Quadrate die absolute Entfernung des Punctes O′ von dieser unbestimmten Geraden abspiegelt, so überzeugt man sich, dass diese Gerade Tangente der Curve am Puncte O wird, wenn sie die Eigenschaft besitzt, dass alle zunächst an O liegende Puncte O′ der Curve in Bezug auf sie die kleinstmöglichen Werthe von E^2 liefern.

Um die hierzu erforderlichen Bedingungen zu erhalten, setze man in die vorstehenden Gleichungen für x'_0 und u'_0 ihre durch die Gleichungen (50. a. und b.) gegebenen Werthe ein, so verwandelt sich, weil diese Gleichungen

$$x'_0 u'_0 = x_0 u_0 \left[\partial\xi'\,\partial\eta' + \tfrac{1}{2}\partial\eta'\,\partial^2\xi'\,x_0 + \tfrac{1}{2}\partial\xi'\,\partial^2\eta'\,u_0 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{6}\partial\eta'\,\partial^3\xi'\,x_0^2 + \tfrac{1}{4}\partial^2\xi'\,\partial^2\eta'\,x_0 u_0 + \tfrac{1}{6}\partial\xi'\,\partial^3\eta'\,u_0^2 + \ldots .\right]$$

geben, erstlich die Gleichung (57. a.) in:

$$\mathrm{R}^2 = x_0 u_0 \left[1 + \partial\xi'\,\partial\eta' + \tfrac{1}{2}\partial\eta'\,\partial^2\xi'\,x_0 + \tfrac{1}{2}\partial\xi'\,\partial^2\eta'\,u_0 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{6}\partial\eta'\,\partial^3\xi'\,x_0^2 + \tfrac{1}{4}\partial^2\xi'\,\partial^2\eta'\,x_0 u_0 + \tfrac{1}{6}\partial\xi'\,\partial^3\eta'\,u_0^2 + \ldots .\right], \qquad \textbf{(58. a.)}$$

sodann verwandeln sich die Gleichungen (57. c.) in:

$$\left.\begin{aligned} &\Pi = x_0\left[\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\,\partial\xi' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}'\,\partial^2\xi'\,x_0 + \tfrac{1}{6}\mathfrak{p}'\,\partial^3\xi'\,x_0^2 + \ldots .\right] \\ \text{und}\quad &\Pi = u_0\left[p + p'\,\partial\eta' + \tfrac{1}{2}p'\,\partial^2\eta'\,u_0 + \tfrac{1}{6}p'\,\partial^3\eta'\,u_0^2 + \ldots .\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(58. b.)}$$

und die (57. d.) in:

$$\Pi^2 = x_0 u_0 \left[(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\,\partial\xi')(p + p'\,\partial\eta') + \tfrac{1}{2}\mathfrak{p}'(p + p'\,\partial\eta')\,\partial^2\xi'\,x_0 \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}p'(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\,\partial\xi')\,\partial^2\eta'\,u_0 + \ldots .\right]; \qquad \textbf{(58. c.)}$$

zuletzt wird die (57. e.):

(58. d.)
$$E^2 = x_0 u_0 [1 + \partial\xi'\partial\eta' - (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi')(p + p'\partial\eta') + \frac{1}{2}[\partial\eta' - \mathfrak{p}'(p + p'\partial\eta')]\partial^2\xi' x_0 + \frac{1}{2}[\partial\xi' - p'(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi')]\partial^2\eta' u_0 + \ldots\ldots].$$

Da nun E^2, wenn die durch O gelegte Gerade Tangente der Curve an dieser Stelle werden soll, für alle in grösster Nähe bei O liegende Puncte O′ der Curve, d. h. für alle möglichst klein gedachte und Curvenpuncten entsprechende Werthe von x_0 und u_0 so klein wie möglich werden muss, und diess nur dann geschieht, wenn auf der rechten Seite der Gleichung (58. d.) so viele Glieder der niedrigsten Dimensionen in Bezug auf x_0 und u_0, als sich nur immer thun lässt, zu Null gemacht werden, so hat man zuvörderst an die Gerade, welche Tangente der Curve an O werden soll, die Forderung zu stellen, dass sie

$$1 + \partial\xi'\partial\eta' - (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi')(p + p'\partial\eta') = 0$$

mache. Diese Bedingung der Tangente nimmt durch Wegschaffung der in ihr befindlichen Klammern die folgende Gestalt an:

$$(1 - \mathfrak{p}'p')\partial\xi'\partial\eta' - p\mathfrak{p}'\partial\xi' - \mathfrak{p}p'\partial\eta' + 1 - p\mathfrak{p} = 0$$

und lässt sich, wenn man beachtet, dass, nach Aussage der im ersten Abschnitte stehenden Gleichungen (108. a.), die an zweiter Stelle befindliche

(59. a.)
$$p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' = 1$$

giebt, man also für $1 - p'\mathfrak{p}'$ und $1 - p\mathfrak{p}$ hier $p\mathfrak{p}$ und $p'\mathfrak{p}'$ setzen kann, auf die nachstehende Form bringen:

$$(p\partial\xi' - p')(\mathfrak{p}\partial\eta' - \mathfrak{p}') = 0,$$

welche sogleich in die zwei folgenden zerfällt:

(59. b.)
$$p\partial\xi' = p' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p}\partial\eta' = \mathfrak{p}'.$$

Jede von diesen zwei Bedingungen der Tangente drückt, wie die Gleichungen (51.), in die sie sich leicht überführen lassen, eine und dieselbe Eigenschaft der Tangente aus, und man überzeugt sich bald, dass diese Bedingungen die einzigen sind, denen man die Tangente unterwerfen kann; denn da durch die Gleichungen (59. b.) das Verhältniss zwischen p und p′ oder zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ gegeben wird, und dadurch den im ersten Abschnitte (Nr. 21.) angestellten auf das ebene Coordinatensystem zurückgeführten Betrachtungen zur Folge die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen der zur Geraden gehörigen Richtung, somit auch diese Richtung selbst gänzlich bestimmt werden und die Gerade überdiess durch den Punct O geht, so ist diese Gerade eine völlig bestimmte, an die man keine neuen Anforderungen mehr machen kann.

Setzt man die durch die Gleichungen (59. b.) gegebenen Werthe von p′ und $\mathfrak{p}'$ in die Gleichung (59. a.), so findet man:

(60. a.)
$$1 = p\mathfrak{p}(1 + \partial\xi'\partial\eta'),$$

und durch dieselben Werthe gehen die Gleichungen (58. b.) über in:

(60. b.)
$$\begin{cases} \Pi = x_0\mathfrak{p}[1 + \partial\xi'\partial\eta' + \frac{1}{2}\partial^2\xi'\partial\eta' x_0 + \frac{1}{6}\partial^3\xi'\partial\eta' x_0^2 + \ldots\ldots] \\ \text{und} \\ \Pi = u_0 p[1 + \partial\eta'\partial\xi' + \frac{1}{2}\partial^2\eta'\partial\xi' u_0 + \frac{1}{6}\partial^3\eta'\partial\xi' u_0^2 + \ldots\ldots], \end{cases}$$

während die (58. c.) mit Zuziehung der (60. a.) wird:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi^2 = x_0 u_0 [(1+\partial\xi'\partial\eta') + \frac{1}{2}\partial^2\xi'\partial\eta' x_0 + \frac{1}{2}\partial^2\eta'\partial\xi' u_0 \\ \quad + \frac{1}{6}\partial^3\xi'\partial\eta' x_0^2 + \frac{1}{6}\partial^3\eta'\partial\xi' u_0^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial^2\xi'\partial\xi'\partial^2\eta'\partial\eta'}{1+\partial\xi'\partial\eta} x_0 u_0 + \ldots] \end{array}\right\} \quad (60.\ c.)$$

und die (58. d.) auf die gleiche Weise behandelt giebt:

$$E^2 = \frac{1}{4} x_0^2 u_0^2 \left[\left(\partial^2\xi'\partial^2\eta' - \frac{\partial^2\xi'\partial^2\eta'\partial\xi'\partial\eta'}{1+\partial\xi'\partial\eta'}\right) + \ldots\right],$$

welche letztere sich auf die folgende Form bringen lässt:

$$E^2 = \frac{1}{4} x_0^2 u_0^2 \left[\frac{\partial^2\xi'\partial^2\eta'}{1+\partial\xi'\partial\eta'} + \ldots\right]. \quad (60.\ d.)$$

Die Gleichungen (60. a. bis d.) liefern die Grösse des senkrechten Abstandes eines beliebigen Punctes O′ der Curve von der durch O gelegten Tangente, so wie das Stück der Tangente, welches von O an bis zu der Stelle reicht, wo das durch O′ auf die Tangente gefällte Loth diese schneidet, während die Gleichungen (59. a. bis d.) dieselben Grössen, aber auf eine beliebige durch O gelegte Gerade bezogen, hergeben. Da das erste Glied in der Gleichung (60. d.) schon von der vierten Dimension in Bezug auf x_0 und u_0 ist, während das erste in der Gleichung (59. d.) vorhandene Glied nur von der zweiten Dimension in Bezug auf die genannten beiden Grössen ist, so folgt hieraus, vorausgesetzt, dass die Coeffizienten dieser Reihen bei der Stelle O nicht aufhören, von endlicher Grösse zu sein, dass die Entfernungen der zunächst bei O liegenden Curvenpuncte von der Tangente an O unvergleichlich kleiner sind, als die Entfernungen derselben Curvenpuncte von jeder andern durch O gelegten Geraden, die mit der Tangente einen, wenn auch noch so kleinen Winkel von endlicher Grösse einschliesst. Eben darum ist diese Tangente unter allen den durch O gelegten Geraden die einzige, welche die Richtung der Curve an dieser Stelle anzuzeigen im Stande ist.

Hat man stets nur solche Puncte O′ der Curve vor Augen, die dem O so nahe liegen, dass sich deren Entfernung von O nicht durch eine endliche Grösse angeben lässt, so haben für solche Puncte auch die Grössen x_0 und u_0 keinen endlichen Werth, und dann verschwindet in obigen Reihen jedes folgende Glied in Vergleich zu seinem vorhergehenden, falls dieses nicht völlig null ist, oder jenes einen Coeffizienten hat, dessen Grösse überhaupt nicht mehr darstellbar ist. Die Reihen (60. a. bis d.) ziehen sich in diesem Falle auf ihr erstes Glied zurück und diess gilt auch von der Reihe (58. a.), so dass man für sie die folgenden Formen erhält, in denen wir den Buchstaben R, Π, E ein Null als Index angehängt haben, um dadurch anzudeuten, dass diese Grössen sich nur auf solche Puncte O′ der Curve beziehen, deren Entfernungen von O kleiner sind, als dass sie sich durch eine endliche Zahl aussprechen liessen:

$$\left.\begin{array}{c} R_0^2 = x_0 u_0 (1+\partial\xi'\partial\eta'), \\ \Pi_0 = x_0 \mathfrak{p} (1+\partial\xi'\partial\eta') \text{ und } \Pi_0 = u_0 \mathfrak{p} (1+\partial\eta'\partial\xi'), \\ \Pi_0^2 = x_0 u_0 (1+\partial\xi'\partial\eta'), \\ E_0^2 = \frac{1}{4} x_0^2 u_0^2 \frac{\partial^2\xi'\partial^2\eta'}{1+\partial\xi'\partial\eta'}, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (61.\ a.)$$

welche zeigen, dass für so nah an O gelegene Curvenpuncte $R_0^2 = \Pi_0^2$ ist, oder dass ihre Entfernungen und die der von ihnen aus gegen die Tangente gezogenen Lothe von dem Puncte O als gleiche Grössen anzusehen sind.

Erwägt man endlich, dass nach Aussage derjenigen im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (108. a.), welche an dritter und fünfter Stelle stehen,

$$\mathfrak{p} = p + p' \cos W \quad \text{und} \quad p \sin^2 W = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}' \cos W$$

ist, oder wenn man für p' und $\mathfrak{p}'$ ihre aus den Gleichungen (59. b.) sich ergebenden Werthe einsetzt:

$$\mathfrak{p} = p(1 + \partial\xi' \cos W) \quad \text{und} \quad p \sin^2 W = \mathfrak{p}(1 - \partial\eta' \cos W),$$

und dass diese letztern Gleichungen mit Zuziehung derer (54. b.), ξ, ξ' für x, x' und η, η' für u, u' setzend, übergehen in:

$$\mathfrak{p} = p\,\delta\eta \quad \text{und} \quad p = \mathfrak{p}\,\delta\xi,$$

so findet man dadurch, dass man jede dieser zwei letzten Gleichungen mit der (60. a.) multiplicirt:

$$1 = p^2 \delta\eta(1 + \partial\xi' \partial\eta') \quad \text{und} \quad 1 = \mathfrak{p}^2 \delta\xi(1 + \partial\xi' \partial\eta'),$$

woraus folgt:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\delta\eta}\sqrt{1 + \partial\xi' \partial\eta'}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = \frac{1}{\sqrt{\delta\xi}\sqrt{1 + \partial\xi' \partial\eta'}};$$

hierdurch nun gehen die auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (61. a.) über in:

$$\Pi_0 = x_0 \sqrt{\frac{1 + \partial\xi' \partial\eta'}{\delta\xi}} \quad \text{und} \quad \Pi_0 = u_0 \sqrt{\frac{1 + \partial\xi' \partial\eta'}{\delta\eta}},$$

welche man, weil $\delta\xi\,\delta\eta = 1$ ist, auch so schreiben kann:

$$\Pi_0 = x_0(\delta\eta + \partial\xi' \partial\eta' \delta\eta)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \Pi_0 = u_0(\delta\xi + \partial\eta' \partial\xi' \delta\xi)^{\frac{1}{2}}$$

oder, mit Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen durch die Gleichungen (13. a. und b.) ausgesprochenen Eigenschaften solcher Ableitungen, auch so:

(61. b.) $$\Pi_0 = x_0(\delta\eta + \partial\xi' \delta\eta')^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \Pi_0 = u_0(\delta\xi + \partial\eta' \delta\xi')^{\frac{1}{2}}.$$

128) Die Tangenten spielen bei der Beurtheilung aller übrigen Eigenschaften der Curve eine so wichtige Rolle, dass wir nicht umhin können, ihr Verhalten noch etwas weiter zu verfolgen, um nichts zurückzulassen, was zum besseren Verständniss des noch Folgenden dienen könnte. Aus den bisherigen Betrachtungen hat sich ergeben, dass die Tangente einer durch combinirte Gleichungen, wie die (48.) sind, gegebenen Curve an einem beliebigen ihrer Puncte O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten ξ, ξ' und η, η' sind, durch jede der Gleichungen (51.) nämlich

(62. a.) $$x_0' = \partial\xi' x_0 \quad \text{und} \quad u_0' = \partial\eta' u_0$$

dargestellt wird, und dass die Curve selbst durch jede der Gleichung (50. a. und b.), nämlich:

(62. b.) $$x_0' = \partial\xi' x_0 + Z \quad \text{und} \quad u_0' = \partial\eta' u_0 + \mathfrak{Z}$$

dargestellt wird, wenn der Kürze wegen

$$\frac{1}{2}\partial^2\xi' x_0^2 + \frac{1}{6}\partial^3\xi' x_0^3 + \ldots = Z \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{2}\partial^2\eta' u_0^2 + \frac{1}{6}\partial^3\eta' u_0^3 + \ldots = \mathfrak{Z}$$

gesetzt wird, und man sich unter x_0, x'_0 und u_0, u'_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten der Tangentenpuncte in der Gleichung (62. a.) und der Curvenpuncte in der Gleichung (62. b.) an den durch den Berührungspunct gelegten, mit den ursprünglichen parallelen und gleichläufigen neuen Axen vorstellt. Hebt man nun aus der Curve zwei bestimmte Puncte O_1 und O_2 heraus, und bezeichnet die an den Axen O X und O X′ sich bildenden schiefen und senkrechten Coordinaten des einen Punctes durch x_1, x'_1 und u_1, u'_1, des andern Punctes durch x_2, x'_2 und u_2, u'_2, so ist in Bezug auf den einen Punct

$$x'_1 = \partial\xi' x_1 + Z_1 \quad \text{und} \quad u'_1 = \partial\eta' u_1 + \mathfrak{Z}_1 \qquad \textbf{(62. c.)}$$

und in Bezug auf den andern Punct

$$x'_2 = \partial\xi' x_2 + Z_2 \quad \text{und} \quad u'_2 = \partial\eta' \mu_2 + \mathfrak{Z}_2, \qquad \textbf{(62. d.)}$$

wenn Z_1 und $\mathfrak{Z}_1$ das bedeuten, was aus Z und $\mathfrak{Z}$ wird, wenn man in diesen x_1 und u_1 an die Stelle von x_0 und u_0 setzt, so wie Z_2 und $\mathfrak{Z}_2$ das bedeuten sollen, was aus Z und $\mathfrak{Z}$ wird, wenn x_2 und u_2 für x_0 und u_0 gesetzt wird. Die durch die beiden Puncte O_1 und O_2 hindurch gehende Gerade wird durch jede der Gleichungen:

$$(x'_2 - x'_1)(x_0 - x_1) - (x_2 - x_1)(x'_0 - x'_1) = 0 \quad \text{und} \quad (u'_2 - u'_1)(u_0 - u_1) - (u_2 - u_1)(u'_0 - u'_1) = 0 \qquad \textbf{(63. a.)}$$

dargestellt, nach Aussage der im zweiten Abschnitte Nr. 103. besprochenen Formeln, wenn man diese auf die neuen Axen in Anwendung bringt und in ihnen der Natur des ebenen Systems gemäss die auf die dritte Axe sich beziehenden Coordinaten null sein lässt. Aus den Gleichungen (62. c. und d.) findet man durch Subtraction der über einander stehenden:

$$x'_2 - x'_1 = \partial\xi'(x_2 - x_1) + Z_2 - Z_1 \quad \text{und} \quad u'_2 - u'_1 = \partial\eta'(u_2 - u_1) + \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1$$

und durch die hieraus für $x'_2 - x'_1$ und $u'_2 - u'_1$ sich ergebenden Werthe verwandeln sich die Gleichungen (63. a.) in:

$$x'_0 - x'_1 = (x_0 - x_1)\left[\partial\xi' + \frac{Z_2 - Z_1}{x_2 - x_1}\right] \quad \text{und} \quad u'_0 - u'_1 = (u_0 - u_1)\left[\partial\eta' + \frac{\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1}{u_2 - u_1}\right]. \qquad \textbf{(63. b.)}$$

Diese Gleichungen gehören der durch O_1 und O_2 gelegten Geraden an, wo immer sich auch diese zwei Puncte auf der Curve befinden mögen; lässt man aber diese zwei Puncte dem O stets näher rücken, bis x_1, x_2 und u_1, u_2 so klein werden, dass sich deren Grössen durch keine endlichen Zahlen mehr ausdrücken lassen, und in den Entwickelungen die Glieder, welche in Bezug auf x_1 und x_2 oder u_1 und u_2 von einer höheren Dimension als andere sind, gegen diese andern verschwindend klein werden, so nehmen die vorstehenden Gleichungen einfachere Formen an. Ist nämlich das erste Glied in Z und $\mathfrak{Z}$ nicht null, so giebt es allein den vollen Werth von Z_1, Z_2 und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ her, und man findet erstlich

$$Z_2 - Z_1 = \tfrac{1}{2}\partial^2\xi'(x_2^2 - x_1^2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1 = \tfrac{1}{2}\partial^2\eta'(u_2^2 - u_1^2)$$

und hieraus

$$\frac{Z_2 - Z_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}\partial^2\xi'(x_2 + x_1) \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1}{u_2 - u_1} = \frac{1}{2}\partial^2\eta'(u_2 + u_1),$$

welche Werthe neben denen $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ in den Gleichungen (63. b.) verschwinden, wegen des in ihnen auftretenden Factors $x_2 + x_1$ oder $u_2 + u_1$, so dass die Gleichungen (63. b.) in diesem Falle werden:

$$x'_0 - x'_1 = (x_0 - x_1)\partial\xi' \quad \text{und} \quad u'_0 - u'_1 = (u_0 - u_1)\partial\eta'. \qquad \textbf{(63. c.)}$$

Sind hingegen die ersten in Z und $\mathfrak{Z}$ enthaltenen Glieder null, so ergeben sich die Werthe Z_2, Z_1 und $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_1$ aus dem ersten in ihnen wirklich vorhandenen Gliede; nehmen wir an, dass der Exponent von x_0 oder u_0 in diesem Gliede r sei, so findet man:

$$\frac{Z_2-Z_1}{x_2-x_1}=\frac{\partial^r \xi'}{1.2\ldots.r}\,\frac{x_2^r-x_1^r}{x_2-x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1}{u_2-u_1}=\frac{\partial^r \eta'}{1.2\ldots.r}\,\frac{u_2^r-u_1^r}{u_2-u_1},$$

und diese Grössen verschwinden wieder neben denen $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ in den Gleichungen (63. b.), und zwar um so mehr, da r immer grösser als zwei ist, also $\frac{x_2^r-x_1^r}{x_2-x_1}$ und $\frac{u_2^r-u_1^r}{u_2-u_1}$ Ausdrücke sind, welche in Bezug auf x_1 und x_2 oder u_1 und u_2 von einer höhern Dimension als der ersten sind. Man sieht hieraus, dass, wenn die Puncte O_1 und O_2 dem O so nahe liegen, die durch sie hindurch gehende Gerade stets durch die Gleichung (63. c.) vollkommen dargestellt wird, wenn nicht etwa einzelne der Coeffizienten in Z und $\mathfrak{Z}$ zufällig am Puncte O Werthe von solcher Grösse annehmen, dass sich diese nicht mehr durch endliche Zahlen angeben lässt. Solche seltene Ausnahmen abgerechnet zeigen die Gleichungen (63. c.), dass die durch je zwei möglichst nahe bei O gelegene Puncte O_1 und O_2 hindurch gehende Gerade immer mit der Tangente an O einerlei Richtung hat, woraus folgt, dass in einem Curvenelement von ganz geringer Ausdehnung in der Regel keine Richtungsänderungen von messbarer Grösse vorkommen können. Selbst wenn $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ null wären, hätte man doch noch immer die parallele Lage der durch O_1 und O_2 gelegten Geraden mit der Tangente an O unter solchen Umständen als eine in der Regel vorhandene Eigenschaft des Curvenelements anzusehen; denn in diesem Falle würde $x_0'-x_1'$ unvergleichlich kleiner als x_0-x_1, oder $u_0'-u_1'$ unvergleichlich kleiner als u_0-u_1 werden, und schon deswegen könnte die durch O_1 und O_2 gehende Gerade mit der Tangente an O keinen Winkel von messbarer Grösse bilden.

Aus dem Umstande, dass jede durch zwei unendlich nahe bei O liegende Puncte O_1 und O_2 gehende Gerade mit der Tangente an O parallel läuft, also die Curve in grösster Nähe bei O von Punct zu Punct in einer Richtung fortschreitet, welche die der Tangente selber ist, lassen sich nun mit grösster Schärfe und gleich leicht auf geometrischem wie auf analytischem Wege folgende zwei Eigenschaften der Tangente herleiten:

a) Geht möglichst nahe an dem Puncte O eine Gerade vorbei, welche die Tangente und die Curve unter einem endlichen Winkel schneidet, so unterscheiden sich die von O aus bis zu dieser Geraden genommenen Längen der Tangente an O und der Curve um keine Grösse, die mit diesen Längen selbst vergleichbar wäre;

b) zieht man von O aus bis zu der eben genannten, möglichst nahe an diesem Puncte vorbei gehenden noch eine zweite Gerade, die mit der Tangente an O einen Winkel von endlicher Grösse bildet, so unterscheiden sich die zwei von diesen beiden Geraden und einerseits von der Tangente, andererseits von der Curve eingeschlossenen Räume um keine Grösse von einander, die mit diesen Räumen selbst vergleichbar wäre.

Zu den vorstehenden Eigenschaften der Tangente fügen wir noch die folgenden hinzu. Läuft eine der Coordinatenaxen, z. B. die AX, parallel mit der Tangente an irgend einem bestimmten Puncte der Curve, so wird in diesem Falle die Gleichung der Tangente, welche schiefe Coordinaten in sich trägt:

$$x'-\xi'=0,$$

während die Gleichung derselben Tangente, in welcher senkrechte Coordinaten vorkommen, in diesem Falle

$$u' - \eta' = (u - \eta) \cos W$$

wird, wie sich schon aus der im ersten Abschnitte unter (108. d.) in letzter Stelle stehenden Gleichung entnehmen lässt. Die beiden vorstehenden Gleichungen bleiben für jeden Punct der so beschaffenen Tangente wahr und zeigen, wenn man sie mit den in (56. a.) aufgestellten allgemeinen Gleichungen der Tangente vergleicht, dass in dem hier angenommenen Falle, d. h. wenn die Axe AX parallel mit der Tangente an einem bestimmten Puncte O läuft, sein müsse

$$\partial \xi' = 0 \quad \text{und} \quad \partial \eta' = \cos W; \tag{64. a.}$$

es kann also nur dann sowohl

$$\partial \xi' = 0 \quad \text{als auch} \quad \partial \eta' = 0 \tag{64. b.}$$

werden, wenn W ein rechter Winkel ist, d. h. wenn die Axen des ebenen Systems senkrecht auf einander stehen. Liefe anstatt der Grundaxe AX die Polaraxe A𝔛 mit der Tangente an einem bestimmten Puncte der Curve parallel, so würde jetzt die Gleichung der Tangente, welche senkrechte Coordinaten in sich trägt:

$$u' - \eta' = 0,$$

und die, welche schiefe Coordinaten in sich trägt, in Folge der im ersten Abschnitte an vierter Stelle stehenden Gleichung (108. d.):

$$x' - \xi' = -(x - \xi) \cos W,$$

welche beide, verglichen mit den allgemeinen Gleichungen (56. a.), zu erkennen geben, dass in diesem Falle

$$\partial \eta' = 0 \quad \text{und} \quad \partial \xi' = -\cos W \tag{64. c.}$$

ist, dass also unter diesen Umständen nur dann gleichzeitig

$$\partial \eta' = 0 \quad \text{und} \quad \partial \xi' = 0 \tag{64. d.}$$

sein könne, wenn die Axen des ebenen Systems senkrecht auf einander stehen. Aehnliche Resultate, in welchen blos $\frac{1}{\partial \xi'}$ und $\frac{1}{\partial \eta'}$ zu stehen kommt, wo zuvor $\partial \xi'$ und $\partial \eta'$ stand, erhält man in dem Falle, wo die Grundaxe AX′ oder die Polaraxe A𝔛′ mit der Tangente an einer bestimmten Stelle der Curve parallel läuft.

129) Man nennt die in der Ebene des ebenen Systems liegende Gerade, welche durch den beliebigen Punct O einer ebenen Curve geht und senkrecht auf der zu dieser Stelle der Curve gehörigen Tangente steht, die Normale der Curve an dem Puncte O. Bedeuten wieder ξ, ξ' und η, η' die schiefen und senkrechten Coordinaten eines beliebigen Punctes O der durch die combinirten Gleichungen (48.) dargestellten Curve an den Axen AX und AX′ des ebenen Systems, so wird irgend eine durch den Punct O gehende Gerade, dem im zweiten Abschnitte Nr. 105. für die dortige Gleichung (54. g.) Erwiesenen gemäss, durch jede von den zwei nachstehenden Gleichungen dargestellt:

$$\mathfrak{p}_0 (x - \xi) + \mathfrak{p}'_0 (x' - \xi') = 0 \quad \text{und} \quad p_0 (u - \eta) + p'_0 (u' - \eta') = 0, \tag{65. a.}$$

in welcher x, x′ und u, u′ die schiefen und senkrechten Coordinaten von irgend einem Puncte dieser Geraden an den Axen AX und AX′, $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}'_0$ und p_0, p'_0 aber die in diesen Gleichungen

noch unbestimmt gebliebenen Coeffizienten bezeichnen, und diese Gleichungen werden der Normale an dem Puncte O angehören, wenn die in ihnen enthaltene Gerade auf der Tangente an O senkrecht steht; stellen daher in derselben Weise auch noch

$$\mathfrak{p}(x-\xi)+\mathfrak{p}'(x'-\xi')=0 \quad \text{oder} \quad p(u-\eta)+p'(u'-\eta')=0$$

die Gleichungen der Tangente an dem Puncte O vor, so wird, nach Aussage des im zweiten Abschnitte gegebenen Kennzeichens (58.) die Gleichung (65. a.) der zu findenden Normale angehören, wenn

(65. b.) $$p\,\mathfrak{p}_0+p'\mathfrak{p}'_0=0 \quad \text{oder} \quad p_0\,\mathfrak{p}+p'_0\,\mathfrak{p}'=0$$

ist. Nun zeigt aber die Vergleichung der so eben für die Tangente angenommenen Gleichungen mit den oben dafür gefundenen (56. a.), dass

$$\mathfrak{p}:\mathfrak{p}'=\partial\xi':-1 \quad \text{und} \quad p:p'=\partial\eta':-1$$

sein müsse, wodurch das Kennzeichen (65. b.) sich verwandelt in:

$$\mathfrak{p}_0:\mathfrak{p}'_0=1:\partial\eta' \quad \text{oder} \quad p_0:p'_0=1:\partial\xi',$$

und die Gleichungen (65. a.) in jeder der zwei nachstehenden Formen sich schreiben lassen:

(65. c.) $$(x-\xi)+(x'-\xi')\,\partial\eta'=0 \quad \text{und} \quad (u-\eta)+(u'-\eta')\,\partial\xi'=0,$$

von denen jede die gesuchte Normale der Curve an dem Puncte O darstellt. Diese Gleichungen lassen sich, wenn man mit Hilfe der schon in Nr. 111. mitgetheilten Relationen

$$\partial\xi'=-\frac{\overset{10}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{01}{\partial}\varphi_\xi} \quad \text{und} \quad \partial\eta'=-\frac{\overset{10}{\partial}\psi_\eta}{\overset{01}{\partial}\psi_\eta}$$

die Grössen $\partial\xi'$ und $\partial\eta'$ aus ihnen eliminirt, auf die andere Form

(65. d.) $$(x-\xi)\overset{01}{\partial}\psi_\eta-(x'-\xi')\overset{10}{\partial}\psi_\eta=0 \quad \text{und} \quad (u-\eta)\overset{01}{\partial}\varphi_\xi-(u'-\eta')\overset{10}{\partial}\varphi_\xi=0$$

bringen, in der sie zeigen, wie die Gleichung der Normale unmittelbar aus der Gleichung der Curve von der einen oder andern in (48.) angegebenen Art gefunden werden kann.

130) In der zu einem bestimmten Radius gehörigen Kreislinie herrscht allerwärts nur eine und dieselbe Krümmung, aber von einem Kreis zum andern ändert sich die Krümmung mit dem Radius ab; sie ist grösser beim kleinern Radius und kleiner beim grössern Radius. Stellt man sich Kreislinien durch alle Abstufungen hindurch vom kleinsten bis zum grössten Radius vor, so tragen diese alle möglichen Krümmungen von der grössten bis zur kleinsten in sich. Man kann aus diesem Grunde den Radius einer Kreislinie im umgekehrten Verhältnisse genommen zum Maase ihrer Krümmung machen, und bei einer Curve, die von Stelle zu Stelle eine andere Krümmung hat, die Frage aufwerfen, welche Kreiskrümmung mit der Krümmung der Curve an einer bestimmten ihrer Stellen übereinstimme, wenn man sich an dieser Stelle ein so kleines Stück der Curve abgesondert denkt, um in dessen Umfange überall eine und dieselbe, d. h. eine Kreiskrümmung voraussetzen zu können. Von allen Kreislinien, die durch eine bestimmte Stelle der Curve gehen und zu verschiedenen Mittelpuncten gehören, kann offenbar nur diejenige die Krümmungsgrösse der Curve an dieser Stelle hergeben, deren Puncte mit den zunächst bei dieser Stelle liegenden Puncten der Curve möglichst genau übereinstimmen. Man nennt den

Kreis, dessen Krümmung mit der Krümmung der Curve an einer ihrer Stellen übereinkommt, *den zu dieser Stelle gehörigen Krümmungskreis der Curve*, und den diesem Kreise entsprechenden Radius *den Krümmungsradius oder Krümmungshalbmesser der Curve an der Stelle*, zu welcher der Krümmungskreis gehört.

Ist eine ebene Curve durch die combinirten Gleichungen (48.) gegeben, in deren erster die Veränderlichen x, x′ und in deren zweiter die Veränderlichen u, u′ vorkommen, jene Veränderlichen als schiefe, diese als senkrechte, auf die Axen AX und AX′ eines ebenen Systems bezogene Coordinaten gedacht, und will man die Grösse der Krümmung erfahren, welche diese Curve an einer ihrer Stellen O besitzt, wobei wir uns den Punct O zwar als einen völlig beliebigen, aber doch bestimmt hervorgehobenen zu denken haben, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten wir durch ξ, ξ' und η, η' vorstellen werden, so kann man dabei wie folgt verfahren. Man lege durch diesen Punct O mit den Axen AX und AX′ parallel und gleichläufig zwei neue Axen OX und OX′ und bezeichne durch x_0, x'_0 und u_0, u'_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten desselben Curvenpunctes an diesen neuen Axen, der an den ursprünglichen Axen die x, x′ und u, u′ gab, so finden zwischen diesen Coordinaten und denen des Punctes O die Gleichungen (49.) sowohl als die (50. a. und b.) statt. Bezeichnen wir nun durch $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}'_0$ und $\mathfrak{u}_0$, $\mathfrak{u}'_0$ die schiefen und senkrechten, auf die neuen Axen OX und OX′ bezogenen Coordinaten des Mittelpunctes von einem durch den Punct O hindurch gehenden Kreise, dessen Halbmesser durch ϱ vorgestellt werden soll, und den wir uns mit den Axen AX und AX′ in einer und derselben Ebene liegend denken, so hat man nach Anleitung derjenigen von den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (108. b.), welche an erster Stelle steht:

$$\varrho^2 = \mathfrak{x}_0 \mathfrak{u}_0 + \mathfrak{x}'_0 \mathfrak{u}'_0 ; \qquad \textbf{(66. a.)}$$

bezeichnet ferner ϱ' die Länge der von dem gleichen Mittelpuncte bis zu irgend einem von O verschiedenen Puncte O′ der Curve gezogenen Geraden, und stellen x_0, x'_0 und u_0, u'_0 die schiefen und senkrechten auf die neuen Axen OX, OX′ bezogenen Coordinaten des Punctes O′ vor, so ist nach Aussage derjenigen von den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (108. d.), welche an erster Stelle steht:

$$\varrho'^2 = (x_0 - \mathfrak{x}_0)(u_0 - \mathfrak{u}_0) + (x'_0 - \mathfrak{x}'_0)(u'_0 - \mathfrak{u}'_0)$$

oder wenn man ausmultiplicirt und auf die Gleichung (66. a.) Rücksicht nimmt:

$$\varrho'^2 = \varrho^2 - [(x_0 \mathfrak{u}_0 + x'_0 \mathfrak{u}'_0 + u_0 \mathfrak{x}_0 + u'_0 \mathfrak{x}'_0) - (x_0 u_0 + x'_0 u'_0)] . \qquad \textbf{(66. b.)}$$

Der kleinste Abstand des Curvenpunctes O′ von dem Kreise, dessen Radius ϱ ist, ist den in Nr. 124. entwickelten Eigenschaften des Kreises zur Folge die von O′ bis an diese Kreislinie gehende Gerade, welche verlängert durch den Mittelpunct des Kreises geht, also $\pm(\varrho - \varrho')$, und man hat der Gleichung (66. b.) gemäss:

$$\varrho - \varrho' = \varrho - (\varrho^2 - [(x_0 \mathfrak{u}_0 + x'_0 \mathfrak{u}'_0 + u_0 \mathfrak{x}_0 + u'_0 \mathfrak{x}'_0) - (x_0 u_0 + x'_0 u'_0)])^{\frac{1}{2}}.$$

Dieser kleinste Abstand wird nur dann null, wenn

$$x_0 \mathfrak{u}_0 + x'_0 \mathfrak{u}'_0 + u_0 \mathfrak{x}_0 + u'_0 \mathfrak{x}'_0 - (x_0 u_0 + x'_0 u'_0) = 0 \qquad \textbf{(66. c.)}$$

ist, und nimmt in dem Grade zu, als die Coordinaten vom Mittelpunct des Kreises und vom Curvenpunct O′ der Gleichung (66. c.) mehr entgegen sind; soll daher unser Kreis vom Radius ϱ Krümmungskreis der Curve an der Stelle O werden, so muss die Gleichung (66. c.) durch

alle Puncte O′ der Curve, welche dem O zunächst liegen, ohne jedoch mit ihm zusammen zu fallen, möglichst genau wahr gemacht werden.

Erwägt man nun, dass der im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichung (16.) zur Folge, wenn man in ihr, wie beim ebenen System geschehen muss, die auf die dritte Axe sich beziehenden Coordinaten null sein lässt,

$$x_0 u_0 + x'_0 u'_0 = u_0 r_0 + u'_0 r'_0$$

ist, so wird man gewahr, dass die Bedingung (66. c.) sich auf jede der beiden folgenden Formen bringen lässt:

(67. a.) $$2(x_0 u_0 + x'_0 u'_0) - (x_0 u_0 + x'_0 u'_0) = 0 \quad \text{und} \quad 2(u_0 r_0 + u'_0 r'_0) - (x_0 u_0 + x'_0 u'_0) = 0.$$

Um diesen letzten beiden Gleichungen eine unserm gegenwärtigen Zwecke angemessenere Gestalt zu geben, setze man in ihre einzelnen Glieder für x'_0 und u'_0 ihre durch die Gleichungen (50. a. und b.) gegebenen Werthe, wodurch man findet:

(67. b.) $$\left\{\begin{aligned} 2(x_0 u_0 + x'_0 u'_0) &= 2x_0(u_0 + u'_0 \partial\xi') + x_0^2 u'_0 \partial^2\xi' + \dots \\ 2(u_0 r_0 + u'_0 r'_0) &= 2u_0(r_0 + r'_0 \partial\eta') + u_0^2 r'_0 \partial^2\eta' + \dots \\ x_0 u_0 + x'_0 u'_0 &= x_0 u_0(1 + \partial\xi'\partial\eta') + \dots, \end{aligned}\right.$$

wo überall nur diejenigen Glieder angeschrieben worden sind, welche in Bezug auf x_0 und u_0 die zweite Dimension nicht übersteigen. Erwägt man ferner, dass die Gleichungen (54. a.) und (54. b.), welche auf alle in den Gleichungen (48.) enthaltenen Puncte anwendbar sind, auch für den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ' und η, η' sind, bestehen bleiben, und man deswegen hat nicht nur

$$\eta = \xi + \xi' \cos W \quad \text{und} \quad \xi \sin^2 W = \eta - \eta' \cos W,$$

sondern auch

(68. a.) $$\delta\eta = 1 + \partial\xi' \cos W \quad \text{und} \quad \delta\xi \sin^2 W = 1 - \partial\eta' \cos W,$$

und dass man in denselben Gleichungen auch x, x′ mit x_0, x'_0 und u, u′ mit u_0, u'_0 vertauschen könne, wobei W seinen Werth nicht ändert, da die neuen Axen OX und OX′ den ursprünglichen AX und AX′ parallel und gleichläufig sind, so dass man auch noch hat:

$$u_0 = x_0 + x'_0 \cos W \quad \text{und} \quad x_0 \sin^2 W = u_0 - u'_0 \cos W$$

oder, wenn man auch hier wieder für x'_0 und u'_0 ihre durch die Gleichungen (50. a. und b.) gegebenen Werthe setzt:

$$u_0 = (1 + \partial\xi' \cos W)\,x_0 + \tfrac{1}{2}\partial^2\xi' \cos W\, x_0^2 + \dots$$

und

$$x_0 \sin^2 W = (1 - \partial\eta' \cos W)\,u_0 - \tfrac{1}{2}\partial^2\eta' \cos W\, u_0^2 - \dots,$$

welche Gleichungen sich mit Zuziehung derer (68. a.) auch so schreiben lassen:

(68. b.) $$\left\{\begin{aligned} u_0 &= \delta\eta\, x_0 + \tfrac{1}{2}\partial^2\xi' \cos W\, x_0^2 + \dots \\ &\text{und} \\ x_0 &= \delta\xi\, u_0 - \tfrac{1}{2}\partial^2\eta' \frac{\cos W}{\sin^2 W} u_0^2 - \dots, \end{aligned}\right.$$

so überzeugt man sich, dass $x_0 u_0$ auf jede der zwei nachfolgenden Weisen geschrieben werden kann:

$$x_0 u_0 = x_0^2 \delta\eta + \frac{1}{2} x_0^3 \partial^2 \xi' \cos W + \ldots.$$

und

$$x_0 u_0 = u_0^2 \delta\xi - \frac{1}{2} u_0^3 \partial^2 \eta' \frac{\cos W}{\sin^2 W} - \ldots.$$

und hierdurch geht die letzte der Gleichungen (67. b.) über in jede der zwei nachstehenden Formen:

$$x_0 u_0 + x_0' u_0' = x_0^2 \delta\eta (1 + \partial\xi' \partial\eta') + \ldots.$$

und

$$x_0 u_0 + x_0' u_0' = u_0^2 \delta\xi (1 + \partial\xi' \partial\eta') - \ldots., \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68.\ c.)$$

in denen blos Glieder der dritten und höhern Dimension in Bezug auf x_0 oder u_0 nicht angeschrieben stehen. Setzt man nun in die erste Bedingung (67. a.) für $2(x_0 u_0 + x_0' u_0')$ und $x_0 u_0 + x_0' u_0'$ ihre Werthe aus den ersten in (67. b.) und (68. c.) enthaltenen Gleichungen und eben so in die zweite Bedingung (67. a.) für $u_0 r_0 + u_0' r_0'$ und $x_0 u_0 + x_0' u_0'$ ihre aus den zweiten in (67. b.) und (68. c.) enthaltenen Gleichungen entnommenen Werthe, so nehmen jene beiden Bedingungen die folgende Gestalt an:

$$2x_0(u_0 + u_0' \partial\xi') + x_0^2[u_0' \partial^2\xi' - \delta\eta(1 + \partial\xi'\partial\eta')] + \ldots. = 0$$

und

$$2u_0(r_0 + r_0' \partial\eta') + u_0^2[r_0' \partial^2\eta' - \delta\xi(1 + \partial\xi'\partial\eta')] + \ldots. = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (69.)$$

in welchen alle diejenigen Glieder angeschrieben stehen, die nicht in Bezug auf x_0 oder u_0 von der dritten oder einer noch höhern Dimension sind. Es ist jede der Gleichungen (69.) die (66. c.) in einer abgeänderten Gestalt und daher kann unser Kreis vom Radius ϱ nur dann auf den Namen des Krümmungskreises Anspruch machen, wenn die zunächst bei O gelegenen Puncte der Curve die eine oder die andere der Gleichungen (69.) möglichst vollkommen befriedigen.

Da aber die zunächst bei O liegenden Curvenpuncte sowohl für x_0 als für u_0 so kleine Werthe liefern, dass deren Grösse sich nicht durch endliche Zahlen bezeichnen lässt, so verschwinden die in den Reihen (69.) enthaltenen Glieder, welche eine höhere Potenz von x_0 oder u_0 in sich tragen, gegen solche, die eine niedrigere Potenz dieser Grössen in sich aufnehmen und deren Coeffizienten nicht völlig null sind. Hieraus folgt weiter, dass die zunächst bei O gelegenen Curvenpuncte die Gleichungen (69.) um so vollkommener befriedigen werden, je mehr Coeffizienten von den in ihnen auftretenden und mit den niedrigsten Potenzen von x_0 oder u_0 versehenen Gliedern durch die Lage des Mittelpuncts in unserm Kreise, dessen Radius ϱ ist, zu Null gemacht werden, dass also dieser Kreis dadurch zum Krümmungskreis wird, dass man in den Reihen (69.) von vorn herein so viele Coeffizienten von x_0 oder u_0 null werden lässt, als durch die Wahl seines Mittelpunctes geschehen kann. Die zwei ersten Glieder der genannten Reihen liefern diesem gemäss die zwei folgenden Bedingungen:

$$u_0 + u_0' \partial\xi' = 0 \quad \text{und} \quad u_0' \partial^2\xi' - \delta\eta(1 + \partial\xi'\partial\eta') = 0$$

oder

$$r_0 + r_0' \partial\eta' = 0 \quad \text{und} \quad r_0' \partial^2\eta' - \delta\xi(1 + \partial\xi'\partial\eta') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70.\ a.)$$

und hieraus lassen sich sowohl die senkrechten Coordinaten r_0, r_0', wie die schiefen u_0, u_0' vom Mittelpunct des Kreises finden; man erhält nämlich:

(70. b.) $$\left\{\begin{array}{l} u'_0 = \frac{\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta')}{\partial^2\xi'} \text{ und } u_0 = -\frac{\partial\xi'\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta')}{\partial^2\xi'} \\ \text{oder} \\ x'_0 = \frac{\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta')}{\partial^2\eta'} \text{ und } x_0 = -\frac{\partial\eta'\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta')}{\partial^2\eta'}, \end{array}\right.$$

und da hierdurch die Lage dieses Mittelpunctes völlig bestimmt wird, man also kein Mittel mehr hat, noch fernere Coeffizienten der Reihen (69.) zu Null zu machen, so wird durch die Gleichungen (70. b.) der Mittelpunct des Krümmungskreises angezeigt. Setzt man diese Werthe von u_0, u'_0 und x_0, x'_0 in die Gleichung (66. a.) ein, und berücksichtigt man, dass der in §. 12. erwiesenen Gleichung (10. b.) zur Folge $\delta x \delta u = 1$ für alle Puncte der durch die Gleichungen (48.) gegebenen Curve und daher in Bezug auf den Punct O auch $\delta\xi\delta\eta = 1$ ist, so erhält man:

(71. a.) $$\varrho^2 = \frac{(1+\partial\xi'\partial\eta')^3}{\partial^2\xi'\partial^2\eta'},$$

und diese Gleichung dient zur Bestimmung des Halbmessers ϱ vom Krümmungskreise der Curve an einer beliebigen ihrer Stellen O, deren Coordinaten ξ, ξ' und η, η' sind. Eben weil diese Stelle jede beliebige aus der Curve herausgehobene sein kann, haben die Coordinaten ξ, ξ' und η, η' eine eben so allgemeine Bedeutung wie die x, x' und u, u' in den Gleichungen (48.), falls man sich diese als einem und demselben Puncte der Curve angehörig denkt; man kann daher unter dieser Beschränkung in der Gleichung (71. a.) auch diese letztern Coordinaten an die Stelle der erstern setzen. In dem besondern Falle, wo die Tangente an der hervorgehobenen Stelle O entweder mit der Grundaxe A X oder mit der Polaraxe A $\mathfrak{X}$ parallel läuft, und deswegen den Gleichungen (64. a.) und (64. c.) zur Folge entweder $\partial\xi' = 0$ oder $\partial\eta' = 0$ wird, verwandelt sich die Gleichung (71. a.) jedesmal in:

(71. b.) $$\varrho^2 = \frac{1}{\partial^2\xi'\partial^2\eta'}.$$

Stehen die Axen A X, A X' des ursprünglichen ebenen Coordinatensystems senkrecht auf einander, so geben alle Puncte der Curve $x = u$ und $x' = u'$; es sind daher auch die auf einander folgenden Ableitungen von x' und u', sonach auch die von ξ' und η' einander gleich; deswegen verwandelt sich in diesem Falle die Gleichung (71. a.) in:

(72. a.) $$\varrho^2 = \frac{(1+(\partial\xi')^2)^3}{(\partial^2\xi')^2} = \frac{(1+(\partial\eta')^2)^3}{(\partial^2\eta')^2}$$

und die (71. b.) in:

(72. b.) $$\varrho^2 = \frac{1}{(\partial^2\xi')^2} = \frac{1}{(\partial^2\eta')^2}.$$

Halten wir die ersten Gleichungen (70. a.) an die der Normale an O entsprechenden Gleichungen (65. c.) und bedenken wir, dass man in diesen an die Stelle von $x - \xi$, $x' - \xi'$ und $u - \eta$, $u' - \eta'$ auch die schiefen und senkrechten Projectionszahlen setzen kann, welche die von einem beliebigen Puncte der Normale nach dem O hinlaufende Richtung, die stets in dieser zu O gehörigen Normale liegt, an den Axen A X, A X', sonach auch an den diesen parallelen und gleichläufigen O X, O X' liefert, so gewinnen wir die Ueberzeugung, dass der vom Mittelpunct des Krümmungskreises nach dem Puncte O der Curve gezogene Radius in der zu O

gehörigen Normale liegt, sonach der Mittelpunct des zu einer Stelle der Curve gehörigen Krümmungskreises stets in die zu derselben Stelle gehörige Normale fällt. Diese Eigenschaft des Krümmungskreises giebt in Verbindung mit der aus der Gleichung (71. a.) zu entnehmenden Grösse ϱ seines Halbmessers alles an die Hand, was zur Erkenntniss der Curvenkrümmung an einer ihrer Stellen erfordert wird.

131) Obschon die Bestimmungen der vorigen Nummer alles in sich enthalten, wodurch sich die in einer ebenen Curve vorfallenden Krümmungsänderungen vollständig beurtheilen lassen, so werden wir doch noch einige Vergleichungen der hier gewonnenen Resultate mit schon früher erhaltenen folgen lassen, durch die der Gegenstand mehr von allen Seiten beleuchtet wird. Dividiren wir nämlich die letzte der Gleichungen (61. a.), welche E_0^2 darstellt, in das Quadrat der vorletzten, welche Π_0^2 darstellt, so erhalten wir:

$$\frac{\Pi_0^4}{E_0^2} = 4\,\frac{(1+\partial\xi\,\partial\eta')^3}{\partial^2\xi\,\partial^2\eta'}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (71. a.):

$$\frac{\Pi_0^4}{E_0^2} = 4\varrho^2,$$

woraus man findet:

$$\frac{\Pi_0^2}{E_0} = 2\varrho, \qquad \textbf{(73. a.)}$$

wenn man sich unter E_0 und ϱ immer nur positive Werthe vorstellt, und diese letzte Gleichung zeigt, dass man den Durchmesser des zu einer Stelle O gehörigen Krümmungskreises findet, wenn man von einer andern Stelle O′ der Curve auf die zu O gehörige Tangente ein Loth fällt, welches diese Tangente in S trifft und den Werth von $\frac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{O'S}}$ nimmt, wie er wird, wenn man den Punct O′ so nahe an den O rücken lässt, dass sich die Entfernung dieser beiden Puncte von einander durch keine endliche Zahl mehr bezeichnen lässt.

Erwägt man ferner, dass bei so grosser Annäherung des Punctes O′ an den O, wie sie die Grössen Π_0 und E_0 immer voraussetzen, den Gleichungen (61. a.) gemäss $\Pi_0^2 = \mathrm{R}_0^2$ ist, und man daher die Gleichung (73. a.) auch so schreiben kann:

$$\frac{\mathrm{R}_0^2}{E_0} = 2\varrho, \qquad \textbf{(73. b.)}$$

und dass, wo man auch den Punct O′ auf der Curve nehmen mag, $\frac{\mathrm{O'S}}{\mathrm{OO'}}$ immer der Sinus des spitzen Winkels ist, den die durch O und O′ gelegte Gerade mit der Tangente an O bildet, oder, wenn man hier wieder die Bezeichnungen der Nr. 127. beibehält, dass allgemein

$$\frac{E}{\mathrm{R}} = \sin\Theta$$

ist, so kann man dieser Gleichung in dem Falle, wo der Punct O′ dem O unbestimmbar nahe rückt, und deswegen E und R in E_0 und R_0 übergehen, die andere Gestalt geben:

$$\frac{E_0}{\mathrm{R}_0} = \sin\Theta_0, \qquad \textbf{(73. c.)}$$

wenn man analog den so nahen Puncten O und O′ entsprechenden Winkel Θ durch Θ_0 bezeichnet. Die Gleichung (73. c.) lässt sich aber mittelst der (73. b.) auch so schreiben:

(73. d.) $$\frac{R_0}{2\varrho} = \sin\Theta_0 .$$

Wir werden in der Folge den spitzen Winkel Θ_0, den die Tangente an O mit einer Geraden einschliesst, die durch O und noch einen zweiten Punct O′ der Curve geht, welcher so nahe an dem O liegt, dass sich die Entfernung beider von einander durch kein endliches Maas mehr angeben lässt, den Krümmungswinkel der Curve an der Stelle O nennen. Der Krümmungswinkel besitzt nach Aussage der Gleichung (73. d.) folgende Eigenschaften:

a) Da R_0 die Entfernung der beiden Puncte O und O′ von einander bezeichnet, also stets eine unbestimmbar kleine Grösse bleibt, so ist an jeder Stelle O der Curve, bei welcher ϱ einen endlichen Werth hat, $\sin\Theta_0$ eine unbestimmbar kleine Grösse, weshalb man in der Gleichung (73. d.) auch blos Θ_0 für $\sin\Theta_0$ setzen kann;

b) der Werth von $\sin\Theta_0$ ist bei jeder bestimmten Curvenstelle O der Grösse R_0, d. h. der unbestimmbar kleinen Entfernung des Punctes O′ von dem O proportional, was nichts anders sagt, als dass die Neigungen der von O nach verschiedenen diesem so nahe liegenden Puncten O′ gezogenen Geraden gegen die Tangente den Abständen dieser Puncte von dem O proportional sind;

c) das Verhältniss zwischen jedem solchen Abstande und dem dazu gehörigen Krümmungswinkel liefert stets den zu O gehörigen Krümmungshalbmesser.

Noch mag hier die Bemerkung stehen, dass zwar in Nr. 130. vorausgesetzt worden ist, dass der Krümmungskreis in der Ebene der Curve liege, was vielleicht bedenklich scheinen könnte; indessen überzeugt man sich sehr leicht, dass ein Kreis, dessen Ebene nicht in der der Curve liegt, die von dem Krümmungskreise verlangten Eigenschaften nicht besitzen könne, wenn man bedenkt, dass die kleinsten Abstände der zunächst an O gelegenen Curvenpuncte von einer durch O gelegten und die Ebene der Curve unter einem Winkel von noch so kleiner angebbarer Grösse schneidenden Ebene im günstigsten Falle doch nie Grössen von einer höhern als der zweiten Ordnung in Bezug auf x_0 und u_0 werden, welches dann um so mehr noch von den kleinsten Abständen derselben Curvenpuncte von einer in dieser letztern Ebene liegenden Kreislinie gilt, während aus den in Nr. 130. gepflogenen Untersuchungen sogleich hervorgeht, dass die kleinsten Abstände solcher Curvenpuncte von dem dort bestimmten Krümmungskreise nur Grössen der dritten Ordnung in Bezug auf x_0 und u_0, also unvergleichlich kleiner als jene sind, wodurch eben dieser letztere Kreis zum Krümmungskreis gestempelt wird. In dem Ausdrucke

$$x_0 u_0 + x_0' u_0' + u_0 \mathfrak{x}_0 + u_0' \mathfrak{x}_0' - (x_0 u_0 + x_0' u_0')$$

nämlich, welcher auf der linken Seite der Gleichung (66. c.) vorkommt und von welchem die auf der linken Seite der Gleichungen (69.) blose Umformungen sind, bleiben, nachdem die Bedingungen (70. a.) erfüllt sind, blos Grössen der dritten Ordnung in Bezug auf x_0 und u_0 zurück, und dann giebt die unmittelbar vor (66. c.) stehende Gleichung für $\varrho - \varrho'$, welches der Abstand eines solchen Curvenpunctes vom Krümmungskreise wird, auch nur eine Grösse der dritten Ordnung in Bezug auf x_0 und u_0 an die Hand.

132) Ist eine ebene Curve durch die combinirten Gleichungen (48.) zwischen den schiefen und senkrechten Coordinaten ihrer Puncte an den Axen A X und A X′ des ebenen Systems

gegeben, und stellt man sich irgend einen ihrer Puncte $\mathfrak{O}$ (Fig. 2. a.) oder (Fig. 2. b.) als die eine unveränderliche Grenze dieser Curve vor, so wird die Länge des zwischen $\mathfrak{O}$ und einem beliebigen andern Puncte O′ der Curve befindlichen Curvenstücks, wenn man sich den zweiten Punct O′ veränderlich denkt, sich lediglich mit der Lage des Punctes O′ abändern, also eine Function von dieser Lage, d. h. von den die Lage des Punctes O′ bestimmenden Coordinaten sein, wobei es ganz gleichgültig ist, ob diese die schiefen x, x′ oder die senkrechten u, u′ sind, da sich die einen in die andern mittelst der Gleichungen (54. a.) überführen lassen. Weil aber durch die Gleichungen der Curve die beiden Coordinaten einer jeden Art von einander abhängig gemacht werden, und man sich deswegen die eine als Function der andern zu denken hat, so folgt, dass man sich die Länge eines solchen Curvenstücks immer als Function von einer einzigen der vier zum beweglichen Puncte O′ gehörigen Coordinaten x, x′ und u, u′ vorstellen kann, die dann die unabhängig Veränderliche wird.

Wir werden durch $\mathfrak{L}_x$ die Länge des zwischen $\mathfrak{O}$ und O′ liegenden Theils der Curve bezeichnen, wenn x zur Unabhängigen genommen wird, und durch $\mathfrak{L}_u$, wenn man sich u als unabhängig Veränderliche denkt; bei dem ersten Zeichen hat man die Puncte O′ der Curve wie in Fig. 2. a. vorgestellt worden ist, als durch die Stücke AP′ gegeben anzusehen, welche von der Axe AX durch Gerade, die mit der Axe AX′ parallel durch die Puncte O′ hindurch gehen, abgeschnitten werden; das zweite Zeichen hingegen setzt voraus, dass man die Puncte O′ der Curve, wie in Fig. 2. b. vorgestellt worden ist, auffasse als bestimmt durch die Stücke AP′, welche von der Axe AX durch Gerade abgeschnitten werden, die von den Puncten O′ aus senkrecht auf die Axe AX gefällt werden. In jedem dieser zwei Fälle heben wir neben dem einen Punct O′ noch einen beliebigen zweiten O aus der Curve heraus, den wir uns zwischen $\mathfrak{O}$ und O′ liegend vorstellen, und legen durch diesen Punct O zwei neue Axen OX und OX′, welche den ursprünglichen AX und AX′ parallel und gleichläufig sind, dann ist in derselben Weise, wie schon in Nr. 123. gezeigt worden ist, wenn wir wie dort die schiefen und senkrechten Coordinaten des Punctes O an den Axen AX und AX′ durch ξ, ξ' und η, η', die des Punctes O′ an den Axen AX und AX′ durch x, x′ und u, u′, an den Axen OX und OX′ aber durch x_0, x'_0 und u_0, u'_0 bezeichnen:

$$x = \xi + x_0\,,\quad x' = \xi' + x'_0 \quad \text{und} \quad u = \eta + u_0\,,\quad u' = \eta' + u'_0\,,$$

und darum hat man der im vorigen Paragraphen aufgestellten Gleichung (3. a.) zur Folge, was für Functionen von x oder u auch $\mathfrak{L}_x$ oder $\mathfrak{L}_u$ sein mögen, wenn sie nur zwischen den zwei Stellen x und ξ oder u und η stets endlich und stetig bleiben, sowohl

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi = \partial\mathfrak{L}_\xi x_0 + \partial^2\mathfrak{L}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \ldots \\ \text{als auch} \\ &\mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta = \partial\mathfrak{L}_\eta u_0 + \partial^2\mathfrak{L}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(74. a.)}$$

und es stellt in diesen Reihen $\mathfrak{L}_x$ oder $\mathfrak{L}_u$ die Länge des Curvenstücks zwischen $\mathfrak{O}$ und O′, so wie $\mathfrak{L}_\xi$ oder $\mathfrak{L}_\eta$ die Länge des zwischen $\mathfrak{O}$ und O befindlichen vor, so dass also $\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi$ oder $\mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta$ die Länge des durch O und O′ begrenzten Stücks anzeigt.

Denkt man sich nun in jeder der beiden Vorstellungsweisen, welche durch Fig. 2. a. und Fig. 2. b. versinnlicht werden, die zu O gehörige Tangente O T gezogen und die der jedesmaligen Figur angehörige Gerade P′ O′ verlängert, bis sie die Tangente in O_1 schneidet, und bezeichnet man durch x_1, x_1' und u_1, u_1' die dem Puncte O_1 in Fig. 2. a. entsprechenden schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen O X und O X′, so wie durch x_2, x_2' und u_2, u_2' die dem gleichbezeichneten, aber in Fig. 2. b. auftretenden Puncte O_1 entsprechenden, so ist, weil die Puncte O′ und O_1 in Fig. 2. a. einerlei schiefe, und dieselben Puncte O′ und O_1 in Fig. 2. b. einerlei senkrechte Coordinaten an der Axe A X liefern:

(74. b.) $$x_1 = x_0 \quad \text{und} \quad u_2 = u_0.$$

Man hat also im Falle der Fig. 2. a. das zum Puncte O_1 gehörige x_1 als durch das zum Puncte O′ gehörige x_0, und im Falle der Fig. 2. b. das zum Puncte O_1 gehörige u_2 als durch das zum Puncte O′ gehörige u_0 gegeben anzusehen. Um nun die übrigen Coordinaten der Puncte O_1, welche den beiderlei Figuren entsprechen, zu finden, erwäge man, dass die Gleichungen der Tangente, welche der einen und andern Figur entsprechen, in Gemässheit der Gleichungen (51.) sind:

$$x_0' = \partial\xi' x_0 \quad \text{und} \quad u_0' = \partial\eta' u_0,$$

weshalb man hat:

$$x_1' = \partial\xi' x_1 \quad \text{und} \quad u_2' = \partial\eta' u_2,$$

da die Coordinaten x_1 und x_1' dem Puncte O_1 in Fig. 2. a. die u_2 und u_2' dem Puncte O_1 in Fig. 2. b. angehören, und diese Puncte in den beiderlei Figuren doch immer in der zu O gehörigen Tangente der Curve liegen. Die letzten zwei Gleichungen nehmen mit Zuziehung derer (74. b.) die folgende Form an:

$$x_1' = \partial\xi' x_0 \quad \text{und} \quad u_2' = \partial\eta' u_0.$$

Mittelst der auf die neuen Axen O X und O X′ angewandten Gleichungen (54. a.) lassen sich nun aus den schiefen Coordinaten x_1 und x_1' des Punctes O_1, im Falle er der Fig. 2. a. angehört, dessen senkrechte u_1 und u_1' finden, und eben so aus den senkrechten Coordinaten u_2 und u_2' des Punctes O_1, im Falle er der Fig. 2. b. angehört, dessen schiefe x_2 und x_2'; die genannten Gleichungen geben nämlich:

$$u_1 = x_0(1 + \partial\xi' \cos W) \quad \text{und} \quad u_1' = x_0(\cos W + \partial\xi')$$

oder

$$x_2 \sin^2 W = u_0(1 - \partial\eta' \cos W) \quad \text{und} \quad x_2' \sin^2 W = u_0(\partial\eta' - \cos W),$$

und diese Gleichungen werden mit Zuziehung der auf den Punct O der Curve angewandten Gleichungen (54. b.):

(74. c.) $$u_1 = x_0 \delta\eta, \quad u_1' = x_0 \delta\eta' \quad \text{oder} \quad x_2 = u_0 \delta\xi, \quad x_2' = u_0 \delta\xi'.$$

Aus den so gefundenen Coordinaten des Punctes O_1 in den beiderlei Figuren und denen des Punctes O ergeben sich jetzt mittelst der im ersten Abschnitte an erster Stelle stehenden Gleichung (108. b.) die Abstände der Puncte O und O_1 von einander; es ist nämlich bei der in Fig. 2. a. versinnlichten Vorstellungsweise:

$$O\,O_1^2 = x_1 u_1 + x_1' u_1' = x_0^2(\delta\eta + \partial\xi' \delta\eta')$$

oder bei der in Fig. 2. b. versinnlichten Vorstellungsweise:

$$O\,O_1^2 = x_2 u_2 + x_2' u_2' = u_0^2(\delta\xi + \partial\eta' \delta\xi'),$$

und hieraus findet man im ersten Falle:

$$\left.\begin{array}{l} O\,O_1 = x_0\,(\delta\eta + \eth\xi'\,\delta\eta')^{\frac{1}{2}} \\ \text{und im andern Falle:} \\ O\,O_1 = u_0\,(\delta\xi + \eth\eta'\,\delta\xi')^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \quad (74.\ d.)$$

und es haben in diesen beiden Ausdrücken x_0 und u_0 vollkommen dieselbe Bedeutung wie in den Reihen (74. a.).

Lässt man jetzt in Gedanken den Punct O′ dem O stets näher rücken, bis die Entfernung beider von einander unbestimmbar klein geworden ist, so unterscheidet sich die Länge des Curvenstücks O O′, welches in den Gleichungen (74. a.) durch $\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi$ oder $\mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta$ gegeben ist, von der Länge $O\,O_1$ des Tangentenstücks, — welches durch die Gerade P′ O′ in der einen und andern Figur abgegrenzt wird, und in der ersten oder zweiten Gleichung (74. d.) enthalten ist, je nachdem O O′ durch $\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi$ oder durch $\mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta$ ausgesprochen wird, — um keine Grösse, die mit diesen Längen selbst vergleichbar wäre, wie unmittelbar aus Nr. 128. hervorgeht; daher ist dem oben (§. 12.) aufgestelltem Satze (40. a. und b.) gemäss:

$$\eth\mathfrak{L}_\xi = (\delta\eta + \eth\xi'\,\delta\eta')^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \eth\mathfrak{L}_\eta = (\delta\xi + \eth\eta'\,\delta\xi')^{\frac{1}{2}}, \qquad (75.\ a.)$$

und da in diesen Gleichungen O wie O′ jeden Punct der Curve vorstellen kann, so ist es erlaubt, in ihnen die Buchstaben x und u an die Stelle derer ξ und η zu setzen, wenn man nur unter x, x′ und u, u′ die Coordinaten eines beliebigen aber doch bestimmten Punctes der Curve versteht, so dass man in diesem Sinne auch schreiben kann:

$$\eth\mathfrak{L}_x = (\delta u + \eth x'\,\delta u')^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad \eth\mathfrak{L}_u = (\delta x + \eth u'\,\delta x')^{\frac{1}{2}}. \qquad (75.\ b.)$$

Aus den Gleichungen (75. b.), welche die Ableitung der verlangten Curvenlänge an die Hand geben, lässt sich rückwärts durch Integration diese Länge selber als Function von x oder u auffinden. Durch diese Integration werden beliebige Constanten in die Längen eingeführt, welche der angenommenen festen Grenze $\mathfrak{O}$ gemäss bestimmt werden müssen in der Weise, dass $\mathfrak{L}_x = 0$ oder $\mathfrak{L}_u = 0$ werden muss, so wie für x oder u sein der festen Grenze $\mathfrak{O}$ zukommender Werth in $\mathfrak{L}_x$ oder $\mathfrak{L}_u$ eingesetzt wird.

Sieht man nicht mehr x oder u, sondern irgend eine ausserhalb der Coordinaten liegende Grösse als unabhängig Veränderliche an, so werden in Bezug auf diese die Gleichungen (75. a.) und (75. b.) andere, die man aus diesen erhält, wenn man an die Stelle der Ableitungen δu, $\delta u'$, $\eth x'$ nach x oder an die Stelle der Ableitungen δx, $\delta x'$, $\eth u'$ nach u die durch die Gleichungen (55. a.) gegebenen Ausdrücke in Ableitungen nach der neu eingeführten Unabhängigen setzt, zugleich aber auch denselben in (§. 12. Nr. 118.) entwickelten allgemeinen Principien gemäss $\eth\mathfrak{L}_x$ durch $\frac{d\mathfrak{L}}{dx}$ und $\eth\mathfrak{L}_u$ durch $\frac{d\mathfrak{L}}{du}$ vertreten lässt, wobei es auch erlaubt ist, die Grundzeichen x und u mit ξ und η zu vertauschen. Dadurch geht jede der beiden Gleichungen (75. a.), so wie jede der beiden (75. b.) in eine einzige über, welche die nachstehende Gestalt annimmt:

$$d\mathfrak{L} = (d\xi\,d\eta + d\xi'\,d\eta')^{\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad d\mathfrak{L} = (dx\,du + dx'\,du')^{\frac{1}{2}}. \qquad (75.\ c.)$$

Man kann die Ableitung von $\mathfrak{L}$ immer auch unmittelbar durch die combinirten Gleichungen $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$ ausdrücken. Da nämlich $\delta x' = \partial x' \delta x$ und $\delta u' = \partial u' \delta u$ ist, so lassen sich die Gleichungen (75. b.) auch so schreiben:

(75. d.) $$\partial \mathfrak{L}_x = [\delta u (1 + \partial x' \partial u')]^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \partial \mathfrak{L}_u = [\delta x (1 + \partial x' \partial u')]^{\frac{1}{2}}.$$

Erwägt man nun, dass den im zwölften Paragraphen mitgetheilten Gleichungen (5. a.) zur Folge $\partial x' = -\dfrac{\overset{10}{\partial} \varphi_x}{\overset{01}{\partial} \varphi_x}$ und $\partial u' = -\dfrac{\overset{10}{\partial} \psi_u}{\overset{01}{\partial} \psi_u}$ ist, so überzeugt man sich, dass

(75. e.) $$1 + \partial x' \partial u' = 1 + \frac{\overset{10}{\partial} \varphi_x \overset{10}{\partial} \psi_u}{\overset{01}{\partial} \varphi_x \overset{01}{\partial} \psi_u}$$

gesetzt werden kann; nimmt man aber an, dass ψ_u aus φ_x dadurch hervorgegangen ist, dass man in letzterm Ausdruck für x und x′ ihre Werthe in u und u′ ausgedrückt eingesetzt hat, wo dann auch umgekehrt φ_x aus ψ_u dadurch hervorgeht, dass in letzter Function für u und u′ ihre Werthe in x und x′ ausgedrückt eingesetzt werden, in welchem Falle wir die beiden Gleichungen nächste combinirte nennen wollen, so ist:

$$\overset{01}{\partial} \varphi_x = \overset{10}{\partial} \psi_u \overset{01}{\delta} u + \overset{01}{\partial} \psi_u \overset{01}{\delta} u' \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} \psi_u = \overset{10}{\partial} \varphi_x \overset{01}{\delta} x + \overset{01}{\partial} \varphi_x \overset{01}{\delta} x'$$

oder, weil $\overset{01}{\delta} u = \cos W$, $\overset{01}{\delta} u' = 1$ und $\overset{01}{\delta} x = -\dfrac{\cos W}{\sin^2 W}$, $\overset{01}{\delta} x' = \dfrac{1}{\sin^2 W}$ ist:

$$\overset{01}{\partial} \varphi_x = \overset{10}{\partial} \psi_u \cos W + \overset{01}{\partial} \psi_u \quad \text{und} \quad \sin^2 W \overset{01}{\partial} \psi_u = -\overset{10}{\partial} \varphi_x \cos W \overset{01}{\partial} \varphi_x + \overset{01}{\partial} \varphi_x .$$

Dividirt man nun die vordere der zwei letzten Gleichungen mit $\overset{01}{\partial} \psi_u$, die hintere mit $\overset{01}{\partial} \varphi_x$, für $\dfrac{\overset{10}{\partial} \psi_u}{\overset{01}{\partial} \psi_u}$ und $\dfrac{\overset{10}{\partial} \varphi_x}{\overset{01}{\partial} \varphi_x}$ ihre vorhin angegebenen Werthe $-\partial u'$ und $-\partial x'$ setzend, so kommt:

$$\frac{\overset{01}{\partial} \varphi_x}{\overset{01}{\partial} \psi_u} = 1 - \partial u' \cos W \quad \text{und} \quad \frac{\overset{01}{\partial} \psi_u}{\overset{01}{\partial} \varphi_x} \sin^2 W = 1 + \partial x' \cos W,$$

und diese Gleichungen gehen mit Zuziehung derer (54. b.) über in:

(75. f.) $$\frac{\overset{01}{\partial} \varphi_x}{\overset{01}{\partial} \psi_u} = \delta x \sin^2 W \quad \text{und} \quad \frac{\overset{01}{\partial} \psi_u}{\overset{01}{\partial} \varphi_x} \sin^2 W = \delta u .$$

Setzt man nun für $1 + \partial x' \partial u'$, δu und δx ihre Werthe aus den Gleichungen (75. e. und f.) in die (75. d.) ein, so erhält man nach einer ganz leichten Umformung:

(75. g.) $$\left\{ \begin{aligned} &\partial \mathfrak{L}_x = \frac{\sin W}{\overset{01}{\partial} \varphi_x} (\overset{10}{\partial} \varphi_x \overset{10}{\partial} \psi_u + \overset{01}{\partial} \varphi_x \overset{01}{\partial} \psi_u)^{\frac{1}{2}} \\ &\text{und} \\ &\partial \mathfrak{L}_u = \frac{1}{\sin W \overset{01}{\partial} \psi_u} (\overset{10}{\partial} \varphi_x \overset{10}{\partial} \psi_u + \overset{01}{\partial} \varphi_x \overset{01}{\partial} \psi_u)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right.$$

und da dem vorhin Gesagten zur Folge $d\mathfrak{L} = \partial \mathfrak{L}_x dx = \partial \mathfrak{L}_u du$ ist, so hat man noch:

$$d\mathfrak{L} = \frac{\sin W}{\overset{01}{\partial}\varphi_x}\left(\overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial}\psi_u + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial}\psi_u\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sin W \overset{01}{\partial}\psi_u}\left(\overset{10}{\partial}\varphi_x \overset{10}{\partial}\psi_x + \overset{01}{\partial}\varphi_x \overset{01}{\partial}\psi_u\right)^{\frac{1}{2}} du. \qquad (75.\ h.)$$

Die doppelte Gleichung (75. h.) giebt an die Hand, dass

$$\frac{\sin^2 W\, dx\, \overset{01}{\partial}\psi_u}{du\, \overset{01}{\partial}\varphi_x} = 1$$

sei, wovon man sich auch directe Ueberzeugung verschaffen kann, wenn man mittelst der ersten der Gleichungen (55. a.) eine der Ableitungen dx und du durch die andere ausdrückt, und zugleich die Abhängigkeit beachtet, welche zwischen den Functionen φ_x und ψ_u unter der Voraussetzung stattfindet, dass die Gleichungen $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$ nächste combinirte sind, welche Abhängigkeit durch die Gleichungen (75. f.) oder die diesen nächst voranstehenden ausgesprochen wird.

133) Um den Flächeninhalt von einem Stücke der Coordinatenebene, worin die ebene Curve liegt, zu finden unter der Voraussetzung, dass jenes Stück ringsum begrenzt ist und diese Curve entweder die ganze oder doch einen Theil der Begrenzung ausmacht, hat man ein Verfahren einzuhalten, das sich an mehrern Stellen von dem in der vorigen Nummer zur Längenbestimmung gegebenen unterscheidet und in Folgendem besteht. Denken wir uns zuvörderst ein Stück der Coordinatenebene $O'\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'_0 O'$ (Fig. 3. a.), welches einerseits durch die mit den Axen AX und AX' parallelen Geraden $O'\mathfrak{D}'_0$ und $O'\mathfrak{D}'$ und andererseits durch das zwischen $\mathfrak{D}'_0$ und $\mathfrak{D}'$ liegende Curvenstück begrenzt ist, und wobei O' irgend einen, völlig willkührlichen Punct der Coordinatenebene vorstellt, so ändert sich die Grösse des so begrenzten Flächenraums offenbar nur mit der Lage des Punctes O' ab, ist also eine Function von dieser Lage oder von den sie bestimmenden Coordinaten des Punctes O', als welche man sowohl dessen schiefe, die wir durch x und x' vorstellen wollen, wie auch dessen senkrechte, die durch u und u' bezeichnet werden sollen, ins Auge fassen kann. Weil aber der Punct O' im Allgemeinen nicht in der Curve liegt und daher zwischen seinen Coordinaten in der Regel keine der Gleichungen (48.), wodurch die Puncte der Curve dargestellt werden, stattfindet, vielmehr jede von ihnen ganz nach Belieben genommen werden kann, und eben deshalb jede als gänzlich unabhängig von der andern angesehen werden muss, so hat man sich die Grösse des zu suchenden Flächeninhalts als Function der beiden Unabhängigen x und x' oder der beiden u und u' vorzustellen. Diese noch unbekannte Function von zwei Veränderlichen werden wir, der in §. 12. getroffenen Uebereinkunft gemäss, durch $\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_u$ bezeichnen, je nachdem x und x' oder u und u' die in ihr auftretenden unabhängig Veränderlichen sind.

Nehmen wir im Innern des zu bestimmenden Flächenraums, dessen Grösse durch $\mathfrak{F}_x$ vorgestellt wird, irgendwo noch einen zweiten Punct O an, dessen schiefe Coordinaten wir durch ξ und ξ' anzeigen werden; legen wir zudem durch den Punct O zwei neue Axen OX und OX', welche den ursprünglichen AX und AX' parallel und gleichläufig sind, und bezeichnen wir die schiefen Coordinaten, welche der erste Punct O' an diesen neuen Axen liefert, durch x_0 und x'_0, so ist in Gemässheit der Betrachtungen, welche im ersten Abschnitte zu den Gleichungen (7.) geführt haben:

$$x = \xi + x_0 \quad \text{und} \quad x' = \xi' + x'_0. \qquad (76.\ a.)$$

Diese neuen Axen OX und OX' werden nöthigenfalls verlängert, die Curve in zwei Puncten $\mathfrak{D}_0$ und $\mathfrak{D}$, so wie die Geraden $O'\mathfrak{D}'_0$ und $O'\mathfrak{D}'$ in zwei andern S und S' schneiden, und es

stellen dann die Räume $O\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}O$, $S\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}S$, $S'\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}'S'$ dem $O'\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}'O'$ ähnliche Flächeninhalte vor mit dem Unterschiede, dass dem Puncte O' in jedem eine andere Stelle angewiesen worden ist. Während die Coordinaten des Punctes O' durch x und x' dargestellt werden, werden die des Punctes O durch ξ und ξ', die des Punctes S durch ξ und x', die des Punctes S' durch x und ξ' vorgestellt, und so wie der Flächenraum $O'\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}'O'$ allgemein durch $\mathfrak{F}_x$ oder, weil es hier gut ist, die beiden Unabhängigen einzeln hervortreten zu lassen, durch $\mathfrak{F}_{x,x'}$ vorgestellt wird, welche Werthe man auch übrigens den Grössen x und x' beilegen mag, muss der $O\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}O$ durch $\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$, der $S\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}S$ durch $\mathfrak{F}_{\xi,x'}$, der $S'\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}'S'$ durch $\mathfrak{F}_{x,\xi'}$ vorgestellt werden. Fasst man daher den Punct O wie einen bestimmten, während der ganzen Untersuchung sich gleich bleibenden auf, so dass ξ und ξ' von vorn herein zwar beliebige Werthe erhalten können, aber während der ganzen fernern Untersuchung wie constante Grössen betrachtet werden müssen, so wird dadurch $\mathfrak{F}_{\xi,x'}$ zu einer Function der einen Veränderlichen x' und $\mathfrak{F}_{x,\xi'}$ zu einer Function der einen Veränderlichen x, weswegen man der in §. 12. mitgetheilten Gleichung (3. a.) gemäss unter Berücksichtigung je einer der Gleichungen (76. a.) hat:

(76. b.) $$\mathfrak{F}_{\xi,x'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x'_0 + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x'^2_0}{1.2} + \overset{03}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x'^3_0}{1.2.3} + \dots.$$

und

(76. c.) $$\mathfrak{F}_{x,\xi'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = \overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 + \overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^2_0}{1.2} + \overset{30}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^3_0}{1.2.3} + \dots,$$

während man in Gemässheit der daselbst für Functionen zweier Veränderlichen mitgetheilten Gleichung (3. b.) unter Berücksichtigung der beiden Gleichungen (76. a.) hat:

(76. d.) $$\begin{cases} \mathfrak{F}_{x,x'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = [\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 + \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x'_0] + \left[\overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^2_0}{1.2} + \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 x'_0 + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x'^2_0}{1.2}\right] \\ \qquad + \left[\overset{30}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^3_0}{1.2.3} + \overset{21}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^2_0}{1.2} x'_0 + \overset{12}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 \frac{x'^2_0}{1.2} + \overset{03}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x'^3_0}{1.2.3}\right] + \dots; \end{cases}$$

zieht man aber von der Gleichung (76. d.) die beiden (76. b.) und (76. c.) ab, so erhält man:

(76. e.) $$\mathfrak{F}_{x,x'} - \mathfrak{F}_{x,\xi'} - \mathfrak{F}_{\xi,x'} + \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 x'_0 + \left[\overset{21}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^2_0}{1.2} x'_0 + \overset{12}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 \frac{x'^2_0}{1.2}\right] + \dots.$$

Nun ist aber, wie die blose Beschauung der Fig. 3. zeigt:

$$\mathfrak{F}_{x,x'} - \mathfrak{F}_{x,\xi'} - \mathfrak{F}_{\xi,x'} + \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = O'\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}'O' - S'\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}'S' - S\mathfrak{D}'_0\mathfrak{D}S + O\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}O = O'SOS'O',$$

und da $O'SOS'O'$ ein Parallelogramm bildet, in welchem die beiden Seiten $O'S$ und SO die Werthe $x-\xi$ und $x'-\xi'$ oder x_0 und x'_0 haben und den Axenwinkel W einschliessen, dessen Inhalt sonach $x_0 x'_0 \sin W$ ist, so verwandelt sich die letzte Gleichung in:

(77. a.) $$x_0 x'_0 \sin W = \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 x'_0 + \left[\overset{21}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x^2_0}{1.2} x'_0 + \overset{12}{\partial}\mathfrak{F}_\xi x_0 \frac{x'^2_0}{1.2}\right] \dots,$$

welche Gültigkeit behält, wo auch der Punct O' liegen mag, d. h. welche Werthe man auch den Grössen x_0 und x'_0 beilegen mag, unter der Bedingung jedoch, dass die durch ihn gelegten, mit den Axen AX und AX' parallelen Geraden $O'\mathfrak{D}'_0$ und $O'\mathfrak{D}'$ die Curve in zwei Puncten $\mathfrak{D}'_0$ und $\mathfrak{D}'$ treffen; daher zerfällt die eine Gleichung (77. a.) in nachstehende viele:

(77. b.) $$\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\xi = \sin W, \quad \overset{21}{\partial}\mathfrak{F}_\xi = 0, \quad \overset{12}{\partial}\mathfrak{F}_\xi = 0, \quad \text{u. s. f.}$$

und da die nach der ersten folgenden Gleichungen (77. b.) schon in dieser enthalten sind, so ziehen sie sich sämmtlich auf die erste zusammen, nämlich:

$$\overset{\prime\prime}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_{\xi} = \sin W, \tag{78. a.}$$

und diese Gleichung allein, welche man auch mittelst des in §. 12. mitgetheilten Satzes auf eine ähnliche Weise, wie die (75. a.) gefunden worden sind, erhalten kann, ist zur Auffindung des gesuchten Flächeninhalts hinreichend, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht. Da nämlich $\overset{\prime\prime}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_{\xi}$ das bedeutet, was aus $\overset{\prime\prime}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_{x}$ wird, wenn man ξ und ξ' an die Stelle von x und x′ setzt, und $\overset{\prime\prime}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_{x}$ aus $\mathfrak{F}_{x}$ durch ein doppeltes Ableiten nach x und x′ erhalten wird, so sieht man ein, dass man $\mathfrak{F}_{x}$ unter der Voraussetzung eines stets beweglichen Punctes O′, d. h. unter der Annahme stets sich ändernder Werthe von x und x′ zu finden hat. Aber selbst unter dieser Voraussetzung ist noch in Bezug auf diesen beweglich gedachten Punct O′, wie die Gleichung (78. a.) in Bezug auf den unbeweglich gedachten Punct O aussagt:

$$\overset{\prime\prime}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_{x} = \sin W; \tag{78. b.}$$

denn obgleich diese Eigenschaft durch die Gleichung (78. a.) blos für den während der Untersuchung unveränderlich gedachten Punct O erwiesen worden ist, der Punct O aber jeder innerhalb des Raumes $O'\mathfrak{O}'_0\mathfrak{O}'O'$ liegende sein kann und dieser Raum durch nichts bedingt wird, als dass die Curve von der mit den Axen AX und AX′ parallelen Geraden $O'\mathfrak{O}'_0$ und $O'\mathfrak{O}'$ in zwei Puncten $\mathfrak{O}'_0$ und $\mathfrak{O}'$ geschnitten wird, so gilt die in (78. a.) ausgesprochene Eigenschaft für alle Puncte im Innern eines so begrenzten Raumes und hört nur dann auf wahr zu sein, wenn der Punct O ein solcher ist, der die so eben angezeigte Begrenzung nicht mehr zulässt. Es ist demnach die in (78. b.) aufgestellte Gleichung für alle Puncte gültig, die möglicherweise in einem Raume liegen können, der durch die Curve und zwei mit den Axen AX und AX′ parallele Gerade völlig begrenzt ist, und umgekehrt hat man von dem Vorhandensein dieser Bedingung die Zulässigkeit der Gleichung (78. b.) abhängig zu machen.

Aus der Gleichung (78. b.) nun lässt sich $\mathfrak{F}_{x}$ mittelst einer doppelten Integration, das eine Mal nach x′ und das andere Mal nach x, finden.

Die vorstehenden Betrachtungen ändern sich nicht, und man wird durch sie immer wieder zu den gleichen, in (78. a.) und (78. b.) ausgesprochenen Resultaten hingeführt, wenn die durch den Punct O′ gehenden, den zu suchenden Flächeninhalt begrenzenden Geraden neuen, jedoch unveränderlich begrenzenden Geraden wie OS und O′S′ (Fig. 3. a.) begegnen, die mit einer der Coordinatenaxen parallel laufen, oder sonst irgend welche, in derselben Ebene liegende feste Grenzen bilden, die in Verbindung mit der einen, bisher vor Augen gehabten ebenen Curve den verlangten Flächeninhalt einschliessen. Solche Abänderungen üben auf die Gleichungen (78. a. und b.) keinerlei Einfluss aus, so lange der Punct O innerhalb des von dem Puncte O′ abhängig gemachten Flächenraums liegen bleibt und zu dem Parallelogramm OS′O′S Anlass giebt, welches letztere stets geschehen wird, wenn man sich ihn möglichst nahe bei dem O′ liegend denkt; sie machen blos, dass die während des Integrirens eintretenden Grenzbestimmungen in anderer Weise geschehen müssen.

134) Wir haben in der vorigen Nummer den Flächeninhalt eines durch Curven und durch Gerade, die mit den Grundaxen parallel laufen, begrenzten Stücks der Coordinatenebene als eine Function der schiefen Coordinaten x und x′ von dem Puncte, von welchem die mit den Axen parallelen Begrenzungen auslaufen, zu finden gelehrt; werden aber die von dem beweglichen Puncte auslaufenden Begrenzungen nicht mehr den Grundaxen parallel, sondern senkrecht gegen diese gestellt gedacht, so lassen sich diese abgeänderten Grenzbestimmungen nur mittelst der senkrechten Coordinaten u und u′ des beweglichen Punctes einfach ausdrücken. In einem solchen Falle ist es daher vortheilhafter, den verlangten Flächenraum als eine Function von u und u′ aufzusuchen, welche Function wir durch $\mathfrak{F}_u$ bezeichnen werden, und um diese zu erhalten, denken wir uns, wie in Fig. 3. b. versinnlicht worden ist, durch den beweglichen Punct O′ die geradlinigen Grenzen $O'\mathfrak{D}'_0$ und $O'\mathfrak{D}'$ senkrecht gegen die Axen A X und A X′ gerichtet, und innerhalb des zu bestimmenden Flächeninhalts $O'\mathfrak{D}'\mathfrak{D}'_0 O'$ oder $\mathfrak{F}_u$ noch einen zweiten Punct O angenommen, dessen senkrechte Coordinaten η und η' sein mögen, und von welchem die ebenfalbs auf den Axen A X und A X′ senkrecht stehenden Begrenzungen $O\mathfrak{D}_0$ und $O\mathfrak{D}$ auslaufen. Es ist nun zuvörderst $\mathfrak{F}_\eta$ die Grösse des Flächeninhalts $O\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}O$, wenn $\mathfrak{F}_\eta$ das bedeutet, was aus $\mathfrak{F}_u$ dadurch hervorgeht, dass man η und η' an die Stelle von u und u′ setzt, denn O ist offenbar eine von den Lagen, die der bewegliche Punct O′ einnehmen darf; denkt man sich daher durch den Punct O zwei neue, den vorigen parallele und gleichläufige Axen O X und O X′ gelegt, so lassen sich an der Fig. 3. b. in Bezug auf die Functionen $\mathfrak{F}_u$ und $\mathfrak{F}_\eta$ alle die Betrachtungen ganz eben so wiederholen, welche in der vorigen Nummer mit den Functionen $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{F}_\xi$ vorgenommen worden sind. Weil nämlich unter solchen Umständen

$$u = \eta + u_0 \quad \text{und} \quad u' = \eta' + u'_0$$

ist, wenn u_0 und u'_0 die senkrechten Coordinaten an den neuen Axen O X, O X′ von dem Puncte vorstellen, der an den ursprünglichen Axen die u und u′ hat, so folgt nach Aussage der im zwölften Paragraphen mitgetheilten Gleichungen (3. a.):

$$\mathfrak{F}_{u,\eta'} - \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = \overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u_0 + \overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} + \ldots.$$

und

$$\mathfrak{F}_{\eta,u'} - \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u'_0 + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0'^2}{1.2} + \ldots,$$

so wie

$$\mathfrak{F}_{u,u'} - \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = \overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u_0 + \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u'_0 + \overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u_0 u'_0 + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0'^2}{1.2} + \ldots,$$

welche Gleichungen sich von denen (76. b. bis d.) in nichts unterscheiden, als dass die Grundzeichen η und u an die Stelle derer ξ und x getreten sind. Aus diesen Gleichungen findet man nun hier wieder ganz wie dort:

$$\mathfrak{F}_{u,u'} - \mathfrak{F}_{u,\eta'} - \mathfrak{F}_{\eta,u'} + \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u_0 u'_0 + \overset{21}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} u'_0 + \overset{12}{\partial}\mathfrak{F}_\eta u_0 \frac{u_0'^2}{1.2} + \ldots,$$

und die an der Fig. 3. b. aufgeführte Bedeutung der Ausdrücke $\mathfrak{F}_{u,u'}$, $\mathfrak{F}_{u,\eta'}$, $\mathfrak{F}_{\eta,u'}$, $\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}$ giebt auch hier wieder zu verstehen, dass

$$\mathfrak{F}_{u,u'} - \mathfrak{F}_{u,\eta'} - \mathfrak{F}_{\eta,u'} + \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = O'SOS'O'$$

ist, wo O′SOS′O′ das in der Fig. 3. b. angezeigte Parallelogramm vorzustellen hat, dessen

Seiten O S und O S′ durch die Grössen $\frac{u'_0}{\sin W}$ und $\frac{u_0}{\sin W}$ gegeben werden, wie man sogleich einsieht, wenn man beachtet, dass die Begrenzungslinien $O'\mathfrak{D}'_0$ und $O'\mathfrak{D}'$ von den neuen Axen O X und O X′ in zwei Puncten t und t′ geschnitten werden, und dass die Dreiecke O t S′ und O t′ S bei t und t′ rechtwinklig sind, während ihre Seiten O t und O t′ die Grössen u_0 und u'_0 sind, ihre Winkel O S′ t und O S t′ aber entweder durch W oder durch $180^0 - W$ dargestellt werden, weil beide entweder dem X O X′ gleich sind oder ihn zu zwei Rechten ergänzen; hieraus folgt aber, dass der Inhalt des fraglichen Parallelogramms $\frac{u_0}{\sin W}\frac{u'_0}{\sin W}\sin W$ oder $\frac{u_0\, u'_0}{\sin W}$ ist, und deswegen liefern die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{u_0\, u'_0}{\sin W} = \overset{1\,1}{\partial}\mathfrak{F}_\eta\, u_0\, u'_0 + \overset{2\,1}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} u'_0 + \overset{1\,2}{\partial}\mathfrak{F}_\eta\, u_0 \frac{u_0'^2}{1.2} + \ldots,$$

welche Gleichung, weil sie für jeden beliebigen Punct O′ besteht, d. h. für jegliche Werthe u_0 und u'_0 wahr bleiben muss, der folgenden einen gleich zu achten ist:

$$\overset{1\,1}{\partial}\mathfrak{F}_\eta = \frac{1}{\sin W}, \tag{79. a.}$$

wofür man eben so gut auch die

$$\overset{1\,1}{\partial}\mathfrak{F}_u = \frac{1}{\sin W} \tag{79. b.}$$

setzen kann, weil die (79. a.) für jeden Punct O, der eine vollständige Begrenzung herbeiführt, Gültigkeit behält, und man sich darum in ihr diesen Punct wieder als beweglich denken darf, wiewohl unter dem in der vorigen Nummer gemachten Vorbehalt.

Auch hier ändern sich die sämmtlichen Betrachtungen nicht und führen immer wieder zu denselben Resultaten, wenn gleich die von dem Puncte O′ auslaufenden geraden Grenzen nicht bis zu der ins Auge gefassten Curve hinreichen, sondern unterwegs auf andere feste gerade oder krumme Begrenzungslinien stossen, die in Verbindung mit jener Curve den zu bestimmenden Flächeninhalt ringsum einschliessen.

135) Um die Besonderheiten, welche während des Integrirens aus jener Verschiedenheit des festen Theils der Begrenzung entspringen, von der zu Ende der beiden vorigen Nummern die Rede war, klar vor Augen legen zu können, müssen wir einige Begriffe der Integralrechnung zur Hilfe nehmen. Ist nämlich

$$\partial\mathfrak{F}_x = f_x \tag{80. a.}$$

gegeben, wo $\mathfrak{F}_x$ die zu suchende und f_x die bekannte Function der einen Veränderlichen x vorstellt, und kennt man irgend eine Function F_x von x, welche die Eigenschaft besitzt, dass

$$\partial F_x = f_x$$

ist, so lehrt die Integralrechnung, dass $\mathfrak{F}_x$ jede durch die Gleichung

$$\mathfrak{F}_x = F_x + \mathfrak{K} \tag{80. b.}$$

vorgestellte Function, und ausser diesen keine, sein kann, wenn $\mathfrak{K}$ eine völlig willkührliche Zusammensetzung von einer oder mehrern Grössen ist, falls nur keine von diesen Grössen x selber ist, oder irgendwie durch den jedesmaligen Werth von x influenzirt wird. Auf der andern Seite hat man, wenn man sich x aus den beiden Theilen x_0 und y zusammengesetzt denkt,

so dass $x = x_0 + y$ ist, (wornach also x_0 hier eine ganz andere Bedeutung hat, als die war, welche wir diesem Zeichen in den vorangegangenen Betrachtungen beigelegt haben; es stellt nämlich x_0 hier vor, was dort ξ, und y, was dort x_0):

$$\mathfrak{F}_{x_0+y} = \mathfrak{F}_{x_0} + \mathfrak{d}\,\mathfrak{F}_{x_0}\, y + \mathfrak{d}^2\,\mathfrak{F}_{x_0}\frac{y^2}{1.2} + \ldots,$$

worin y jeden Werth annehmen kann. Denkt man sich nun y so klein, dass es sich durch kein endliches Maas mehr darstellen lässt, und dem zur Folge, vorausgesetzt, dass alle Coefficienten dieser Reihe endlich darstellbar sind, jedes später kommende Glied in der vorstehenden Reihe neben den ihm vorangehenden, wenn diese nicht wahrhaft null sind, völlig verschwindet, so verwandelt sich die letzte Gleichung in:

$$\mathfrak{F}_{x_0+y} = \mathfrak{F}_{x_0} + \mathfrak{d}\,\mathfrak{F}_{x_0}\, y \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F}_{x_0+y} = \mathfrak{F}_{x_0} + f_{x_0}\, y.$$

Während in der vorigen Gleichung y noch jeden Werth haben konnte, muss es in dieser einen unendlich kleinen haben, den wir uns als aliquoten Theil von jenem denken und mit $\mathfrak{h}$ bezeichnen wollen, wornach also $y = n\mathfrak{h}$ ist, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, die jede Grösse überschreitet. Schreiben wir nun dieser neuen Bezeichnung gemäss die zuletzt erhaltene Gleichung, und setzen wir in dieser successive $x_0 + \mathfrak{h}$, $x_0 + 2\mathfrak{h} \ldots x_0 + (n-1)\mathfrak{h}$ an die Stelle von x_0, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_{x_0+\mathfrak{h}} &= \mathfrak{F}_{x_0} + f_{x_0}\,\mathfrak{h} \\
\mathfrak{F}_{x_0+2\mathfrak{h}} &= \mathfrak{F}_{x_0+\mathfrak{h}} + f_{x_0+\mathfrak{h}}\,\mathfrak{h} \\
\mathfrak{F}_{x_0+3\mathfrak{h}} &= \mathfrak{F}_{x_0+2\mathfrak{h}} + f_{x_0+2\mathfrak{h}}\,\mathfrak{h} \\
&\vdots \\
\mathfrak{F}_{x_0+n\mathfrak{h}} &= \mathfrak{F}_{x_0+(n-1)\mathfrak{h}} + f_{x_0+(n-1)\mathfrak{h}}\,\mathfrak{h},
\end{aligned}$$

und die Summe aller dieser Gleichungen liefert:

$$\mathfrak{F}_{x_0+n\mathfrak{h}} = \mathfrak{F}_{x_0} + \mathfrak{h}\,(f_{x_0} + f_{x_0+\mathfrak{h}} + f_{x_0+2\mathfrak{h}} \cdots + f_{x_0+(n-1)\mathfrak{h}})$$

oder, wenn man für $x_0 + n\mathfrak{h}$ wieder $x_0 + y$ oder x setzt:

(80. c.) $$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_{x_0} + \mathfrak{h}\,(f_{x_0} + f_{x_0+\mathfrak{h}} + f_{x_0+2\mathfrak{h}} \cdots + f_{x_0+(n-1)\mathfrak{h}}).$$

Sieht man f_x als ein dem Werthe x beigelegtes Prädicament, als eine ihm zugeschriebene Eigenschaft an, so lässt sich die vorstehende Gleichung unter der Voraussetzung, dass f_x von x_0 bis x seinen Werth nur stetig ändert, so aussprechen: $\mathfrak{F}_x$ ist zusammengesetzt aus $\mathfrak{F}_{x_0}$ und allen möglichen Prädicamenten, die f_x hergiebt, während x stetig alle Werthe von einem bestimmten x_0 an bis zu einem beliebigen andern x hindurchläuft. Hierbei ist $\mathfrak{h}$ mit y oder $x - x_0$ zugleich positiv oder negativ; man hat daher die Folge der Eigenschaften mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ in obiger Gleichung versehen sich zu denken, je nachdem x grösser oder kleiner als x_0 genommen wird. Was hier von $\mathfrak{F}_x$ für jeden beliebigen Werth x dargethan worden ist, gilt natürlich auch von $\mathfrak{F}_{x_0}$ in Bezug auf den bestimmten Werth x_0; man kann sich $\mathfrak{F}_{x_0}$ zu-

sammengesetzt vorstellen aus $\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}$ und allen den Eigenschaften, die f_x hergiebt, während x alle möglichen Werthe von $\mathfrak{x}$ an bis zu x_0 hindurchläuft. Hieraus folgt aber, dass, wenn bei einer Untersuchung, die sich über alle Eigenschaften f_x von x_0 an bis zu x hin verbreitet, der Fall vorkommt, dass man die Eigenschaften f_x für alle möglichen Werthe von x, auf die man stösst, wenn man, von x nach x_0 schreitend, über x_0 hinausgekommen ist, als nicht vorhanden annehmen muss oder annehmen will, man diesem zur Folge nothwendiger Weise auch $\mathfrak{F}_{x_0} = 0$ in der Gleichung (80. c.) zu setzen habe, indem auf der Seite, auf welcher sich diese Grösse in jener Gleichung zu bilden hätte, gar keine Eigenschaft vorhanden ist, die sie in sich aufnehmen könnte.

In einem solchen Falle nun, wo man $\mathfrak{F}_{x_0} = 0$ zu nehmen hat, giebt die Gleichung (80. b.) an die Hand, dass

$$0 = F_{x_0} + \mathfrak{K} \tag{80. d.}$$

sei, und zieht man diese Gleichung von der (80. b.) ab, so findet man:

$$\mathfrak{F}_x = F_x - F_{x_0}. \tag{80. e.}$$

Diese Gleichung liefert also für $\mathfrak{F}_x$, wie ihre Vergleichung mit der (80. c.) sogleich zu erkennen giebt, die stetige Aufeinanderfolge aller Eigenschaften f_x von x_0 an bis zu x hin und zwar mit dem Vorzeichen + oder — genommen, je nachdem x grösser oder kleiner als x_0 ist, wie aus den dortigen Betrachtungen hervorgegangen ist. Wir nennen diesem gemäss den Ausdruck $F_x - F_{x_0}$ das von x_0 ausgehende und bis zu x fortlaufende Integral der Function f_x und bezeichnen es durch $\int_{x_0}^{x} f_x$, so dass wir die vorige Gleichung auch so schreiben können:

$$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0}^{x} f_x. \tag{80. f.}$$

Diese Gleichung liefert den Werth $\mathfrak{F}_x$ nicht nur, wenn die Function f_x von solcher Art ist, dass sie für jeden unterhalb x_0 liegenden Werth von x von selber null wird, sondern selbst dann noch, wenn f_x zwar für solche Werthe von x nicht null wird, vielmehr positive oder negative wirkliche Grössen liefert, die aber gegenwärtig von dem Ausdrucke $\mathfrak{F}_x$ ausgeschlossen bleiben sollen; denn es war den Betrachtungen, welche mittelst der Gleichung (80. d.) zu der (80. e.) führten, ganz gleichgültig, ob man die unterhalb x_0 liegenden Werthe von f_x als nicht vorhanden annehmen musste oder auch nur wollte. Indessen theilt doch dieser Unterschied der Gleichung (80. f.) oder (80. e.) in den beiden Fällen eine andere Beschaffenheit mit. Wird nämlich die Function f_x ihrer Natur nach für jeden unterhalb x_0 liegenden Werth von x bis zu einer beliebigen Grenze $\mathfrak{x}$ hin, schon von selber null, so kann man in jenen Gleichungen für x_0 jeden dieser Werthe schreiben, ohne ihren Inhalt im Geringsten zu verändern, während ihr Inhalt in jedem solchen Falle ein anderer würde, wenn die für x_0 gesetzten Werthe die Function f_x nicht schon von selber zu Null machten.

Wiewohl nun aber im Allgemeinen $\mathfrak{F}_x$ für jeden andern Werth von x_0 eine abgeänderte Bedeutung annimmt, so ist es doch erlaubt, unter x_0 sich jeden mit dem behandelten Gegen-

stande verträglichen Werth von x vorzustellen, wenn man nur auch der Function $\mathfrak{F}_x$ die diesem Werthe angemessene Bedeutung zuerkennt; man kann sich daher x_0 eben so beliebig wie x selber denken und dessen nähere Bestimmung in eine spätere Zeit verlegen, so lange man nicht gebieterisch dazu aufgefordert wird. In diesem Falle kommen in dem Ausdrucke $\mathfrak{F}_x$ oder $F_x - F_{x_0}$ zwei Grössen x und x_0 vor, die man sich beide als Veränderliche vorzustellen hat, und eben deswegen hat man $\mathfrak{F}_x$ als eine Function dieser zwei Veränderlichen anzusehen. Wir drücken diesen Umstand da, wo wir ihn fest im Auge behalten wissen wollen, dadurch aus, dass wir die Gleichung (80. f.) so schreiben:

$$\mathfrak{F}_{x,x_0} = \int_{x_0}^{x} f_x \,.$$

Liegt es aber in der Natur einer besondern Untersuchung, dass man sich unter x_0 oder x einen völlig bestimmten Werth zu denken habe, den wir durch a oder b bezeichnen wollen, so drücken wir diess äusserlich schon dadurch aus, dass wir jene Gleichung so schreiben:

$$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0 = a}^{x} f_x \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F}_{x_0} = \int_{x_0}^{x = b} f_x$$

und wir setzen:

$$\mathfrak{F} = \int_{x_0 = a}^{x = b} f_x \,,$$

wenn wir andeuten wollen, dass der einen Grösse x_0 der völlig bestimmte Werth a, so wie der andern Grösse x der völlig bestimmte Werth b beigelegt wird. In diesem letzten Falle enthält der Ausdruck $\mathfrak{F}$ gar keine Veränderliche mehr, während in den zwei vorangegangenen Fällen $\mathfrak{F}_x$ eine Function der einen Veränderlichen x, $\mathfrak{F}_{x_0}$ eine Function der einen Veränderlichen x_0 zu bedeuten hat, wie schon von sich selber verständlich ist.

Manchmal geschieht es, dass man unter dem einen oder andern von den völlig bestimmten Werthen a oder b, wohl auch unter beiden, diejenige positive oder negative Zahl gedacht wissen will, deren Grösse alles Maas überschreitet; dann werden wir diess dadurch andeuten, dass wir an die Stelle von a und b die für solche Fälle eingeführten Zeichen $+\infty$ oder $-\infty$ setzen. Eben so schreiben wir, wo x_0 oder x zwar nicht bestimmte Grössen a oder b, aber bestimmte Zusammensetzungen von andern Veränderlichen anzeigen sollen, diese bestimmten Zusammensetzungen an die Stelle von a oder b.

136) Um nun den grossen Wechsel der Grenzbestimmungen, welche während des Integrirens solcher Ausdrücke, wie die (78. b.) oder (79. b.) sind, vorkommen, vor Augen legen zu können, wollen wir in allgemeinerer Weise voraussetzen, dass man

(81. a.) $$\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x = f_x$$

habe, wo $\mathfrak{F}_x$ sowohl als f_x Functionen der beiden Coordinaten x und x′ vorstellen, und dass der Raum, innerhalb welchem man Werthe der Function f_x ins Auge zu fassen habe, einerseits durch eine ebene Curve, deren Gleichung in aufgelöster Gestalt

(81. b.) $$x' = \varphi_x$$

ist, wobei $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ die Coordinaten der Puncte dieser Curve von der gleichen Art, wie die x und x′ sind, vorstellen, und andererseits durch Gerade begrenzt werde, welche von dem Puncte, dessen Coordinaten x und x′ sind, aus mit den Coordinatenaxen parallel laufen. Hierbei kann entweder die Gleichung der Curve für jeden Werth von $\mathfrak{r}$ nur ein einziges Ergebniss für $\mathfrak{r}'$ liefern, welches geschieht, wenn $\varphi_{\mathfrak{r}}$ nur eine einzige Form enthält, oder sie kann für jeden Werth von $\mathfrak{r}$ für $\mathfrak{r}'$ mehrere Resultate liefern, welches geschieht, wenn in $\varphi_{\mathfrak{r}}$ mehrere Formen enthalten sind; im erstern Falle dehnt sich die Curve in der Richtung der Axe AX nur als ein einziger Zweig aus, im andern Falle hingegen bildet die Curve, in dieser Richtung aufgefasst, mehrere Zweige, deren Anzahl von der Zahl der in $\varphi_{\mathfrak{r}}$ enthaltenen Formen abhängt. Wir werden nun zuvörderst blos den Fall ins Auge fassen, wo sich $\mathfrak{r}'$ für jeden Werth von $\mathfrak{r}$ nur in einer einzigen Gestalt hergiebt, und erst später den Fall betrachten, wo $\mathfrak{r}'$ in mehreren Gestalten auftritt.

Da $\overset{11}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ die Ableitung von $\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ nach x′ ist für jeden beliebigen, aber während des Ableitens constant gedachten Werth von x, so erhält man umgekehrt aus der Gleichung (81. a.) durch Integralrechnung:

$$\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x = \int_{x'_0}^{x'} f_x,$$

wenn x'_0 den Werth von x′ vorstellt, unterhalb welchem man sich die Eigenschaft f_x als nicht vorhanden bei dem jedesmaligen Werthe von x, den man eben im Auge hat, zu denken hat. Erwägt man nun, dass man bei der gegenwärtigen Aufgabe in Folge der vorgeschriebenen Begrenzung für jeden Werth von x nur solche Werthe von x′ als mit der Eigenschaft f_x begabt annehmen dürfe, welche zwischen der begrenzenden ebenen Curve und der durch den Punct O′ parallel mit der Axe AX gezogenen Geraden liegen, deren Puncte alle zu ihrer mit der Axe AX′ parallelen Coordinate die Veränderliche x′ haben, so sieht man sogleich ein, dass der Punct der ebenen Curve, welchem x als schiefe Coordinate an der Axe AX zukommt, den Werth x'_0 als seine Coordinate an der Axe AX′ liefere; es ist nämlich x'_0 das $\mathfrak{r}'$ der Curve, welches man aus der Gleichung (81. b.) erhält, wenn man in ihr x an die Stelle von $\mathfrak{r}$ setzt. Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in:

$$\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x = \int_{x'_0=\varphi_x}^{x'} f_x, \qquad \text{(81. c.)}$$

und es nimmt $\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ die von x'_0 bis x′ sich hinziehende Eigenschaft f_x mit dem Vorzeichen + oder — in sich auf, je nachdem x grösser oder kleiner als x'_0 ist. Ist so die Function von x und x′ gefunden, welche durch $\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ bezeichnet wird, so findet man $\overset{00}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_x$, indem man diese Function nach x integrirt, während man x′ als unveränderlich ansieht, oder es ist

$$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0}^{x}\int_{x'_0=\varphi_x}^{x'} f_x,$$

und es nimmt $\mathfrak{F}_x$ die von x_0 bis x sich hinziehende Eigenschaft $\overset{10}{\mathfrak{d}}\mathfrak{F}_x$ mit dem Vorzeichen + oder — in sich auf, je nachdem x grösser oder kleiner als x_0 ist; d. h. die in den vorge-

schriebenen Grenzen ausgebreitete Eigenschaft f_x mit dem Vorzeichen + oder —, je nachdem die obern Grenzen hinsichtlich ihrer Grösse mit ihren untern von derselben oder von entgegengesetzter Art sind. Reicht nun die durch den Punct O′ gelegte, mit der Axe AX parallele, begrenzende Gerade bis zur ebenen Curve hin, so liegen alle Werthe von x, für welche $\int_{x'_0=\varphi_x}^{x'} f_x$ oder $\overset{1\,0}{\partial}\mathfrak{F}_x$ als nicht null seiend angenommen werden kann zwischen der durch O′ gelegten, mit der Axe AX′ parallelen, geraden Begrenzungslinie, d. h. zwischen dem veränderlichen Werthe x, der dem beweglichen Puncte O′ angehört und zwischen dem Puncte, in welchem die ebene Curve von der durch O′ gelegten, mit der Axe AX parallelen, begrenzenden Geraden geschnitten wird; denn der letztere Punct ist nothwendig der äusserste auf dieser Seite des zu bestimmenden Flächeninhalts, wenn, wie wir voraussetzen, die Gleichung (81. b.) $\mathfrak{x}'$ für jeden Werth von $\mathfrak{x}$ nur in einer einzigen Gestalt liefert. Es ist also x_0 der Werth von $\mathfrak{x}$, den man aus der Gleichung der ebenen Curve $\mathfrak{x}' = \varphi_{\mathfrak{x}}$ findet, wenn man in ihr $\mathfrak{x}' = x'$ setzt, sonach hat man x_0 aus der Gleichung $x' = \varphi_{x_0}$ zu bestimmen. Liefert diese $x_0 = \psi_{x'}$, so erhält man schliesslich:

(81. d.) $$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0=\psi_{x'}}^{x} \int_{x'_0=\varphi_x}^{x'} f_x,$$

und hat nun $\mathfrak{F}_x$ als Function von den beiden Coordinaten x und x′ des beweglichen Punctes O′ gefunden, wenn man die beiden hier blos angezeigten Integratonen als wirklich ausgeführte ins Auge fasst. Zeigt es sich hierbei, das $\psi_{x'}$ für x_0 mehrere Werthe liefert, so hat man von den verschiedenen reellen Werthen, die sich für x_0 ergeben, den zu nehmen, welcher nach der angegebenen Seite hin dem x′ am nächsten liegt; denn über diesen hinaus kann die ebene Curve auf die andere Seite von der durch O′ gelegten, mit der Axe AX parallelen, begrenzenden Geraden zu liegen kommen, und dann würde man, den Betrachtungen der vorigen Nummer gemäss, diesseits und jenseits dieses Durchschnittspunctes die entsprechenden Theile $\int_{x'_0}^{x'} f_x$ mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen erhalten, welche aus dem Gegensatze in der Lage hervorgehende Verschiedenheit, eben so wie eine plötzliche Unterbrechung der Continuitat, eine separate Behandlung solcher Strecken nothwendig macht.

Begegnete die durch den Punct O′ gelegte, mit der Axe AX parallele, begrenzende Gerade, noch ehe sie die Curve trifft, einer mit der Axe AX parallelen, begrenzenden Geraden von fester Lage, deren Puncte alle an der Axe AX eine und dieselbe Coordinate von der unveränderlichen Länge ξ geben, so hätte man $x_0 = \xi$ zu nehmen, weil jetzt die Coordinaten aller Puncte innerhalb des so begrenzten Raumes an der Axe AX zwischen ξ und x lägen, und man erhielte nun den gesuchten Inhalt durch die Gleichung

(81. e.) $$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0=\xi}^{x} \int_{x'_0=\varphi_x}^{x'} f_x;$$

begegnete aber die durch den Punct O′ gelegte, mit der Axe AX parallele, begrenzende Gerade, noch ehe sie die durch die Gleichung (81. b.) gegebne Curve trifft, irgend einer andern Geraden oder Curve, welche neben der vorigen Curve als fester Theil in die Gesammtbegren-

zung hineingezogen wird, so könnte man den zu bestimmenden Flächenraum in Theile zerlegen, von welchen jeder nur eine der beiden Begrenzungscurven in sich aufnimmt, und den Flächeninhalt dieser Theile einzeln bestimmen; und das Gleiche wäre der Fall, wenn mehr als zwei Curven in den festen Theil der Begrenzung eingiengen. Es findet nämlich hier an jeder Stelle, wo die eine Curve einer andern begegnet, eine plötzliche Unterbrechung der Continuität statt, weshalb eine separate Behandlung der einzelnen Theile nöthig wird, die dann zu einer Summe von Integralen der vorigen Art hinführt.

137) Wir betrachten jetzt den Fall, wenn die Gleichung (81. b.) x' in mehrern Formen liefert. Im Allgemeinen wird man nun hier die eine Form herauszuheben haben, welche dem Zweige angehört, den man zur festen Begrenzung des zu bestimmenden Flächeninhalts nehmen will, und auf diese eine Form hat man dann die in der vorigen Nummer angezeigten verschiedenen Operationen in Anwendung zu bringen. Es kann jedoch geschehen, dass man in einem solchen Falle den Flächenraum behandeln soll, der von zwei entgegengesetzten Seiten her zwei solche Zweige zur festen Grenze hat und von den übrigen Seiten durch Gerade eingeschlossen ist, die mit einer der Coordinatenaxen parallel laufen. Ist z. B. $O_3\,O'\,O_2\,O_1\,O\,O'_1\,O'_2\,O'\,O'_3$ (Fig. 4.) eine ebene Curve, welche von Geraden, die mit der Axe $A\,X'$ parallel laufen, in zwei Puncten oder gar nicht geschnitten wird, und ist $\mathfrak{P}\,O$ die Gerade, welche diese Curve in dem Puncte O berührt und auf deren einer Seite kein Punct der Curve mehr liegt, so dass $O\,O_1\,O_2\,O'\,O_3$ und $O\,O'_1\,O'_2\,O'\,O'_3$ die beiden Zweige dieser Curve sind, von denen jeder durch eine Gleichung, wie die (81. b.) ist, gegeben wird, in welcher aber φ_x bei jedem Zweige eine andere Form annimmt, und bezeichnen wir diese besondere Form beim ersten und beim zweiten Zweige durch φ'_x und durch φ''_x, so sind also

$$x'=\varphi'_x \quad \text{und} \quad x'=\varphi''_x \tag{82. a.}$$

die Gleichungen, welche den ersten und den zweiten Zweig darstellen. Sind nun $P_1\,O_1\,O'_1$ und $P_2\,O_2\,O'_2$ zwei mit der Axe $A\,X'$ parallele Gerade und will man den Flächeninhalt des Stückes $O_1\,O'_1\,O'_2\,O_2\,O_1$ der Coordinatenebene oder den Betrag einer über dieses Flächenstück in veränderlicher Weise verbreiteten Eigenschaft finden, welches Flächenstück von zweien Seiten durch die beiden Curvenzweige und von den beiden andern durch die so eben genannten Geraden eingeschlossen wird, von welchen wir uns die eine $P_1\,O'_1$ als unveränderlich gegeben, die andere $P_2\,O'_2$ hingegen als beweglich denken wollen, so kann diess so geschehen. Wir stellen uns eine mit der Axe $A\,X$ parallele und bewegliche Gerade $o\,o'$ vor, so ist o' in Bezug auf jeden Zweig einzeln genommen ein beweglicher Punct, gerade wie der O' bei den Betrachtungen der vorigen Nummer war; es lässt sich daher alles dort Gesagte auf jeden einzelnen der beiden Zweige hier wieder völlig so wie dort in Anwendung bringen. Stellen demnach x und x' die Coordinaten des beweglichen Punctes o' vor und ξ die Coordinate, welche sämmtliche Puncte der Geraden $P_1\,O'_1$ an der Axe $A\,X$ geben, so ist nach Anleitung der Gleichung (81. e.)

$$\int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi'_x}^{x'} f_x$$

die Summe der über den Raum $o\,o'\,O_2\,O_1\,o$ verbreiteten Eigenschaft, deren auf die Längeneinheit ausgedehntes Maas an der Stelle, deren Coordinaten x, x' sind, f_x ist, und

$$\int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi''_x}^{x'} f_x$$

ist die Summe der über den Raum $o\,o'\,O'_2\,O_2\,o$ mit derselben veränderlichen Intensität verbreiteten Eigenschaft f_x, wobei jede solche Summe den ihren Raum angehenden Betrag der Eigenschaft mit dem Vorzeichen $+$ giebt, wenn die in ihr stehenden untern Grenzen x_0 und x'_0 beide zugleich grösser oder kleiner als beziehlich deren obern Grenzen x und x' sind, mit dem Vorzeichen — hingegen, wenn die eine untere Grenze grösser, die andere kleiner als die ihr entsprechende obere ist; es geben also jene beiden Summen den Betrag der über ihre Räume verbreiteten Eigenschaft mit einerlei Vorzeichen, wenn φ'_x und φ''_x beide zugleich grösser oder kleiner als x' sind, hingegen mit verschiedenen Vorzeichen, wenn die eine von den Grössen φ'_x und φ''_x grösser, die andere kleiner als x' ist, d. h. je nachdem x' zwischen φ'_x und φ''_x oder auf einer Seite von ihnen liegt. Hieraus folgt nun sogleich, dass, wo auch die bewegliche Gerade $o\,o'$ liegen mag, immer

$$\int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi'_x}^{x'} f_x - \int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi''_x}^{x'} f_x$$

die Summe der über den Raum $O_1\,O'_1\,O'_2\,O_2\,O_1$ mit der Intensität f_x verbreiteten Eigenschaft sei mit dem Vorzeichen $+$ oder — genommen, je nachdem, falls $\xi < x$ ist, der durch die Gleichung $\mathfrak{x}' = \varphi'_{\mathfrak{x}}$ dargestellte Zweig unterhalb oder oberhalb dem durch die Gleichung $\mathfrak{x}' = \varphi''_{\mathfrak{x}}$ dargestellten liegt, d. h. je nachdem die zu einerlei $\mathfrak{x}$ gehörigen Werthe von $\mathfrak{x}'$ beim ersten Zweig kleiner oder grösser als beim zweiten sind, und umgekehrt, wenn $\xi > x$ ist. Der vorstehende Ausdruck giebt mithin den positiven oder negativen Betrag der über den vorgeschriebenen Raum mit der veränderlichen Intensität f_x verbreiteten Eigenschaft an die Hand; bezeichnen wir daher den positiv genommenen Betrag durch $\mathfrak{F}_x$, so ist

(82. b.) $$\pm\mathfrak{F}_x = \int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi'_x}^{x'} f_x - \int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi''_x}^{x'} f_x,$$

und es ist von den doppelten Vorzeichen in dem Falle, wo $\xi < x$ ist, das obere oder untere zu nehmen, je nachdem $\varphi'_{\mathfrak{x}}$ kleiner oder grösser als $\varphi''_{\mathfrak{x}}$ für einerlei auf den vorgeschriebenen Raum sich beziehendes $\mathfrak{x}$ ist, und im entgegengesetzten Falle gerade umgekehrt. Die Gleichung (82. b.) lässt sich aber nach den Regeln der Integralrechnung auch so schreiben:

$$\pm\mathfrak{F}_x = \int_{x_0=\xi}^{x}\left(\int_{x'_0=\varphi'_x}^{x'} f_x - \int_{x'_0=\varphi''_x}^{x'} f_x\right)$$

und diese aus denselben Gründen so:

(82. c.) $$\pm\mathfrak{F}_x = \int_{x_0=\xi}^{x}\int_{x'_0=\varphi'_x}^{x'=\varphi''_x} f_x,$$

in welcher Gleichung wieder das obere oder untere Vorzeichen zu setzen ist, je nachdem die obern Grenzen hinsichtlich ihrer Grösse bezüglich mit den untern verglichen von einerlei oder von entgegengesetzter Art sind; man kann daher bei diesen wie bei allen andern Integralen die Unbestimmtheit des Vorzeichens vermeiden, wenn man es sich zur Regel macht, bei jeder einzelnen Integration die kleinere Grenze zur untern, die grössere zur obern zu nehmen. In dieser letztern Gleichung ist aber das innere Integral in Bezug auf x' ein völlig bestimmtes ge-

worden, woraus folgt, dass $\mathfrak{F}$ bei unserer jetzigen Aufgabe nicht mehr wie früher eine Function von x und x′, sondern nur noch eine Function der einen Veränderlichen x ist.

Verlangt man den Betrag der über den Raum $O'_2 O_2 O_1 O O'_1 O'_2$ verbreiteten Eigenschaft, so muss man an die Stelle von ξ das dem Puncte O, in welchem die Curve von einer mit der Axe A X′ parallelen Geraden berührt wird, zugehörige x setzen. Dieser Punct O, so wie die O′, in welchen sich etwa die beiden Curvenzweige begegnen mögen, besitzen die Eigenschaft, dass das ihnen zugehörige x, in den beiden Gleichungen (82. a.) für $\mathfrak{x}$ gesetzt, einerlei $\mathfrak{x}'$ liefern muss, oder dass

$$\varphi'_x = \varphi''_x \qquad \textbf{(82. d.)}$$

sein muss. Hat man aus dieser Gleichung die verschiedenen Werthe von x gefunden, welche Puncten angehören, in denen sich die beiden Curvenzweige begegnen, so hat man unter diesen den auszusuchen, welcher dem Puncte O entspricht, und ihn an die Stelle von ξ in die Gleichung (82. c.) zu setzen. Will man den Betrag der über einen ringsum von der Curve eingeschlossenen Raum, wie der $O' O_2 O_1 O O'_1 O'_2 O'$ ist, verbreiteten Eigenschaft auffinden, so hat man in dem zuletzt erhaltenen Ausdrucke für x den Werth zu setzen, welcher dem Puncte O′ angehört und der nächste bei dem zu O gehörigen, aus der Gleichung (82. d.) erhaltenen ist. Durch diesen Werth von x, der eine völlig bestimmte Grösse ist, verwandelt sich dann auch das äussere in der Gleichung (82. c.) auftretende Integral in ein auch in Bezug auf x völlig bestimmtes, so dass $\mathfrak{F}$, welches bisher noch eine Function von x war, nun auch aufhört, dieses zu sein, und eine von x und x′ völlig unabhängige Grösse wird. Hierbei darf man jedoch nicht ausser Acht lassen, dass man bei solchen auf einen bestimmten Flächeninhalt sich beziehenden Bestimmungen nie über den Umfang hinausgehen darf, welcher zwischen zwei zunächst bei einander liegenden Puncten, wie die O und O′ sind, liegt, weil das Integral diesseits und jenseits einer Stelle, wie die O′ in Fig. 4. ist, entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, und diess auf jeder Seite eine besondere Bestimmung verlangt.

Was hier von zwei Zweigen einer und derselben Curve gesagt worden ist, gilt ganz eben so, wenn anstatt dieser beiden Zweige die Zweige von zwei gänzlich verschiedenen Curven zur festen Begrenzung des vorgeschriebenen Flächenraums genommen würden; und wenn auch noch die geraden Begrenzungslinien, wie die $O_1 O'_1$ und $O_2 O'_2$ in der Fig. 4. waren, durch andere feste Gerade oder auch feste Curven ersetzt würden, so lässt sich doch immer der so begrenzte Flächenraum durch Gerade, die mit den Coordinatenaxen parallel laufen, in mehr oder weniger Theile zerlegen, von welchen jeder sich auf die bisher beschriebene Art behandeln lässt, so dass dergleichen Untersuchungen als in jedem denkbaren Falle durchführbar zu erachten sind.

138) In Fällen, wo, wie bei der Bestimmung des Flächeninhalts einer ebenen Figur, die in ihre Begrenzung eine oder mehrere Curven aufnimmt, die vorhin durch $\mathfrak{F}_x$ bezeichnete Function eine constante Grösse wird, hat man nicht völlig bis auf $\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x$ zurückzugehen, um aus ihm durch eine doppelte Integration $\mathfrak{F}_x$ herleiten zu können, indem sich unter solchen Umständen sowohl $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_x$ wie $\overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_x$ unmittelbar angeben, und dann aus einem von diesen Ausdrücken $\mathfrak{F}_x$ durch eine einfache Integration finden lässt; und das Gleiche findet da statt, wo man sich den Flächeninhalt als Function der senkrechten Coordinaten u und u′ vorstellt und durch $\mathfrak{F}_u$ bezeichnet, indem man auch hier nicht auf $\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u$ zurückzugehen braucht, um hieraus $\mathfrak{F}_u$ durch eine

doppelte Integration zu erhalten, sondern nach Gefallen $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_u$ oder $\overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_u$ unmittelbar angeben und aus diesem dann den gesuchten Flächeninhalt durch eine einfache Integration auffinden kann. Um das hierbei einzuhaltende Verfahren, welches in allen solchen Fällen stets das gleiche bleibt, zur Anschauung zu bringen, werden wir die Art, wie sich $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_x$ unmittelbar erhalten lässt, umständlich auseinander setzen. Gehen wir auf die Gleichung (76. c.) zurück, welche auf ihrer rechten Seite im ersten Gliede den zu findenden Ausdruck $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\xi$ hat, und aussagt, dass ihre ganze rechte Seite die Differenz $\mathfrak{F}_{x,\xi'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$ hergiebt, und beachten wir, dass diese Differenz in Fig. 3. a. durch das Flächenstück $O\mathfrak{O}\mathfrak{O}'S'$ vorgestellt wird, so können wir die Grösse des durch die an $\mathfrak{O}$ gelegte Tangente $\mathfrak{O}T$, welche von der Geraden $O'\mathfrak{O}'$ in o'' geschnitten wird, und durch die Geraden $O\mathfrak{O}$, OS', $S'o''$ begrenzten Flächenstücks $O\mathfrak{O}o''S'$, welches eine geradlinige ebene Figur ist, immer auf elementarem Wege wie folgt bestimmen. Da nämlich die Gleichung der an $\mathfrak{O}$ gelegten Tangente

$$\mathfrak{x}'-\mathfrak{r}'=\partial\mathfrak{r}'(\mathfrak{x}-\mathfrak{r})$$

ist, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ die schiefen Coordinaten des Punctes $\mathfrak{O}$ der Curve bezeichnen, der in Nr. 126. aufgestellten Gleichung (56. a.) gemäss, oder, wenn wir der begrenzenden ebenen Curve wieder die Gleichung (81. b.) zum Grunde legen und beachten, dass der Punct $\mathfrak{O}$ mit dem O die Coordinate ξ an der Axe AX gemein hat, weshalb das zum Puncte $\mathfrak{O}$ gehörige $\mathfrak{r}=\xi$ und das zu ihm gehörige $\mathfrak{r}'=\varphi_\xi$ ist:

$$\mathfrak{x}'-\varphi_\xi=\partial\varphi_\xi(\mathfrak{x}-\xi).$$

Nennen wir nun x_0' die zum Puncte o'' der Tangente gehörige Coordinate an der Axe AX', so wird dieser Werth aus der vorstehenden Gleichung der Tangente für $\mathfrak{x}'$ sich ergeben, wenn man in ihr für $\mathfrak{x}$ die dem Puncte o'' entsprechende Coordinate an der Axe AX setzt, welche im Sinne der in Nr. 133. gebrauchten Bezeichnungen $\xi+x_0$ ist, da die Puncte O' und o'' einerlei Coordinate an dieser letztern Axe liefern; man erhält daher x_0' aus der nachstehenden Gleichung:

$$x_0'-\varphi_\xi=\partial\varphi_\xi x_0.$$

Die Coordinaten der Puncte O und $\mathfrak{O}$ an der Axe AX' sind diesem zur Folge ξ' und φ_ξ, die der Puncte S' und o'' dagegen ξ' und $\varphi_\xi+\partial\varphi_\xi x_0$, und hieraus ergeben sich die Längen $\mathfrak{O}O$ und $o''S'$ wie folgt:

$$\xi'-\varphi_\xi \quad \text{und} \quad \xi'-\varphi_\xi-\partial\varphi_\xi x_0,$$

welche beide Ausdrücke den absoluten Längen das Vorzeichen + oder — beilegen, je nachdem die Gerade $\mathfrak{O}_0O$ oberhalb oder unterhalb der Curve liegt. Erwägt man jetzt noch, dass diese beiden Längen den senkrechten Abstand $x_0\sin W$ von einander haben, weil ihr schiefer Abstand OS' oder x_0 unter dem Winkel W gegen sie gestellt ist, so kann man ohne Weiters den Flächeninhalt des Trapezes $O\mathfrak{O}o''S'$ angeben; er ist nämlich:

$$\sin W\left[(\xi'-\varphi_\xi)x_0-\tfrac{1}{2}\partial\varphi_\xi x_0^2\right].$$

Dieser Ausdruck giebt den Inhalt des betrachteten Trapezes her, wie auch die Puncte O und O' gegen einander gestellt sein mögen; lässt man aber den beweglichen Punct O' dem O stets

näher rücken, bis die Grösse x_0 sich durch kein endliches Maas mehr aussprechen lässt, so unterscheidet sich dieses Trapez von dem Flächenstück $O\mathfrak{O}\mathfrak{O}'S'$, oder von der auf der rechten Seite der Gleichung (76. c.) stehenden Differenz $\mathfrak{F}_{x,\xi'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$ um keine Grösse mehr, die mit dieser Differenz vergleichbar wäre. Dasselbe gilt sonach auch von dem vorstehenden Ausdruck in Vergleich mit der auf der rechten Seite der Gleichung (76. c.) stehenden Reihe; daher ist kraft des in der Gleichung (40. a. und b.) ausgesprochenen Satzes

$$\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\xi = (\xi' - \varphi_\xi)\sin W \quad \text{oder} \quad \overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_x = (x' - \varphi_x)\sin W,$$

da der Punct O ein eben so unbestimmter Punct wie der O′ ist, und es ist sonach $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_x$ ohne Integration gefunden worden. Völlig auf dieselbe Weise lässt sich auch der Ausdruck $\overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_x$ aus der Gleichung (76. b.) herleiten, und die $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_u$, $\overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_u$ erhält man aus den verwandten in Nr. 134. vorgekommenen Gleichungen eben so. Uebrigens geht aus der Bestimmung des in den Längen $\xi' - \varphi_\xi$ und $\xi' - \varphi_\xi - \partial\varphi_\xi x_0$ enthaltenen Vorzeichens sogleich hervor, dass man durch die zuletzt angegebene Gleichung das Flächenstück $\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_x$ mit dem Vorzeichen + oder — erhalten werde, je nachdem die begrenzende Curve im Sinne der Axe AX' weiter rückwärts oder weiter vorwärts als die begrenzende Gerade $\mathfrak{O}'_0 O'$ liegt, woraus aufs Neue folgt, dass man gleichzeitig jenes Resultat nicht auf Flächenstücke in Anwendung bringen darf, in deren Innern ein Durchschnittspunct der begrenzenden Geraden mit der Curve liegt, weil sich sonst die Inhalte zu beiden Seiten eines solchen Durchschnittspunctes in der darauf folgenden Integration gegen einander aufheben würden, was in der Regel der Absicht des Rechners entgegen wäre, weshalb er gezwungen wird, solche Räume an jenen Durchschnittspuncten in kleinere zu trennen, und jeden dieser letztern für sich zu behandeln.

Es sind die Inhaltsbestimmungen von ebenen Figuren, in deren Grenzen Curven eingehen, von uns mit einiger Weitläufigkeit besprochen worden, die indessen nicht überflüssig erscheinen wird, wenn man in Ueberlegung nimmt, dass dieser Gegenstand gemeiniglich in engerer Weise behandelt wird, als hier geschehen ist. Dafür ist die Bestimmung der Längen von ebenen Curven, so wie des Flächeninhaltes von ebenen Figuren, deren Begrenzung wenigstens zum Theile solche Curven in sich aufnimmt, an ebenen Centralsystemen hier ganz übergangen worden, da alle Betrachtungen hierbei ganz die alten bleiben, und selbst die vorigen Figuren dabei benützt werden, wenn man statt der mit der einen Axe parallelen Linien von einem Punct A auslaufende, und statt der mit der andern Axe parallelen Geraden Kreislinien gezogen denkt, die den Punct A zum Mittelpuncte haben. Zwar wird man dann in den Bildern 3. a. und 3. b. statt auf das dortige Parallelogramm $OS'O'S$ auf eine ebene Figur gewiesen, die durch zwei concentrische Kreise und durch zwei von ihrem gemeinschaftlichen Mittelpuncte auslaufende Radien begrenzt wird; weil sich aber der Inhalt einer solchen Figur eben so gut auf elementarem Wege wie der eines Parallelogramms angeben lässt, so kann man immer wieder die Untersuchung hier wie dort zu Ende führen.

§. 14.

Von der krummen Fläche.

139) Wenn in einer Gleichung, wie

(83.) $$\varphi_x = 0 \quad \text{oder} \quad \psi_u = 0$$

die drei Veränderlichen x, x′, x″ oder u, u′, u″ vorkommen und diese die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines Punctes O′ in Bezug auf die drei Axen AX, AX′, AX″ eines beliebigen schiefwinkligen Coordinatensystems bedeuten, so stellt jede solche Gleichung alle diejenigen Puncte des Raumes dar, deren Coordinaten sie wahr machen, alle übrigen Puncte des Raumes hingegen schliesst sie von sich aus; es stellt mithin jede solche Gleichung einen Complex von Puncten dar, dessen allgemeine Natur wir nun näher kennen lernen wollen.

Fehlen in der Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ zwei von den Veränderlichen x, x′, x″ oder u, u′, u″ ganz und gar, so dass dieselbe nur noch eine von den dreien, die Lage der Puncte bestimmenden Coordinaten in sich enthält, so verliert diese eine Coordinate eben dadurch den Character einer Veränderlichen vollkommen. Die Gleichung schreibt in diesem Falle der einen in ihr vorhandenen Coordinate je nach ihrem Baue entweder einen einzigen oder mehrere und auch wohl unendlich viele bestimmte Werthe vor, die jedoch immer von solcher Art sind, dass sie nicht stetig in einander übergehen, sondern einer von dem andern um eine endliche, wenn auch noch so kleine Grösse verschieden ist. Ist nun z. B. x′ die eine in der Gleichung $\varphi_x = 0$ vorhandene Coordinate, und liefert diese Gleichung für x′ bestimmte und aus einander liegende Werthe in gewisser Anzahl, so führen diese, wenn man ihnen noch die Bestimmung $x = 0$ und $x'' = 0$ beifügt, zu eben so vielen in der Axe AX′ an bestimmten Stellen und getrennt von einander liegenden Puncten hin; weil aber die Gleichung $\varphi_x = 0$ die Grössen x und x″ gar nicht in sich enthält, und es ihr eben deswegen ganz gleichgültig ist, ob man x und x″ null sein lässt, oder ob man ihnen irgend andere beliebige Werthe beilegt, so nimmt jene Gleichung alle Puncte in sich auf, welche den Ebenen angehören, die parallel mit der Coordinatenebene XAX″ durch die so eben in der Axe AX′ aufgefundenen Puncte gelegt werden, da allen Puncten einer solchen Ebene derselbe Werth von x′ angehört. Ist hingegen z. B. u′ die eine in der Gleichung $\psi_u = 0$ vorkommende Coordinate, so liefert diese Gleichung für u′ bestimmte, aus einander liegende Werthe in gewisser Anzahl, und diese führen, wenn man ihnen noch die Bestimmung $u = 0$ und $u'' = 0$ beifügt, auf eben so viele in der Polaraxe A𝔛′ liegende Puncte hin; weil aber in der Gleichung $\psi_u = 0$ unserer Voraussetzung gemäss die Coordinaten u und u″ gar nicht vorkommen, und es ihr eben deswegen ganz gleichgültig ist, ob man u und u″ null sein lässt, oder ob man diesen Grössen irgend andere beliebige Werthe beilegt, so nimmt die Gleichung $\psi_u = 0$ alle Puncte in sich auf, welche den Ebenen angehören, die parallel mit der Polarcoordinatenebene 𝔛A𝔛″, d. h. senkrecht gegen die Axe AX′ durch die so eben in der Polaraxe A𝔛′ aufgefundenen Puncte gelegt werden, da allen Puncten einer solchen Ebene derselbe Werth von u′ angehört. — Man ersieht hieraus, dass jede der Gleichungen (83.), die nur eine von den drei schiefen oder nur eine von den drei senkrechten Coordinaten der Puncte in sich enthält, wenn man sie auf ein beliebiges körperliches Coordinatensystem bezieht, einen Complex von eben so vielen von einander getrennten und mit einer der Grund- oder Polar-Coordinatenebenen parallelen Ebenen darstellt, als die Gleichung für die eine in ihr zurückgebliebene Coordinate Werthe liefert.

Fehlt in der auf die drei Axen eines beliebigen körperlichen Coordinatensystems bezogenen Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ nur eine von den drei Veränderlichen x, x', x'' oder u, u', u'', so ändert diess die Sachlage. Fehlt nämlich in der Gleichung $\varphi_x = 0$ z. B. die Coordinate x'' ganz und gar, und legt man dieser den Werth Null bei, so lässt man dadurch alle durch die Gleichung dargestellten Puncte in der Coordinatenebene XAX' liegen und dann stellt die Gleichung $\varphi_x = 0$ den im Anfang des vorigen Paragraphen gegebenen Erörterungen zur Folge im Allgemeinen eine in der Ebene XAX' liegende Curve dar; weil aber die Coordinate x'' in der Gleichung gar nicht vorkommt, es mithin dieser Gleichung völlig gleichgültig ist, ob man x'' null sein lässt, oder ob man dieser Coordinate irgend einen andern beliebigen Werth beilegt, so nimmt die Gleichung $\varphi_x = 0$ in diesem Falle nicht nur alle Puncte der in der Coordinatenebene XAX' liegenden, so eben erwähnten Curve in sich auf, sondern ausserdem auch noch alle die Puncte, welche den Geraden angehören, die man sich durch sämmtliche Puncte der Curve parallel mit der Axe AX'' gezogen denkt, da alle Puncte einer jeden solchen Geraden dieselben Werthe x und x' haben, wie der Punct der Curve, durch den sie gezogen worden ist. Fehlt hingegen in der Gleichung $\psi_u = 0$ z. B. die Coordinate u'' und legt man dieser den Werth Null bei, so lässt man dadurch alle Puncte in der Polar-Coordinatenebene 𝔛A𝔛' liegen, wo dann die Gleichung $\psi_u = 0$ nur eine in dieser Ebene liegende Linie darstellen kann; weil aber die Coordinate u'' unserer Voraussetzung zur Folge in der Gleichung gar nicht vorkommt, es dieser daher völlig gleichgültig ist, ob man u'' null sein lässt, oder ob man für u'' irgend einen andern beliebigen Werth annimmt, so stellt die Gleichung $\psi_u = 0$ nicht blos alle Puncte der in der Ebene 𝔛A𝔛' liegenden Curve dar, sondern ausserdem auch noch alle die Puncte, welche den Geraden angehören, die durch sämmtliche Puncte dieser Curve parallel mit der Polaraxe A𝔛'' gezogen werden, da alle Puncte einer jeden solchen Geraden dieselben Werthe von u und u', wie der Punct der Curve, durch den sie gezogen worden ist, enthalten. — *) Es stellt sonach jede einzelne der Gleichungen (83.), wenn man sie auf die drei Axen eines körperlichen Coordinatensystems bezieht, und eine von den drei dabei zu berücksichtigenden schiefen oder senkrechten Coordinaten in ihr gar nicht vorkommt, jedesmal eine Cylinderfläche dar, deren Seitenlinien entweder mit einer der Grundaxen oder mit einer der Polaraxen parallel laufen und durch sämmtliche Puncte der Curve gehen, auf die man durch die Gleichung hingeführt wird, wenn man die in dieser fehlende Coordinate null sein lässt.

Kommen aber in den Gleichungen (83.) alle drei auf ein beliebiges körperliches Coordinatensystem bezogenen Coordinaten vor, so stellt jede derselben im Allgemeinen eine krumme Fläche vor, die nur ausnahmsweise eine Ebene oder eine Cylinderfläche in sich enthalten kann, wie die nachstehenden Betrachtungen darthun werden. — Heben wir nämlich von den zur Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ gehörigen Puncten irgend einen O heraus, für welchen die allgemeinen Coordinatenzeichen x, x', x'' oder u, u', u'' die besondern Werthe ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' annehmen und denken wir uns durch diesen bestimmt hervorgehobenen Punct O drei neue Axen OX, OX', OX'' gelegt, welche den ursprünglichen AX, AX', AX'' parallel und

*) Diess fällt sogleich in die Augen, wenn man die Gleichung $\psi_u = 0$ in das Polarsystem übergetragen sich vorstellt, in welchem die zuvor senkrechten Coordinaten schiefe werden, auf die sich dann alle bei der Gleichung $\varphi_x = 0$ angestellten Betrachtungen unmittelbar wieder in Anwendung bringen lassen.

gleichläufig sind, so dass man den oben (Abschn. I. §. 2.) aufgestellten Gleichungen (7.) zur Folge hat:

(84.) $x = \xi + x_0\,,\quad x' = \xi' + x_0'\,,\quad x'' = \xi'' + x_0''$ oder $u = \eta + u_0\,,\quad u' = \eta' + u_0'\,,\quad u'' = \eta'' + u_0''\,,$

wenn x_0, x_0', x_0'' die schiefen oder u_0, u_0', u_0'' die senkrechten, auf die neuen Axen OX, OX', OX'' bezogenen Coordinaten desselben Punctes sind, der an den ursprünglichen Axen AX, AX', AX'' die x, x', x'' oder u, u', u'' gab. Stellen wir uns nun die Coordinate x'' oder u'' als die durch die Gleichung (83.) gegebene Function von x, x' oder u, u' vor, so befindet sich jede von diesen beiden Functionen unter den oben (§. 12. Nr. 114.) für Functionen zweier Veränderlichen angenommenen Umständen, weshalb man der dortigen Gleichung (9. b.) gemäss hier hat sowohl

(85. a.)
$$\begin{cases} x_0'' = \left(\overset{10}{\partial}\xi'' x_0 + \overset{01}{\partial}\xi'' x_0'\right) + \left(\overset{20}{\partial}\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi'' x_0 x_0' + \overset{02}{\partial}\xi'' \frac{x_0'^2}{1.2}\right) \\ \qquad + \left(\overset{30}{\partial}\xi'' \frac{x_0^3}{1.2.3} + \overset{21}{\partial}\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} x_0' + \overset{12}{\partial}\xi'' x_0 \frac{x_0'^2}{1.2} + \overset{03}{\partial}\xi'' \frac{x_0'^3}{1.2.3}\right) + \ldots \end{cases}$$

als auch

(85. b.)
$$\begin{cases} u_0'' = \left(\overset{10}{\partial}\eta'' u_0 + \overset{01}{\partial}\eta'' u_0'\right) + \left(\overset{20}{\partial}\eta'' \frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta'' u_0 u_0' + \overset{02}{\partial}\eta'' \frac{u_0'^2}{1.2}\right) \\ \qquad + \left(\overset{30}{\partial}\eta'' \frac{u_0^3}{1.2.3} + \overset{21}{\partial}\eta'' \frac{u_0^2}{1.2} u_0' + \overset{12}{\partial}\eta'' u_0 \frac{u_0'^2}{1.2} + \overset{03}{\partial}\eta'' \frac{u_0'^3}{1.2.3}\right) + \ldots, \end{cases}$$

und es enthalten die Gleichungen (85. a.) und (85. b.) dieselben, aber auf die Axen OX, OX', OX'' bezogenen Puncte in sich, die von den Gleichungen (83.) auf die Axen AX, AX', AX'' bezogen dargestellt werden. Fassen wir nun von allen diesen Puncten irgend einen O' ins Auge, und denken wir uns diesen Punct O' dem vorhin bestimmt hervorgehobenen O stets näher rückend, so werden die ihm zugehörigen Werthe x_0, x_0' oder u_0, u_0' stets kleiner, die auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen in Klammern eingeschlossenen Theile, welche immer sämmtliche Glieder von derselben Dimension in Bezug auf x_0, x_0' oder u_0, u_0' in sich aufnehmen und nach der Höhe dieser Dimension geordnet sind, müssen während der fortdauernden Annäherung des Punctes O' an den O in um so grösserm Verhältnisse ihrem Werthe nach abnehmen, von je höherer Dimension sie in Bezug auf x_0, x_0' oder u_0, u_0' sind, und je kleiner diese Grössen werden, d. h. je näher man sich den Punct O' an den O gekommen denkt. Denkt man sich x_0 und x_0' oder u_0 und u_0' kleiner geworden, als jede noch so kleine angebbare Grösse, oder mit andern Worten, denkt man sich den Punct O' dem O möglichst nahe gekommen und doch nicht völlig in ihn übergegangen, so ist man gezwungen, vorausgesetzt, dass alle Partialableitungen von ξ'' oder η'' lauter bestimmte und endliche Werthe besitzen, sich jeden von jenen in Klammern eingeschlossenen Theil, der eine höhere Dimension als ein anderer in sich trägt, unvergleichlich kleiner als diesen vorzustellen, so zwar, dass jener neben diesem völlig verschwindet. Für solche Puncte O' also, welche in grösster Nähe bei dem O liegen, gehen die Gleichungen (85. a.) und (85. b.) über in:

(86.) $$x_0'' = \overset{10}{\partial}\xi'' x_0 + \overset{01}{\partial}\xi'' x_0' \quad \text{und} \quad u_0'' = \overset{10}{\partial}\eta'' u_0 + \overset{01}{\partial}\eta'' u_0'.$$

Jede dieser Gleichungen stellt aber den oben (Abschn. II. §. 10.) gegebenen Erörterungen gemäss, wenn man sich unter x_0, x_0', x_0'' oder u_0, u_0', u_0'' alle ihr genügenden Werthe von jeg-

licher Grösse denkt, eine durch den Punct O gehende Ebene dar, und giebt dadurch zu verstehen, dass in den durch die Gleichungen (83.) dargestellten Gebilden von jedem beliebig hervorgehobenen Punct O aus nach allen Seiten hin in einer möglichst klein gedachten Strecke um O herum andere Puncte sich ganz in derselben Weise an einander reihen, wie diess in der Ebene der Fall ist. Die Richtung der durch die Gleichungen (86.) gegebenen Ebenen, wodurch die Aneinanderlagerungsweise der Puncte des Gebildes zunächst um O herum ausgesprochen wird, hängt von den Werthen

$$\overset{10}{\partial}\xi'',\quad \overset{01}{\partial}\xi'' \text{ oder } \overset{10}{\partial}\eta'',\quad \overset{01}{\partial}\eta''$$

ab, welche dem Puncte O zukommen, und wird daher im Allgemeinen sich ändern, so wie dieser Punct ein anderer wird. Man hat sich daher das durch die Gleichungen (83.) dargestellte Gebilde im Allgemeinen so zu denken, dass sich in ihm an jeder Stelle auf eine möglichst klein gedachte Strecke hin die Puncte ganz so wie in einer Ebene an einander reihen, deren Stellung jedoch von einem Puncte zum andern, wenn zwischen beiden ein endlich angebbarer, wenn auch noch so kleiner Abstand stattfindet, in einer durch die Gleichung vorgeschriebenen und mit ihr wechselnden Weise sich abändert. In diesen Eigenschaften nun spricht sich der Character einer beliebigen krummen Fläche aus.

Die bis daher aus einer Gleichung, welche entweder die drei schiefen oder die drei senkrechten Coordinaten von Puncten auf ein körperliches Coordinatensystem bezogen in sich aufnimmt, abgeleiteten Schlüsse ändern sich nicht, wenn eine oder mehrere von den Partialableitungen $\overset{20}{\partial}\xi''$, $\overset{11}{\partial}\xi''$, $\overset{02}{\partial}\xi''$, ... oder $\overset{20}{\partial}\eta''$, $\overset{11}{\partial}\eta''$, $\overset{02}{\partial}\eta''$, ... null werden. Ja sogar wenn $\overset{10}{\partial}\xi''$ und $\overset{01}{\partial}\xi''$ oder $\overset{10}{\partial}\eta''$ und $\overset{01}{\partial}\eta''$ null werden, bleibt alles Gesagte noch eben so wahr; denn obgleich es scheinen möchte, dass man, wenn z. B. $\overset{10}{\partial}\xi''=0$ und $\overset{01}{\partial}\xi''=0$ ist, an die Stelle der ersten Gleichung (86.) die

$$x_0'' = \overset{20}{\partial}\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi'' x_0 x_0' + \overset{02}{\partial}\xi'' \frac{x_0'^2}{1.2}$$

setzen müsste, oder dass, wenn noch überdiess $\overset{20}{\partial}\xi''$, $\overset{11}{\partial}\xi''$, $\overset{02}{\partial}\xi''$ gleichzeitig null wären, wohl gar x_0'' einem noch später folgenden Theile jener Gleichung gleich zu nehmen wäre, so überzeugt man sich doch bald, dass selbst in einem solchen Falle die durch die erste Gleichung (86.), welche jetzt $x_0''=0$ würde, dargestellte Ebene immer wieder die Richtungen zu erkennen geben würde, in welchen sich die Puncte an der hervorgehobenen Stelle des Gebildes ebenenartig an einander reihen. In der That wollte man unter diesen Umständen x_0'' dem Theile der zweiten Dimension, wie die zuletzt geschriebene Gleichung thut, oder einem Theile von noch höherer Dimension gleich nehmen, so erhielte man für x_0'' Werthe, welche unvergleichlich kleiner als die x_0 und x_0' wären, und schon deshalb könnten die durch drei solche möglichst nahe bei O aufgefasste Puncte gelegte Ebene und die durch die Gleichung $x_0''=0$ dargestellte keinen Winkel von angebbarer Grösse mit einander bilden, so dass die Gleichung $x_0''=0$ immer noch zu den Richtungen hinführte, in denen sich an der hervorgehobenen Stelle die Puncte an einander reihen.

Wiewohl nun aber die Fälle, wo einer oder mehrere der vordersten auf einander folgenden Theile der Gleichungen (85. a.) oder (85. b.) null werden, den allgemeinen Character einer krummen Fläche nicht abändern, so giebt es doch andere Ausnahmen von der Regel, von

denen man Kenntniss nehmen muss, weil sie erst volles Licht über den vorgeführten Gegenstand verbreiten. Wenn wir aus einer der Gleichungen (83.) durch das Auflösen derselben die eine Coordinate x'' oder u'' als Zusammensetzungen von x und x' oder von u und u' aufsuchen, indem wir jene Grössen als Unbekannte, diese dagegen als Bekannte ansehen, so werden sich erstere häufig als mehrförmige Ausdrücke der letztern ergeben, so dass man im Allgemeinen zu je zwei beliebig gewählten Werthen von x und x' oder von u und u' für x'' oder u'' so viele einzelne Darstellungen erhalten wird, als verschiedene Formen in dem dafür erhaltenen allgemeinen Ausdruck vorkommen. Jede solche einzelne Form kann aber für sich allein wie eine zwischen x, x', x'' oder u, u', u'' gegebene Gleichung aufgefasst werden, auf die sich dann alles vorhin Gesagte wieder unmittelbar anwenden lässt. In der That, da wir bei den vorhin angestellten Betrachtungen die Grössen ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' nur auf einen einzigen zu den Gleichungen (83.) gehörigen Punct bezogen haben, und dieser in der Regel nur einer von den mehrern Formen entsprechen wird, so leuchtet von selber ein, dass jede der mehrern Formen für sich zu einem besondern flächenartigen Gebilde hinführen werde, das wir einen Zug des ganzen Gebildes oder Flächenzug nennen wollen. In besondern Fällen jedoch können zwei oder mehrere der neben einander liegenden Formen für dieselben Werthe x und x' oder u und u' einerlei Werth von x'' oder u'' liefern, welches an solchen Stellen der Fall sein wird, wo sich zwei oder mehrere der zusammengehörigen Flächenzüge gegenseitig durchdringen, und so zu Linien oder auch Puncten Anlass geben, von welchen aus die ebenenartige Verbreitung der Puncte in mehrfacher Weise sich gestaltet. Obschon aber die solchen Stellen entsprechenden Werthe von x, x', x'' oder u, u', u'' gleichzeitig mehreren einzelnen Formen angehören, so kann es doch geschehen, dass die solchen Stellen entsprechenden Werthe von $\overset{10}{\partial} x''$ und $\overset{01}{\partial} x''$ oder $\overset{10}{\partial} u''$ und $\overset{01}{\partial} u''$ bei den mehrern von diesen Stellen ausgehenden Flächenzügen verschieden ausfallen; dann durchschneiden sich die Züge an diesen Stellen in Richtungen, welche einen Winkel von endlicher Grösse mit einander bilden, und die mittelst der Gleichungen (86.) für solche Stellen aus den mehrerlei Formen sich ergebenden Ebenen decken die Art und Weise auf, wie sich die mehrern Züge an diesen Stellen durchkreuzen. Solche Züge, welche an dergleichen Stellen auch noch für $\overset{10}{\partial} x''$ und $\overset{01}{\partial} x''$ oder für $\overset{10}{\partial} u''$ und $\overset{01}{\partial} u''$ einerlei Werthe besitzen, haben zunächst an diesen Stellen eine gemeinsame Richtung, welche durch die ihnen gemeinschaftlich angehörige, ihre Lagerungsweise daselbst bezeichnende Ebene ausgesprochen wird.

Auch gilt hier bei den Flächen wieder alles das, was im vorigen Paragraphen bei den ebenen Curven in Bezug auf die Zerlegung einer Gleichung in mehrere andere gesagt worden ist. Kann man nämlich die Gleichungen (83.) auf eine von den Formen

(87. a.) $$\varphi'_x \varphi''_x = 0 \quad \text{oder} \quad \psi'_u \psi''_u = 0$$

bringen, und sind die Factoren φ'_x und φ''_x oder ψ'_u und ψ''_u von solcher Beschaffenheit, dass die Werthe von x, x', x'' oder u, u', u'', welche den einen zu Null machen, den andern nicht auf die Form $\frac{a}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ bringen, so werden die vorstehenden Gleichungen offenbar durch alle die Werthe von x, x', x'' oder u, u', u'' befriedigt, welche entweder den einen oder den andern ihrer beiden Factoren zu Null machen, während solche Werthe der Veränderlichen, die keinen der beiden Factoren verschwinden machen, eben so offenbar auch nicht im Stande sind,

die obigen Gleichungen zu befriedigen. Es ist daher gestattet, die Gleichung $\varphi'_x \varphi''_x = 0$ als einen Verein der beiden Gleichungen

$$\varphi'_x = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''_x = 0 \tag{87. b.}$$

aufzufassen, wenn man sich die beiden letzten als gänzlich von einander unabhängig denkt, und eben so kann man die Gleichung $\psi'_u \psi''_u = 0$ als einen Verein der beiden andern

$$\psi'_u = 0 \quad \text{und} \quad \psi''_u = 0 \tag{87. c.}$$

sich vorstellen, wenn man diese letztern gänzlich unabhängig von einander sein lässt. Es folgt hieraus, dass das in einer Gleichung, wie die (87. a.) sind, enthaltene Gebilde nichts anders ist, als eine Vereinigung der zwei in den Gleichungen (87. b.) oder (87. c.) enthaltenen Gebilde, vorausgesetzt, dass die Werthe der Veränderlichen, welche den einen Factor φ'_x oder ψ'_u zu Null machen, den andern Factor φ''_x oder ψ''_u nicht auf eine in der Rechnung unzulässige Form bringen, wie z. B. der Fall wäre, wenn man statt $\varphi_x = 0$ die andere Gleichung

$$\frac{\varphi_x}{f_x} \times f_x = 0$$

setzen und dabei f_x ganz nach Willkühr nehmen wollte.

Ausserdem giebt es noch andere Umstände, welche machen können, dass der vorhin angegebene Bau der durch eine Gleichung, wie die (83.) sind, dargestellten Fläche an einzelnen Stellen eine Modification erleidet. Diess geschieht namentlich da, wo eine oder mehrere der Partialableitungen $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$, $\overset{20}{\partial}\xi''$, ... oder $\overset{10}{\partial}\eta''$, $\overset{01}{\partial}\eta''$, $\overset{20}{\partial}\eta''$, ... die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, und eben dadurch zu verstehen geben, dass an solchen Stellen die Reihe (85. a.) oder (85. b.) ihre Anwendbarkeit verliert. Für diese Stellen, welche immer nur einzelne Ausnahmen von der Regel bilden, müssen dann auf die gleiche Weise, wie in der Lehre vom Grössten und Kleinsten unter ähnlichen Umständen geschieht, besondere, diesen exceptionellen Stellen angemessene Entwickelungen aufgesucht und an die Stelle der Reihen (85. a.) oder (85. b.) gesetzt werden, aus denen man sodann die Eigenthümlichkeit der Fläche an dergleichen Stellen zu entziffern hat. Gemeinhin zeigt es sich dabei, dass da, wo eine oder mehrere der genannten Partialableitungen die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, diess entweder das plötzliche Aufhören eines Flächenzuges, das durch den Uebergang der Coordinatenwerthe vom Reellen ins Imaginäre bewirkt wird, oder eine plötzliche Richtungsänderung der Fläche von einem endlichen Betrage oder sonst eine Continuitätsunterbrechung anderer Art ankündige. Man pflegt die Beurtheilung aller an einzelnen Stellen auftretenden ungewöhnlichen Eigenthümlichkeiten einer durch eine Gleichung gegebenen Fläche die Discussion dieser Gleichung zu nennen. Die Discussion einer Gleichung, deren Veränderliche man als Coordinaten von Puncten ansieht, bleibt völlig die gleiche, man mag diese Coordinaten auf ein rechtwinkliges oder auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem beziehen.

Die eine krumme Fläche darstellende Gleichung ist entweder gegeben, und es sollen aus ihr die Eigenschaften der Fläche abgeleitet werden, oder es wird die Fläche durch eine sie vollständig characterisirende Eigenschaft gegeben, welcher gemäss man die Gleichung der diese Eigenschaft in sich aufnehmenden Fläche aufzusuchen hat. Beim Aufsuchen der Gleichung hat man keineswegs besonders darauf zu sehen, dass sie lauter schiefe oder lauter senkrechte Coor-

dinaten in sich enthalte, vielmehr wird man im Allgemeinen besser thun, gleichzeitig schiefe und senkrechte Coordinaten in sie eingehen zu lassen, wie es gerade am besten mit der einfachsten Herleitungsweise sich verträgt, da eine solche gemischte Gleichung völlig gleichen Werth mit der hat, in welcher die Coordinaten getrennt auftreten; denn erstlich kann man immer da, wo gleichzeitig schiefe und senkrechte Coordinaten vorkommen, entweder die einen oder die andern mittelst der zwischen beiden bestehenden, im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen eliminiren, und so die gemischte Gleichung auf jede der in (83.) angenommenen Formen bringen, sodann aber kann man auch die gemischte Gleichung unmittelbar zu fernern Zwecken benützen, wie wir jetzt an einigen Beispielen zeigen werden.

140) Will man die Gleichung einer Kugelfläche, deren Mittelpunct und Radius gegeben ist, aus der sie characterisirenden Eigenschaft herleiten, dass der Abstand eines jeden ihrer Puncte von ihrem Mittelpuncte ihrem Radius gleich ist, und bezeichnet man die schiefen und senkrechten Coordinaten ihres Mittelpuncts an den drei Axen eines beliebigen Coordinatensystems durch x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'', so wie die von einem beliebigen Puncte der gesuchten Kugelfläche an denselben Axen durch x, x', x'' und u, u', u'', und den Radius der Kugelfläche selber durch r, so ist zufolge der oben (Abschn. I. §. 2.) aufgestellten Gleichung (20.):

(88. a.) $$r^2 = (x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1''),$$

und umgekehrt gehört jeder Punct, dessen Coordinatenwerthe, an die Stelle von x, x', x'' und u, u', u'' gesetzt, die vorstehende Gleichung befriedigen, der verlangten Kugelfläche an; es wird daher die angezeigte Kugelfläche durch die hier erhaltene Gleichung vollständig dargestellt.

Stellen nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ die schiefen und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die senkrechten Coordinaten eines irgend wo im Raume liegenden Punctes O_1 vor, so wie ϱ dessen Entfernung von einem beliebigen Puncte O der Kugelfläche, welcher x, x', x'' und u, u', u'' zu seinen schiefen und senkrechten Coordinaten hat, so erhält man aus demselben Grunde, der zur Gleichung (88. a.) führte:

(88. b.) $$\varrho^2 = (x - \mathfrak{x})(u - \mathfrak{u}) + (x' - \mathfrak{x}')(u' - \mathfrak{u}') + (x'' - \mathfrak{x}'')(u'' - \mathfrak{u}''),$$

und aus dieser Gleichung und der (88. a.) findet man:

$$\begin{aligned}\varrho^2 - r^2 = {} & (x - \mathfrak{x})(u - \mathfrak{u}) + (x' - \mathfrak{x}')(u' - \mathfrak{u}') + (x'' - \mathfrak{x}'')(u'' - \mathfrak{u}'') \\ & - [(x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1'')].\end{aligned}$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung für

$$(x - \mathfrak{x})(u - \mathfrak{u}) + (x' - \mathfrak{x}')(u' - \mathfrak{u}') + (x'' - \mathfrak{x}'')(u'' - \mathfrak{u}'')$$

zunächst

$$\begin{aligned}(x - x_1 + x_1 - \mathfrak{x})(u - u_1 + u_1 - \mathfrak{u}) + (x' - x_1' + x_1' - \mathfrak{x}')(u' - u_1' + u_1' - \mathfrak{u}') \\ + (x'' - x_1'' + x_1'' - \mathfrak{x}'')(u'' - u_1'' + u_1'' - \mathfrak{u}'')\end{aligned}$$

und hierauf

$$\begin{aligned}& (x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1'') \\ + {} & (x - x_1)(u_1 - \mathfrak{u}) + (x' - x_1')(u_1' - \mathfrak{u}') + (x'' - x_1'')(u_1'' - \mathfrak{u}'') \\ + {} & (x_1 - \mathfrak{x})(u - u_1) + (x_1' - \mathfrak{x}')(u' - u_1') + (x_1'' - \mathfrak{x}'')(u'' - u_1'') \\ + {} & (x_1 - \mathfrak{x})(u_1 - \mathfrak{u}) + (x_1' - \mathfrak{x}')(u_1' - \mathfrak{u}') + (x_1'' - \mathfrak{x}'')(u_1'' - \mathfrak{u}''),\end{aligned}$$

so geht sie über in:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho^2 - r^2 = (x_1 - \mathfrak{x})(u_1 - \mathfrak{u}) + (x'_1 - \mathfrak{x}')(u'_1 - \mathfrak{u}') + (x''_1 - \mathfrak{x}'')(u''_1 - \mathfrak{u}'') \\ \quad + (x - x_1)(u_1 - u) + (x' - x'_1)(u'_1 - u') + (x'' - x''_1)(u''_1 - u'') \\ \quad + (x_1 - \mathfrak{x})(u - u_1) + (x'_1 - \mathfrak{x}')(u' - u'_1) + (x''_1 - \mathfrak{x}'')(u'' - u''_1). \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (88.\ c.)$$

In dieser Gleichung stellt die erste auf ihrer rechten Seite befindliche Zeile noch immer aus demselben Grunde, der zur Gleichung (88. a.) führte, das Quadrat der Entfernung des beliebig wo liegenden Punctes O_1 von dem Mittelpunct der Kugelfläche vor; bezeichnet man daher diese Entfernung durch R, so ist:

$$(x_1 - \mathfrak{x})(u_1 - \mathfrak{u}) + (x'_1 - \mathfrak{x}')(u'_1 - \mathfrak{u}') + (x''_1 - \mathfrak{x}'')(u''_1 - \mathfrak{u}'') = R^2. \quad (88.\ d.)$$

Die beiden folgenden Zeilen der Gleichung (88. c.) lassen die nachstehende Auslegung zu. Bezeichnen wir nämlich durch p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die vom Mittelpunct der Kugelfläche nach dem in der Kugelfläche liegenden Puncte O hinzielende Richtung an den Axen des Coordinatensystems giebt, so ist nach Anleitung der oben (Abschn. I. §. 2.) gegebenen Gleichungen (3.):

$$p = \frac{x - x_1}{r},\quad p' = \frac{x' - x'_1}{r},\quad p'' = \frac{x'' - x''_1}{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p} = \frac{u - u_1}{r},\quad \mathfrak{p}' = \frac{u' - u'_1}{r},\quad \mathfrak{p}'' = \frac{u'' - u''_1}{r};$$

bezeichnen wir ferner durch q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die vom Mittelpunct der Kugelfläche nach dem irgend wo im Raume liegenden Puncte O_1 hinzielende Richtung an den gleichen Axen giebt, so ist aus demselben Grunde:

$$q = \frac{\mathfrak{x} - x_1}{R},\quad q' = \frac{\mathfrak{x}' - x'_1}{R},\quad q'' = \frac{\mathfrak{x}'' - x''_1}{R} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{u} - u_1}{R},\quad \mathfrak{q}' = \frac{\mathfrak{u}' - u'_1}{R},\quad \mathfrak{q}'' = \frac{\mathfrak{u}'' - u''_1}{R},$$

und mittelst der aus den beiden vorstehenden Reihen von Gleichungen für $x - x_1$, $x' - x'_1$, $x'' - x''_1$; $u - u_1$, $u' - u'_1$, $u'' - u''_1$ und $\mathfrak{x} - x_1$, $\mathfrak{x}' - x'_1$, $\mathfrak{x}'' - x''_1$; $\mathfrak{u} - u_1$, $\mathfrak{u}' - u'_1$, $\mathfrak{u}'' - u''_1$ sich ergebenden Werthe erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} (x - x_1)(u_1 - u) + (x' - x'_1)(u'_1 - u') + (x'' - x''_1)(u''_1 - u'') = -(p\,\mathfrak{q} + p'\mathfrak{q}' + p''\mathfrak{q}'')\, r R \\ \text{und} \\ (x_1 - \mathfrak{x})(u - u_1) + (x'_1 - \mathfrak{x}')(u' - u'_1) + (x''_1 - \mathfrak{x}'')(u'' - u''_1) = -(q\,\mathfrak{p} + q'\mathfrak{p}' + q''\mathfrak{p}'')\, r R; \end{array}\right\} \quad (88.\ e.)$$

bezeichnet man aber durch θ den Winkel, welchen die beiden vom Mittelpunct der Kugelfläche nach den Puncten O und O_1 hinzielenden Richtungen mit einander machen, so ist den oben (Abschn. I. §. 2.) erwiesenen Gleichungen (9. a. und b.) zur Folge:

$$p\,\mathfrak{q} + p'\mathfrak{q}' + p''\mathfrak{q}'' = q\,\mathfrak{p} + q'\mathfrak{p}' + q''\mathfrak{p}'' = \cos\theta,$$

und in Folge dessen verwandeln sich die Gleichungen (88. e.) in:

$$\left.\begin{array}{l} (x - x_1)(u_1 - u) + (x' - x'_1)(u'_1 - u') + (x'' - x''_1)(u''_1 - u'') = -r R \cos\theta \\ \text{und} \\ (x_1 - \mathfrak{x})(u - u_1) + (x'_1 - \mathfrak{x}')(u' - u'_1) + (x''_1 - \mathfrak{x}'')(u'' - u''_1) = -r R \cos\theta. \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (88.\ f.)$$

Durch die Gleichungen (88. d. und f.) nun geht die (88. c.) über in:

$$\varrho^2 = r^2 - 2 r R \cos\theta + R^2,$$

und dieser kann man jede der zwei nachstehenden Formen geben:

$$\varrho^2 = (r - R)^2 + 4 r R \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \quad \text{und} \quad \varrho^2 = (r + R)^2 - 4 r R \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta. \quad (88.\ g.)$$

Aus den letzten beiden Formen lassen sich nun auf den ersten Blick folgende Eigenschaften der Kugelfläche ablesen: Ein vom Mittelpunct einer Kugel, deren Radius r ist, um R abstehender Punct O_1 liegt demjenigen Punct der Kugelfläche am nächsten, und sein Abstand von ihm ist $\pm(r-R)$, bei welchem $\theta=0$ ist, d. h. welcher in der vom Mittelpunct nach O_1 gezogenen Geraden mit O_1 auf einerlei Seite des Mittelpuncts liegt; der Punct O_1 hingegen liegt von demjenigen Puncte der Kugelfläche am weitesten ab, und sein Abstand von ihm beträgt $r+R$, bei welchem θ zwei Rechte beträgt, d. h. welcher in der durch O_1 und den Mittelpunct gelegten Geraden so liegt, dass er und O_1 auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts sich befinden. Liegt der Punct O_1 selber in der Kugelfläche, so wird $r=R$ und dann steht er von einem andern Puncte der Kugelfläche um $2r\sin\frac{1}{2}\theta$ ab, welcher Abstand, wie zuvor der bei jeder andern Lage des Punctes O_1 gefundene that, mit dem Winkel θ zunimmt, d. h. um so grösser wird, je mehr die vom Mittelpunct nach dem Punct der Kugelfläche und nach dem Punct O_1 hinlaufenden Richtungen von einander abweisen.

141) Während sich ein Winkel von unveränderlicher Grösse und unverrückbarem Scheitel um den einen seiner beiden Schenkel dreht, beschreibt sein anderer Schenkel eine Fläche, die man die Umwälzungs-Kegelfläche zu nennen pflegt. Der Scheitel des diese Fläche erzeugenden Winkels heisst die Spitze der Kegelfläche, der bewegte Schenkel des erzeugenden Winkels wird in jeder seiner Lagen die Seite, so wie der unbewegte Schenkel die Axe der Kegelfläche genannt. Wir werden nun die Gleichung der Umwälzungs-Kegelfläche aufstellen. Bezeichnen wir durch A, A', A'' und C, C', C'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Axe der Umwälzungs-Kegelfläche an den Axen des beliebigen Coordinatensystems giebt, durch p, p' p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die, welche irgend eine der unendlich vielen Seiten der Kegelfläche an den gleichen Axen giebt, endlich durch λ die Grösse des die Kegelfläche erzeugenden Winkels, so ist den oben (Absch. I. §. 2.) aufgestellten Gleichungen (9. a. und b.) zur Folge sowohl

(89. a.) $$pC+p'C'+p''C''=\cos\lambda \quad \text{als} \quad \mathfrak{p}A+\mathfrak{p}'A'+\mathfrak{p}''A''=\cos\lambda,$$

wenn wir stets von den zwei Richtungen, welche die Schenkel des Winkels λ ausmachen, die ruhende als die der Axe des Kegels angehörige, die bewegte als die seiner jeweiligen Seite entsprechende ansehen. Stellen ferner x_1, x_1', x_1'' und u_1, u_1', u_1'' die schiefen und senkrechten Coordinaten vor, welche die Spitze der Kegelfläche an den Coordinatenaxen liefert, und x, x', x'' und u, u', u'' die, welche irgend ein Punct der Kegelfläche an denselben Axen liefert, so ist, wenn r den Abstand dieses letzten Punctes von der Kegelspitze bezeichnet, den oben (Absch. I. §. 2.) gegebenen Gleichungen (3.) gemäss:

$$p=\frac{x-x_1}{r},\quad p'=\frac{x'-x_1'}{r},\quad p''=\frac{x''-x_1''}{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}=\frac{u-u_1}{r},\quad \mathfrak{p}'=\frac{u'-u_1'}{r},\quad \mathfrak{p}''=\frac{u''-u_1''}{r},$$

und hierdurch nehmen die Gleichungen (89. a.) die folgende Gestalt an:

(89. b.) $$\left\{\begin{array}{l} C(x-x_1)+C'(x'-x_1')+C''(x''-x_1'')=r\cos\lambda \\ \text{und} \\ A(u-u_1)+A'(u'-u_1')+A''(u''-u_1'')=r\cos\lambda, \end{array}\right.$$

welche mit einander multiplicirt geben:

$$[C(x-x_1)+C'(x'-x_1')+C''(x''-x_1'')][A(u-u_1)+A'(u'-u_1')+A''(u''-u_1'')]=r^2\cos^2\lambda,$$

und diese letzte Gleichung wird, weil der oben (Abschn. I. §. 2.) mitgetheilten Gleichung (20.) zur Folge

$$r^2 = (x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1'') \qquad \textbf{(89. c.)}$$

ist:

$$[C(x - x_1) + C'(x' - x_1') + C''(x'' - x_1'')][A(u - u_1) + A'(u' - u_1') + A''(u'' - u_1'')]$$
$$= \cos^2\lambda\,[(x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1'')]. \qquad \textbf{(89. d.)}$$

Diess ist die Gleichung der vorgelegten Umwälzungs-Kegelfläche. Jeder Punct, auf den der bewegliche Schenkel des erzeugenden Winkels stösst, macht diese Gleichung wahr und umgekehrt gehört jeder Punct, durch welchen diese Gleichung befriedigt wird, dem bewegten Schenkel in einer seiner möglichen Lagen an. Hierbei hat man jedoch noch Folgendes zu berücksichtigen. Man kann sich den beweglichen Schenkel des die Kegelfläche erzeugenden Winkels am Scheitel begrenzt und von da aus nur nach der Seite hinlaufend vorstellen, nach welcher seine Richtung hinzielt; dann haben die Projectionszahlen p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ stets die ihnen vorhin beigelegten Werthe, welche zu den Gleichungen (89. b.) geführt haben. Denkt man sich hingegen den beweglichen Schenkel des die Kegelfläche erzeugenden Winkels auch nach der entgegengesetzten Seite ins Unendliche verlängert und rechnet man zur Kegelfläche auch alle die Puncte, welche von dieser Verlängerung durchlaufen werden, so entsprechen diesen Puncten Werthe von p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$, welche den vorigen an Grösse gleich, dem Vorzeichen nach aber gerade entgegengesetzt sind, und daher anstatt der Gleichungen (89. b.) die

$$C(x - x_1) + C'(x' - x_1') + C''(x'' - x_1'') = -r\cos\lambda$$

und

$$A(u - u_1) + A'(u' - u_1') + A''(u'' - u_1'') = -r\cos\lambda$$

zu Stande bringen, welche jedoch mit einander multiplicirt wieder zu der (89. d.) hinführen. Man sieht hieraus, dass die Gleichung (89. d.) nicht blos alle die Puncte in sich aufnimmt, welche der Schenkel des erzeugenden Winkels vom Scheitel an im Sinne seiner Richtung aufgefasst durchläuft, sondern ausser diesen auch noch alle die, welche dessen Verlängerung nach der entgegengesetzten Seite durchläuft, und dass man, wenn die Gleichungen (89. b.) denselben Grad der Allgemeinheit in sich tragen sollen, ihre rechten Seiten mit doppelten Vorzeichen versehen muss, oder, was dasselbe ist, unter λ gleichzeitig den Winkel, den dieser Buchstabe vorstellt und seinen Nebenwinkel sich zu denken hat.

Stellen nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die schiefen und senkrechten Coordinaten irgend eines Punctes O_1 im Raume vor, und bezeichnet ϱ den Abstand, in welchem dieser Punct zu irgend einem Puncte O der Kegelfläche steht, dessen Coordinaten durch x, x', x'' und u, u', u'' angezeigt werden, so ist (Abschn. I. §. 2. Gleich. 20.):

$$\varrho^2 = (x - \mathfrak{x})(u - \mathfrak{u}) + (x' - \mathfrak{x}')(u' - \mathfrak{u}') + (x'' - \mathfrak{x}'')(u'' - \mathfrak{u}''),$$

und diese Gleichung giebt in Verbindung mit der (89. c.):

$$\varrho^2 - r^2 = (x - \mathfrak{x})(u - \mathfrak{u}) + (x' - \mathfrak{x}')(u' - \mathfrak{u}') + (x'' - \mathfrak{x}'')(u'' - \mathfrak{u}'')$$
$$-[(x - x_1)(u - u_1) + (x' - x_1')(u' - u_1') + (x'' - x_1'')(u'' - u_1'')].$$

Diese letzte Gleichung ist aber ganz dieselbe wie die in voriger Nummer bei der Kugelfläche erhaltene, welche unmittelbar auf die dort stehende (88. b.) folgt; es lassen sich daher alle

mit jener vorgenommenen Umänderungen auch bei dieser wieder in Anwendung bringen, und man gelangt, ganz so wie dort, wenn man wieder

(89. e.) $$(x_1 - r)(u_1 - u) + (x'_1 - r')(u'_1 - u') + (x''_1 - r'')(u''_1 - u'') = R^2,$$

so wie

(89. f.) $$\begin{cases} (x - x_1)(u_1 - u) + (x' - x'_1)(u'_1 - u') + (x'' - x''_1)(u''_1 - u'') = -rR\cos\theta \\ \text{und} \\ (x_1 - r)(u - u_1) + (x'_1 - r')(u' - u'_1) + (x''_1 - r'')(u'' - u''_1) = -rR\cos\theta \end{cases}$$

setzt, zu der Gleichung:

(89. g.) $$\varrho^2 = r^2 - 2rR\cos\theta + R^2.$$

Es bedeutet aber hier R, der Gleichung (89. e.) gemäss, die Entfernung des Punctes O_1 von der Kegelspitze, und θ nach Aussage der Gleichungen (89. f.) den Winkel, welchen die von der Kegelspitze nach den Puncten O_1 und O hinlaufenden Richtungen mit einander bilden, und da die beiden Schenkel des Winkels θ, wenn sie mit der Kegelaxe nicht in einer und derselben Ebene liegen, in Verbindung mit der Richtung dieser Kegelaxe immer als Axen eines beliebigen Coordinatensystems angesehen werden können, so ist den in Absch. I. §. 2. gegebenen Gleichungen (38.) zur Folge, wenn λ und λ_1 die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Kegelaxe mit den beiden Schenkeln des Winkels θ bildet, θ_1 hingegen den Winkel, welchen die von der Kegelaxe auslaufenden und durch die Puncte O_1 und O gehenden zwei Ebenen einschliessen, welcher Winkel stets der Nebenwinkel von dem ist, den die auf diesen zwei Ebenen senkrechten Polaraxen des hier so eben ins Auge gefassten Coordinatensystems mit einander bilden:

$$\sin\lambda\sin\lambda_1\cos\theta_1 = \cos\theta - \cos\lambda\cos\lambda_1,$$

welche Gleichung, wie man sogleich wahrnimmt, auch dann noch bestehen bleibt, wenn die drei Richtungen, welche zu ihr geführt haben, in eine und dieselbe Ebene fallen. Aus dieser Gleichung erhält man $\cos\theta$ in folgenden zwei Formen:

$$\cos\theta = \cos(\lambda - \lambda_1) - 2\sin\lambda\sin\lambda_1\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_1 \quad \text{und} \quad \cos\theta = \cos(\lambda + \lambda_1) + 2\sin\lambda\sin\lambda_1\cos^2\tfrac{1}{2}\theta_1;$$

durch diese Werthe von $\cos\theta$ aber nimmt die Gleichung (89. g.) die nachstehenden zwei Gestalten an:

(89. h.) $$\begin{cases} \varrho^2 = r^2 - 2rR\cos(\lambda - \lambda_1) + R^2 + 4rR\sin\lambda\sin\lambda_1\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_1 \\ \text{und} \\ \varrho^2 = r^2 - 2rR\cos(\lambda + \lambda_1) + R^2 - 4rR\sin\lambda\sin\lambda_1\cos^2\tfrac{1}{2}\theta_1. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (89. h.) lassen sich folgende Eigenschaften der Umwälzungs-Kegelfläche ablesen: Denkt man sich den Punct O_1 mit einer gegebenen Kegelfläche auf eine völlig bestimmte Weise vereinigt, so hat man sich die Grössen R, λ und λ_1 als stets dieselben bleibend vorzustellen; nimmt man daher auch noch r als seinen Werth nicht ändernd an, d. h. betrachtet man blos solche Puncte der Kegelfläche, welche in einer und derselben, auf der Kegelaxe senkrechten Ebene liegen, so ändern die drei ersten, auf rechter Seite von den Gleichungen (89. h.) befindlichen Glieder für alle diese Puncte ihre Werthe nicht. In diesem Falle geben dann die vorstehenden Gleichungen zu erkennen, dass sie für ϱ, also für den Abstand des Punctes O_1 von den Puncten der Kegelfläche, welche in einer und derselben auf der Kegelaxe senkrechten Ebene liegen, einen kleinsten Werth liefern, wenn $\theta_1 = 0$ ist, nämlich den:

$$\varrho^2 = r^2 - 2rR\cos(\lambda - \lambda_1) + R^2;$$

hingegen einen grössten, wenn $\theta_1 = 180^\circ$ ist, nämlich den:

$$\varrho^2 = r^2 - 2rR\cos(\lambda + \lambda_1) + R^2;$$

der Abstand ϱ des Punctes O_1 von den Puncten, welche aus der Kegelfläche durch eine auf ihrer Axe senkrechte Ebene herausgeschnitten werden, hat daher bei den zwei Puncten O, welche in der durch die Kegelaxe und den Punct O_1 gelegten Ebene liegen, einen kleinsten oder grössten Werth, je nachdem der Punct O mit den O_1 auf einerlei oder auf entgegengesetzter Seite von der Kegelaxe liegt. Hierbei muss man jedoch bedenken, dass die Puncte einer und derselben Kegelseite, welche zu beiden Seiten der Kegelspitze liegen, in der durch den Punct O_1 und die Kegelaxe hindurch gehenden Ebene auf entgegengesetzten Seiten von dieser Axe liegen; lässt man daher die auf der Kegelaxe senkrechte Ebene der Kegelspitze stets näher rücken, wodurch r stets kleiner, und null wird, wenn die Ebene in diese Spitze gekommen ist, so wird, wenn die Ebene in derselben Richtung noch weiter fortrückt und auf die andere Seite von der Kegelspitze gekommen ist, (vorausgesetzt, dass man jede der Gleichungen immer auf Puncte, die derselben Kegelseite angehören, bezieht), wobei r zwar wieder einen wirklichen Werth annimmt, der jedoch in Folge des Gegensatzes in der Lage ein dem vorigen entgegengesetztes Vorzeichen erhält, diejenige der zwei vorstehenden Gleichungen, welche zuvor den kleinsten Werth ϱ lieferte, jetzt den grössten geben, und umgekehrt. Hieraus folgt, dass die absolut kleinste Entfernung des Punctes O_1 von der Kegelfläche eben so gut nach einem Puncte der Kegelseite hinlaufen kann, auf welche wir die zweite der vorstehenden Gleichungen beziehen, wie nach einem Puncte der Kegelseite, worauf wir die erste dieser Gleichungen beziehen; geben wir daher diesen zwei Gleichungen die nachstehende Form:

$$\varrho^2 = R^2\sin^2(\lambda - \lambda_1) + [r - R\cos(\lambda - \lambda_1)]^2$$

und

$$\varrho^2 = R^2\sin^2(\lambda + \lambda_1) + [r - R\cos(\lambda + \lambda_1)]^2$$

so zeigen sie auf der Stelle, dass der absolut kleinste Abstand des Punctes O_1 von der Kegelfläche entweder

$$\pm R\sin(\lambda - \lambda_1) \text{ ist, wobei } r = R\cos(\lambda - \lambda_1)$$

genommen werden müsste, oder

$$\pm R\sin(\lambda + \lambda_1), \text{ wobei } r = R\cos(\lambda + \lambda_1)$$

sein müsste, dass also in jedem Falle der absolut kleinste Abstand eines von den zwei Lothen ist, die von dem Puncte O_1 aus nach den beiden Kegelseiten hingezogen werden. Diese beiden Lothe werden einander gleich, so wie auch die ihnen entsprechenden absoluten Werthe von r, wenn entweder $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_1 = 90^\circ$ oder $\lambda_1 = 180^\circ$ ist, d. h. wenn die durch die Kegelspitze und den Punct O_1 gezogene Gerade mit der Kegelaxe in einer und derselben Geraden liegt oder darauf senkrecht steht. In diesem Falle giebt es zwei kleinste Abstände des Punctes O_1 von der Kegelfläche, in jedem andern Falle hingegen nur einen, den kleinsten von den obigen zweien nämlich, die unter solchen Umständen nie einander gleich werden können.

142) Wenn sich eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade dreht, so beschreibt eine zweite mit dieser parallelen Gerade, die in derselben Ebene liegt und stets den gleichen Abstand von der ersten beibehält, eine krumme Fläche, welche man Umwälzungs-Cylinderfläche nennt. Die erste ihren Ort nicht verändernde Gerade heisst die Axe, so wie die andere bewegliche in jeder ihrer Lagen die Seite der Cylinderfläche oder des Cylinders. Da die

beiden parallelen Geraden überall einerlei senkrechten Abstand von einander haben und jeder solche Abstand während der Erzeugung der Umdrehungs-Cylinderfläche einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunct in der Cylinderaxe und dessen Umfang in der Cylinderfläche liegt, so schneidet auch umgekehrt jede auf der Cylinderaxe senkrechte Ebene aus der Cylinderfläche eine Kreislinie heraus, deren Radius dem Abstand der parallelen Geraden gleich ist und deren Mittelpunct in der Cylinderaxe liegt, diesen Radius wollen wir den Radius der Cylinderfläche nennen. Wir werden nun die Gleichung einer Umwälzungs-Cylinderfläche, deren Radius und Axe gegeben sind, aufstellen. Es bezeichne r_0 den Radius der zu bestimmenden Umwälzungs-Cylinderfläche und a_0, a'_0, a''_0 seien die schiefen, c_0, c'_0, c''_0 die senkrechten Projectionszahlen, welche eine von den zwei der Cylinderaxe angehörigen Richtungen an den Axen des beliebig gewählten Coordinatensystems giebt. Denken wir uns durch die Spitze dieses ursprünglichen, aus den Axen AX, AX′, AX″ gebildeten Systems drei neue Axen AY, AY′, AY″ gelegt, von denen die eine AY″ parallel und gleichläufig mit der gegebenen Richtung der Cylinderaxe ist, die beiden andern AY und AY′ aber auf dieser einen senkrecht stehen, und also für sich ein ebenes System bilden, so wird die zu bestimmende Cylinderfläche von der Ebene YAY′ in einer Kreislinie vom Radius r_0 geschnitten, deren Gleichung in dem aus den Axen AY und AY′ gebildeten ebenen Systeme

$$(y - y_1)(v - v_1) + (y' - y'_1)(v' - v'_1) = r_0^2 \tag{90. a.}$$

ist, wenn y, y' die schiefen, v, v' die senkrechten, auf die Axen AY und AY′ bezogenen Coordinaten von irgend einem Puncte dieser Kreislinie, y_1, y'_1 und v_1, v'_1 dagegen die vom Mittelpuncte derselben vorstellen. Dieselbe Gleichung (90. a.) stellt aber auch dem im Eingange zu Nr. 139. Gesagten gemäss die vorgelegte Umwälzungs-Cylinderfläche dar, wenn man sie auf die drei Axen AY, AY′, AY″ des senkrechten körperlichen Systems bezieht. Um nun die auf die neuen Axen sich beziehende Gleichung der vorgelegten Umwälzungs-Cylinderfläche in die überzuführen, wodurch dieselbe Cylinderfläche an den ursprünglichen Axen AX, AX′, AX″ dargestellt wird, seien x, x', x'' und u, u', u'' die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen AX, AX′, AX″ von demselben Puncte, der an den Axen AY, AY′, AY″ die y, y', y'' und v, v', v'' hat; dann ist den oben (Abschn. I. §. 2.) aufgestellten Gleichungen (65. a.) und (65. b.) zur Folge:

$$v = A u + A' u' + A'' u'', \quad v' = A_1 u + A'_1 u' + A''_1 u'', \quad v'' = A_2 u + A'_2 u' + A''_2 u''$$

und

$$y = B x + B_1 x' + B_2 x'', \quad y' = B' x + B'_1 x' + B'_2 x'', \quad y'' = B'' x + B''_1 x' + B''_2 x'',$$

wenn die Grössen, welche A und B zum Grundzeichen haben, in Betreff der beiden hier eingeführten Coordinatensysteme völlig die gleiche Bedeutung haben, welche ihnen im ersten Abschnitte Nr. 23. und Nr. 24. beigelegt worden ist. Die vorstehenden Gleichungen bleiben wahr, welchem Puncte im Raume auch die in ihnen vorkommenden Coordinaten entsprechen mögen; bezeichnen daher x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen AX, AX′, AX″ von irgend einem Puncte der Cylinderaxe, der an den Axen AY, AY′, AY″ die y_1, y'_1, y''_1 und v_1, v'_1, v''_1 hat, so ist es gestattet, diese besondern Coordinatenwerthe anstatt der allgemeinen in die vorstehenden Gleichungen einzusetzen. Thut man diess und zieht man die so sich ergebenden neuen Gleichungen von den vorigen ab, so erhält man:

$$v - v_1 = A\,(u - u_1) + A'\,(u' - u'_1) + A''\,(u'' - u''_1)\,,$$
$$v' - v'_1 = A_1\,(u - u_1) + A'_1\,(u' - u'_1) + A''_1\,(u'' - u''_1)\,,$$
$$v'' - v''_1 = A_2\,(u - u_1) + A'_2\,(u' - u'_1) + A''_2\,(u'' - u''_1)$$

und

$$y - y_1 = B\,(x - x_1) + B_1\,(x' - x'_1) + B_2\,(x'' - x''_1)\,,$$
$$y' - y'_1 = B'\,(x - x_1) + B'_1\,(x' - x'_1) + B'_2\,(x'' - x''_1)\,,$$
$$y'' - y''_1 = B''(x - x_1) + B''_1\,(x' - x'_1) + B''_2\,(x'' - x''_1)\,.$$

Setzt man die hier für $y - y_1$, $y' - y'_1$ und $v - v_1$, $v' - v'_1$ erhaltenen Werthe in die Gleichung (90. a.) ein, so findet man:

$$\begin{aligned}&[A\,(u - u_1) + A'(u' - u'_1) + A''(u'' - u''_1)]\,[B\,(x - x_1) + B_1(x' - x'_1) + B_2(x'' - x''_1)]\\ &+ [A_1\,(u - u_1) + A'_1(u' - u'_1) + A''_1(u'' - u''_1)]\,[B'\,(x - x_1) + B'_1(x' - x'_1) + B'_2(x'' - x''_1)] = r_0^2\,,\end{aligned}$$

oder, wenn man aus dieser die eckigen Klammern wegschafft:

$$\begin{aligned}&(AB + A_1B')(x - x_1)(u - u_1) + (A'B_1 + A'_1B'_1)(x' - x'_1)(u' - u'_1) + (A''B_2 + A''_1B'_2)(x'' - x''_1)(u'' - u''_1)\\ &\quad + (A'\,B + A'_1\,B')(x - x_1)(u' - u'_1) + (A\,B_1 + A_1\,B'_1)(u - u_1)(x' - x'_1)\\ &\quad + (A''\,B + A''_1B')(x - x_1)(u'' - u''_1) + (A\,B_2 + A_1\,B'_2)(u - u_1)(x'' - x''_1)\\ &\quad + (A''\,B_1 + A''_1B'_1)(x' - x'_1)(u'' - u''_1) + (A'\,B_2 + A'_1\,B'_2)(u' - u'_1)(x'' - x''_1) = r_0^2\,.\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung aber geht mit Zuziehung der oben (Abschn. I. §. 2.) aufgefundenen hintern Gleichungen (80.) über in:

$$\begin{aligned}&(1 - A_2B'')(x - x_1)(u - u_1) + (1 - A'_2B''_1)(x' - x'_1)(u' - u'_1) + (1 - A''_2B''_2)(x'' - x''_1)(u'' - u''_1)\\ &\quad - A'_2\,B''(x - x_1)(u' - u'_1) - A_2\,B''_1\,(u - u_1)(x' - x'_1)\\ &\quad - A''_2\,B''\,(x - x_1)(u'' - u''_1) - A_2\,B''_2\,(u - u_1)(x'' - x''_1)\\ &\quad - A''_2\,B''_1\,(x' - x'_1)(u'' - u''_1) - A'_2\,B''_2\,(u' - u'_1)(x'' - x''_1) = r_0^2\,,\end{aligned}$$

und diese lässt sich wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned}&(x - x_1)(u - u_1) + (x' - x'_1)(u' - u'_1) + (x'' - x''_1)(u'' - u''_1)\\ &-[A_2(u - u_1) + A'_2(u' - u'_1) + A''_2(u'' - u''_1)]\,[B''(x - x_1) + B''_1(x' - x'_1) + B''_2(x'' - x''_1)] = r_0^2\,.\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(90. b.)}$$

Dieser Gleichung, welche die vorgelegte Cylinderfläche an den Axen AX, AX', AX'' darstellt, kann man noch auf folgende Art eine zweckmässigere Gestalt geben. Da nämlich die Axen AY und AY' senkrecht auf der AY'' stehen, also das neu eingeführte System ein senkrechtes ist, so hat man den dafür (Abschn. I. §. 5.) aufgestellten Gleichungen (106. d.) gemäss:

$$B'' = D'' = C_2\,,\quad B''_1 = D''_1 = C'_2\,,\quad B''_2 = D''_2 = C''_2\,,$$

und da die Axe AY'' die Richtung der Cylinderaxe ist, deren Projectionszahlen an den Axen AX, AX', AX'' vorhin als durch a_0, a'_0, a''_0 und c_0, c'_0, c''_0 gegeben angenommen worden sind, so hat man

$$A_2 = a_0\,,\quad A'_2 = a'_0\,,\quad A''_2 = a''_0\quad \text{und}\quad B'' = c_0\,,\quad B''_1 = c'_0\,,\quad B''_2 = c''_0$$

zu setzen, wodurch die Gleichung (90. b.) die nachstehende Form annimmt:

$$\left.\begin{aligned}&(x - x_1)(u - u_1) + (x' - x'_1)(u' - u'_1) + (x'' - x''_1)(u'' - u''_1)\\ &-[a_0(u - u_1) + a'_0\,(u' - u'_1) + a''_0\,(u'' - u''_1)]\,[c_0\,(x - x_1) + c'_0\,(x' - x'_1) + c''_0\,(x'' - x''_1)] = r_0^2\,,\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(90. c.)}$$

und, weil der oben (Abschn. I. §. 2.) gegebenen Gleichung (18.) zur Folge

(90. d.) $a_0(u-u_1)+a_0'(u'-u_1')+a_0''(u''-u_1'')=c_0(x-x_1)+c_0'(x'-x_1')+c_0''(x''-x_1'')=r\cos\lambda$

ist, wenn r den Abstand irgend eines Punctes der Cylinderaxe von einem beliebigen Puncte der Cylinderfläche und λ den Winkel bezeichnet, den die von ersterm nach letzterm Puncte hinzielende Richtung mit der Richtung der Cylinderaxe bildet, auch noch auf jede der zwei folgenden Weisen sich schreiben lässt:

(90. e.)

$$\left\{\begin{aligned}&(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')+(x''-x_1'')(u''-u_1'')\\&\qquad-[a_0(u-u_1)+a_0'(u'-u_1')+a_0''(u''-u_1'')]^2=r_0^2\\&\text{und}\\&(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')+(x''-x_1'')(u''-u_1'')\\&\qquad-[c_0(x-x_1)+c_0'(x'-x_1')+c_0''(x''-x_1'')]^2=r_0^2.\end{aligned}\right.$$

Jede der Gleichungen (90. c.) und (90. e.) ist die Gleichung der vorgelegten Cylinderfläche, und alle drei lassen sich, wenn man erwägt, dass

(90. f.) $$(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')+(x''-x_1'')(u''-u_1'')=r^2$$

ist, auf die gemeinschaftliche Form:

$$r^2-r^2\cos^2\lambda=r_0^2 \quad\text{oder}\quad r\sin\lambda=r_0$$

bringen, welche besagt, dass alle Puncte der Umwälzungs-Cylinderfläche von der Axe dieser Fläche gleich weit abstehen. Umgekehrt lässt sich aus dieser Eigenschaft die Gleichung der Umwälzungs-Cylinderfläche höchst einfach ableiten. Wir haben blos deswegen bei der Aufsuchung dieser Gleichung den vorstehenden Gang eingeschlagen, um Gelegenheit zu erhalten, das Spiel der dem schiefwinkligen Coordinatensysteme eigenthümlichen mehrfachen Formen in einem Beispiele nachweisen zu können.

Bezeichnen nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen AX, AX′, AX″ von einem irgend wo im Raume liegenden Puncte O_1 und stellt ϱ dessen Abstand von irgend einem Puncte O der Umwälzungs-Cylinderfläche vor, dessen Coordinaten an den gleichen Axen x, x′, x″ und u, u′, u″ sind, so ist (Abschn. I. Gleich. 20.):

$$\varrho^2=(x-\mathfrak{x})(u-\mathfrak{u})+(x'-\mathfrak{x}')(u'-\mathfrak{u}')+(x''-\mathfrak{x}'')(u''-\mathfrak{u}'')$$

und zieht man von dieser Gleichung die (90. f.) ab, so erhält man:

$$\begin{aligned}\varrho^2-r^2=&(x-\mathfrak{x})(u-\mathfrak{u})+(x'-\mathfrak{x}')(u'-\mathfrak{u}')+(x''-\mathfrak{x}'')(u''-\mathfrak{u}'')\\&-[(x-x_1)(u-u_1)+(x'-x_1')(u'-u_1')+(x''-x_1'')(u''-u_1'')].\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist genau die, welche in voriger Nummer bei der Kegelfläche vor der (89. e.) erhalten worden ist, und lässt sich daher wie jene, wenn man wieder:

(90. g.) $$(x_1-\mathfrak{x})(u_1-\mathfrak{u})+(x_1'-\mathfrak{x}')(u_1'-\mathfrak{u}')+(x_1''-\mathfrak{x}'')(u_1''-\mathfrak{u}'')=R^2,$$

so wie

(90. h.)

$$\left\{\begin{aligned}&(x-x_1)(u_1-\mathfrak{u})+(x'-x_1')(u_1'-\mathfrak{u}')+(x''-x_1'')(u_1''-\mathfrak{u}'')=-rR\cos\theta\\&\text{und}\\&(x_1-\mathfrak{x})(u-u_1)+(x_1'-\mathfrak{x}')(u'-u_1')+(x_1''-\mathfrak{x}'')(u''-u_1'')=-rR\cos\theta\end{aligned}\right.$$

setzt, überführen in:

$$\varrho^2 = r^2 - 2\,r\,R\cos\theta + R^2. \qquad (90.\ i.)$$

Es bedeutet aber hier R der Gleichung (90. g.) gemäss die Entfernung des Punctes O_1 von einem beliebigen Puncte der Cylinderaxe, und θ nach Aussage der Gleichungen (90. h.) den Winkel, welchen die von diesem Puncte der Cylinderaxe nach den Puncten O_1 und O hinzielenden Richtungen mit einander bilden, und da die beiden Schenkel des Winkels θ, wenn sie mit der Cylinderaxe nicht in einer Ebene liegen, in Verbindung mit der Richtung dieser Cylinderaxe immer als die drei Axen eines beliebigen Coordinatensystems angesehen werden können, so ist den in Abschn. I. §. 2. gegebenen Gleichungen (38.) zur Folge, wenn λ und λ_1 die Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Cylinderaxe mit den beiden Schenkeln des Winkels θ bildet, θ_1 hingegen den Winkel, welchen die von der Cylinderaxe auslaufenden und durch die Puncte O_1 und O hindurch gehenden zwei Ebenen einschliessen, welcher Winkel stets der Nebenwinkel von dem ist, den die auf diesen zwei Ebenen senkrechten Polaraxen des hier so eben ins Auge gefassten Coordinatensystems mit einander bilden:

$$\sin\lambda\sin\lambda_1\cos\theta_1 = \cos\theta - \cos\lambda\cos\lambda_1,$$

welche Gleichung, wie man sogleich wahrnimmt, auch dann noch bestehen bleibt, wenn die drei Richtungen, welche zu ihr geführt haben, in eine und dieselbe Ebene fallen. Aus dieser Gleichung erhält man $\cos\theta$ in folgenden zwei Formen:

$$\cos\theta = \cos(\lambda - \lambda_1) - 2\sin\lambda\sin\lambda_1\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_1 \quad \text{und} \quad \cos\theta = \cos(\lambda + \lambda_1) + 2\sin\lambda\sin\lambda_1\cos^2\tfrac{1}{2}\theta;$$

durch diese Werthe von $\cos\theta$ aber nimmt die Gleichung (90. i.) die nachstehenden zwei Gestalten an:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho^2 = r^2 - 2\,r\,R\cos(\lambda - \lambda_1) + R^2 + 4\,r\,R\sin\lambda\sin\lambda_1\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_1 \\ \text{und}\quad &\varrho^2 = r^2 - 2\,r\,R\cos(\lambda + \lambda_1) + R^2 - 4\,r\,R\sin\lambda\sin\lambda_1\cos^2\tfrac{1}{2}\theta_1. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (90.\ k.)$$

Aus den Gleichungen (90. k.) lassen sich jetzt folgende Eigenschaften der Umwälzungs-Cylinderfläche ablesen: Fasst man bei einer bestimmten solchen Cylinderfläche blos solche Puncte von ihr ins Auge, welche in einer auf ihrer Axe senkrechten Ebene liegen, so liefern alle diese Puncte der Cylinderfläche für r und λ einerlei Werthe, und denkt man sich den Punct O_1 in einer völlig bestimmten Stellung zur Axe des Cylinders gegeben, so dass R und λ_1 stets den gleichen Werth behalten, so hat man sich die drei ersten, auf den rechten Seiten der Gleichungen (90. k.) stehenden Glieder als völlig unveränderliche Grössen vorzustellen; dann aber geht aus der Form dieser Gleichungen sogleich hervor, dass der Abstand ϱ des Punctes O_1 von den Puncten der Cylinderfläche, welche eine auf ihrer Axe senkrechte Ebene aus ihr ausschneidet, mit dem Winkel θ_1 stets zu- oder abnimmt; dieser Abstand wird am kleinsten, wenn $\theta_1 = 0$ ist, wo er durch die Gleichung

$$\varrho^2 = r^2 - 2\,r\,R\cos(\lambda - \lambda_1) + R^2$$

gegeben wird, und am grössten, wenn $\theta_1 = 180^\circ$ ist, wo er durch die Gleichung

$$\varrho^2 = r^2 - 2\,r\,R\cos(\lambda + \lambda_1) + R^2$$

gegeben wird, welches beides voraussetzt, dass der Punct O der Cylinderfläche in der Ebene liegt, die durch den Punct O_1 und durch die Cylinderaxe hindurch geht, ersteres noch überdiess, dass die Puncte O_1 und O auf einerlei Seite, letzteres, dass sie auf entgegengesetzten

36 *

Seiten von der Cylinderaxe liegen. Schreibt man die beiden vorstehenden Gleichungen so:

$$\varrho^2 = (R\sin\lambda_1 - r\sin\lambda)^2 + (R\cos\lambda_1 - r\cos\lambda)^2$$

und

$$\varrho^2 = (R\sin\lambda_1 + r\sin\lambda)^2 + (R\cos\lambda_1 - r\cos\lambda)^2,$$

so wird man gewahr, dass sie mit Zuziehung der vorhin aufgefundenen Eigenschaft der Umwälzungs-Cylinderfläche, der gemäss

$$r\sin\lambda = r_0$$

ist, folgende Gestalt annehmen:

$$\varrho^2 = (R\sin\lambda_1 - r_0)^2 + (R\cos\lambda_1 - r\cos\lambda)^2$$

und

$$\varrho^2 = (R\sin\lambda_1 + r_0)^2 + (R\cos\lambda_1 - r\cos\lambda)^2.$$

Denkt man sich jetzt die Grösse r veränderlich, d. h. lässt man den auf der Cylinderaxe senkrechten Schnitt längs dieser Axe fortrücken, wobei r_0 seinen Werth nicht ändert, so geben die letzten zwei Gleichungen auf den ersten Blick zu erkennen, dass die durch sie gegebenen Werthe ϱ gleichzeitig bei demjenigen Schnitte am kleinsten nämlich $\pm(R\sin\lambda_1 - r_0)$ und $R\sin\lambda_1 + r_0$ werden, bei welchem $R\cos\lambda_1 - r\cos\lambda = 0$ ist. Es folgt hieraus, dass unter allen Puncten der Umwälzungs-Cylinderfläche derjenige dem Puncte O_1 am nächsten ist, welcher in der durch O_1 gehenden, zur Cylinderaxe senkrechten, sie schneidenden Geraden liegt und dabei mit O_1 auf der nämlichen Seite der Cylinderaxe sich befindet.

143) Zur Darstellung einer krummen Fläche ist eine von den Gleichungen (83.), entweder die, welche schiefe, oder die, welche senkrechte Coordinaten in sich aufnimmt, allein hinreichend, und zuweilen ist es vortheilhaft, eine solche Gleichung durch eine andere zu ersetzen, in welcher zum Theil schiefe und zum Theil senkrechte Coordinaten auftreten, wie in den zunächst vorangegangenen Nummern geschehen ist. Man sieht hieraus, dass eine und dieselbe Fläche durch Gleichungen von sehr mannigfaltigen Formen gegeben werden kann; auch können gleichzeitig mehrere Gleichungen vorliegen, die sämmtlich eine und dieselbe Fläche darstellen, solche Gleichungen werden wir dann combinirte Gleichungen der einen Fläche nennen, und insbesondere werden wir unter dieser Benennung diejenigen zwei, eine und dieselbe Fläche darstellenden Gleichungen verstehen, von welchen die eine blos schiefe, die andere blos senkrechte Coordinaten in sich trägt. Zwischen den in combinirten Gleichungen auftretenden, auf die gleichen Puncte sich beziehenden schiefen und senkrechten Coordinaten x, x′, x″ und u, u′, u″ finden jene Relationen statt, welche im ersten Abschnitte durch die Gleichungen (15. a.) und (48. a.) ausgesprochen worden sind, und in Folgendem bestehen:

(91. a.)
$$\begin{cases} u = x + x'\cos W + x''\cos W', \quad u' = x\cos W + x' + x''\cos W'', \quad u'' = x\cos W' + x'\cos W'' + x'' \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}\,x = \mathfrak{A}u + \mathfrak{A}'u' + \mathfrak{A}''u'', \quad \mathfrak{E}_1'\,x' = \mathfrak{A}_1 u + \mathfrak{A}_1' u' + \mathfrak{A}_1'' u'', \quad \mathfrak{E}_2''\,x'' = \mathfrak{A}_2 u + \mathfrak{A}_2' u' + \mathfrak{A}_2'' u'', \end{cases}$$

welche keiner andern Bedingung unterworfen sind, als dass die schiefen und senkrechten Coordinaten x, x′, x″ und u, u′, u″ einem und demselben Puncte angehören. So wie die Relationen (91. a.) stets zwischen den in combinirten Gleichungen auftretenden, einem und demselben Puncte der Fläche angehörigen, beiderlei Coordinaten statt haben, so können sie auch dazu dienen, wenn nur eine Gleichung der Fläche vorliegt, aus dieser andere combinirte Gleichungen derselben Fläche abzuleiten; man hat zu diesem Ende nur in die eine gegebene Glei-

chung anstatt einer oder mehrerer der in ihr vorkommenden Coordinaten der einen Art ihre durch vorstehende Relationen gegebenen Ausdrücke in Coordinaten der andern Art zu setzen. Drückt man auf diese Weise alle senkrechten Coordinaten in schiefen aus, so stösst man auf eine Gleichung von der Form $\varphi_x = 0$, und drückt man alle schiefen in senkrechten aus, so stösst man auf eine Gleichung von der Form $\psi_u = 0$, und diese geht in jene oder jene in diese über, wenn man für u, u', u'' oder für x, x', x'' ihre durch die Gleichungen (91. a.) gegebenen Werthe einsetzt.

Da diesem nach zwischen den zwei combinirten Gleichungen von der Form $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$, wodurch eine Fläche dargestellt wird, alle jene Beziehungen obwalten, welche in der Einleitung zu diesem Abschnitte (§. 12. Nr. 120.) als zwischen den dortigen Gleichungen $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$ bestehend vorausgesetzt worden sind, so müssen alle dort erhaltenen Resultate auch hier noch ihre volle Gültigkeit behalten, wenn man in Folge der Besonderheit der Gleichungen (91. a.)

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3 \text{ durch } 0,\ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}},\ \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}},\ \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}},$$

$$\mu_0',\ \mu_1',\ \mu_2',\ \mu_3' \text{ durch } 0,\ \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'},\ \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'},\ \frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'},$$

$$\mu_0'',\ \mu_1'',\ \mu_2'',\ \mu_3'' \text{ durch } 0,\ \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''},\ \frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''},\ \frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''},$$

so wie

$$\nu_0,\ \nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3 \text{ durch } 0,\ 1,\ \cos W,\ \cos W',$$

$$\nu_0',\ \nu_1',\ \nu_2',\ \nu_3' \text{ durch } 0,\ \cos W,\ 1,\ \cos W'',$$

$$\nu_0'',\ \nu_1'',\ \nu_2'',\ \nu_3'' \text{ durch } 0,\ \cos W',\ \cos W'',\ 1,$$

ersetzt. Dadurch verwandeln sich die a. a. O. aufgestellten Gleichungen (26. a. und b.) in:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{C}\overset{10}{\delta}x = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}''\overset{10}{\partial}u'', \quad \mathfrak{C}_1'\overset{10}{\delta}x' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1''\overset{10}{\partial}u'', \quad \mathfrak{C}_2''\overset{10}{\delta}x'' = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2''\overset{10}{\partial}u'', \\ &\mathfrak{C}\overset{01}{\delta}x = \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}''\overset{01}{\partial}u'', \quad \mathfrak{C}_1'\overset{01}{\delta}x' = \mathfrak{A}_1' + \mathfrak{A}_1''\overset{01}{\partial}u'', \quad \mathfrak{C}_2''\overset{01}{\delta}x'' = \mathfrak{A}_2' + \mathfrak{A}_2''\overset{01}{\partial}u'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(91. b.)}$$

in welchen man alle Grössen als Functionen von u und u' anzusehen hat, und die (27. a. und b.) gehen über in:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{10}{\delta}u = 1 + \cos W'\overset{10}{\partial}x'', \quad \overset{10}{\delta}u' = \cos W + \cos W''\overset{10}{\partial}x'', \quad \overset{10}{\delta}u'' = \cos W' + \overset{10}{\partial}x'', \\ &\overset{01}{\delta}u = \cos W + \cos W'\overset{01}{\partial}x'', \quad \overset{01}{\delta}u' = 1 + \cos W''\overset{01}{\partial}x'', \quad \overset{01}{\delta}u'' = \cos W'' + \overset{01}{\partial}x'', \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad \textbf{(91. c.)}$$

worin alle Grössen als Functionen von x und x' aufzufassen sind. Ferner geben die a. a. O. mitgetheilten Gleichungen (30. a. und b.):

$$\left.\begin{aligned} &\overset{10}{\partial}x'' = \frac{-\cos W' + \overset{10}{\partial}u'' + \cos W\,\overset{01}{\partial}u''}{1 - \cos W'\overset{10}{\partial}u'' - \cos W''\overset{01}{\partial}u''}, \quad \overset{01}{\partial}x'' = \frac{-\cos W'' + \cos W\,\overset{10}{\partial}u'' + \overset{01}{\partial}u''}{1 - \cos W'\overset{10}{\partial}u'' - \cos W''\overset{01}{\partial}u''} \\ &\text{und} \\ &\overset{10}{\partial}u'' = \frac{-\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''} + \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\overset{01}{\partial}x'' + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}\overset{10}{\partial}x''}{\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''} - \frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}\overset{01}{\partial}x'' - \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}\overset{10}{\partial}x''}, \quad \overset{01}{\partial}u'' = \frac{-\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''} + \frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}\overset{01}{\partial}x'' + \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}\overset{10}{\partial}x''}{\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''} - \frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}\overset{01}{\partial}x'' - \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}\overset{10}{\partial}x''}, \end{aligned}\right\} \ldots \quad \textbf{(91. d.)}$$

und die dort aufgefundene Gleichung (34. a.) nimmt hier die nachfolgende Gestalt an:

(91. e.)
$$[1-\overset{10}{\partial}u''\cos W'-\overset{01}{\partial}u''\cos W'']\left[\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{E}''_2}-\overset{10}{\partial}x''\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}}-\overset{01}{\partial}x''\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}_1}\right]=1.$$

Alle diese und ihnen verwandte Gleichungen kann man auch geradezu aus denen (91. a.) herholen, indem man diese nach x und x' oder nach u und u' ableitet; wir haben sie nur deswegen aus den in §. 12. gegebenen hervorgehen lassen, um deren Stellung von den allgemeinsten Gesichtspuncten der Ableitungsrechnung aus wahrnehmbar zu machen, und so dem minder geübten Leser einen vollen Ueberblick des ganzen Gebietes zu verschaffen.

144) Die durch die Gleichungen (86.) dargestellten Ebenen gehen in eine und dieselbe Ebene über, wenn die Gleichungen (83.), aus denen sie hervorgegangen sind, einer und derselben krummen Fläche angehören, d. h. combinirte Gleichungen sind. In der That setzt man in jene Gleichungen für x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 ihre aus den Gleichungen (84.) entnommenen Werthe ein, wodurch sie werden:

(92. a.)
$$x''-\xi''=(x-\xi)\overset{10}{\partial}\xi''+(x'-\xi')\overset{01}{\partial}\xi'' \quad\text{und}\quad u''-\eta''=(u-\eta)\overset{10}{\partial}\eta''+(u'-\eta')\overset{01}{\partial}\eta'',$$

und beachtet man, dass den obern Gleichungen (91. d.) zur Folge an der in Nr. 139. hervorgehobenen Stelle O der Fläche, deren Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, die folgenden Relationen statt finden:

$$\overset{10}{\partial}\xi''=\frac{-\cos W'+\overset{10}{\partial}\eta''+\cos W\overset{01}{\partial}\eta''}{1-\cos W'\overset{10}{\partial}\eta''-\cos W''\overset{01}{\partial}\eta''} \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\xi''=\frac{-\cos W''+\cos W\overset{10}{\partial}\eta''+\overset{01}{\partial}\eta''}{1-\cos W'\overset{10}{\partial}\eta''-\cos W''\overset{01}{\partial}\eta''},$$

so nimmt die erste der Gleichungen (92. a.), wenn man in ihr für $\overset{10}{\partial}\xi''$ und $\overset{01}{\partial}\xi''$ deren hier gegebene Werthe setzt, die nachstehende Gestalt an:

$$\begin{aligned}x''-\xi''+(x'-\xi')\cos W''+(x-\xi)\cos W'&=[x-\xi+(x'-\xi')\cos W+(x''-\xi'')\cos W']\overset{10}{\partial}\eta''\\&\quad+[(x-\xi)\cos W+x'-\xi'+(x''-\xi'')\cos W'']\overset{01}{\partial}\eta'',\end{aligned}$$

und diese geht nun sogleich in die zweite der Gleichungen (92. a.) über, wenn man erwägt, dass die auf erster Zeile stehenden Gleichungen (91. a.) auf den Punct O angewandt geben:

$$\eta=\xi+\xi'\cos W+\xi''\cos W',\quad \eta'=\xi\cos W+\xi'+\xi''\cos W'',\quad \eta''=\xi\cos W'+\xi'\cos W''+\xi'',$$

also, wenn man diese mit denen verbindet, von welchen sie herstammen, zu erkennen geben, dass

$$\begin{aligned}u-\eta&=x-\xi+(x'-\xi')\cos W+(x''-\xi'')\cos W',\\u'-\eta'&=(x-\xi)\cos W+x'-\xi'+(x''-\xi'')\cos W'',\\u''-\eta''&=(x-\xi)\cos W'+(x'-\xi')\cos W''+x''-\xi''\end{aligned}$$

ist. Aehnlich lässt sich auch mit Zuziehung der auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (91. a.) die zweite der Gleichungen (92. a.) in die erste überführen, und jede dieser Ueberführungen liefert den Beweis, dass die Gleichungen (91. a.) eine und dieselbe Ebene darstellen, wenn die (83.) combinirte Gleichungen der Fläche sind.

Die durch eine der Gleichungen (86.) oder (92. a.) gegebene Ebene nennt man die Berührungsebene oder die Tangentialebene der durch die Gleichungen (83.) dargestellten krummen Fläche an dem Puncte O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η''

sind. Man kann den Gleichungen der Tangentialebene noch eine andere Gestalt geben, die zu kennen gut ist. Da nämlich den im §. 12. mitgetheilten Gleichungen (6. a.) zur Folge, wenn man sie auf den Punct O in Anwendung bringt,

$$\overset{10}{\partial}\xi'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial}\xi'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi}$$

ist in Gemässheit der Gleichung $\varphi_x = 0$, und eben so in Gemässheit der Gleichung $\psi_u = 0$

$$\overset{10}{\partial}\eta'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial}\eta'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta}.$$

ist, so verwandeln sich die Gleichungen (92. a.) dadurch, dass man in sie für $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$ und $\overset{10}{\partial}\eta''$, $\overset{01}{\partial}\eta''$ ihre hier gegebenen Werthe einsetzt, in:

$$\left.\begin{array}{l}(x''-\xi'')\overset{001}{\partial}\varphi_\xi + (x'-\xi')\overset{010}{\partial}\varphi_\xi + (x-\xi)\overset{100}{\partial}\varphi_\xi = 0 \\ \text{und} \\ (u''-\eta'')\overset{001}{\partial}\psi_\eta + (u'-\eta')\overset{010}{\partial}\psi_\eta + (u-\eta)\overset{100}{\partial}\psi_\eta = 0,\end{array}\right\} \quad \textbf{(92. b.)}$$

und zeigen so, wie die Gleichung der zu dem beliebigen Puncte O gehörigen Tangentialebene unmittelbar aus jeder der combinirten Gleichungen (83.) der Fläche gefunden werden kann.

145) Man kann die Gleichungen der Tangentialebene einer krummen Fläche auch auf eine Art aufsuchen, welche der analog ist, wie wir im vorigen Paragraphen (Nr. 127.) die Tangente einer ebenen Curve gefunden haben. Legt man nämlich durch den beliebig hervorgehobenen Punct O der Fläche, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten an den ursprünglichen Axen AX, AX′, AX″ ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, drei neue Axen OX, OX′, OX″, welche den vorigen parallel und gleichläufig sind, und bezeichnen x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten an den neuen Axen von irgend einem Puncte O′ der Fläche, der an den ursprünglichen Axen die x, x′, x″ und u, u′, u″ gab, so dass zwischen diesen Grössen die in Nr. 139. aufgestellten Gleichungen (84.) und (85. a. und b.) statt finden. Denkt man sich hierauf durch den hervorgehobenen Punct O eine erst später zu bestimmende Ebene gelegt, und bezeichnet man durch p, p′, p″ und 𝔭, 𝔭′, 𝔭″ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche eine von den zwei Richtungen der auf dieser Ebene normal stehenden Geraden an den Axen AX, AX′, AX″ oder an den diesen parallelen und gleichläufigen OX, OX′, OX″ giebt, so lassen sich folgende Beziehungen zwischen einer solchen Ebene und den Puncten der krummen Fläche feststellen.

Bezeichnet R den Abstand des beliebig in der krummen Fläche aufgefassten Punctes O′ von dem bestimmt in ihr hervorgehobenen O, so ist (Abschn. I. §. 2. Gleich. 17.):

$$R^2 = x_0 u_0 + x'_0 u'_0 + x''_0 u''_0. \quad \textbf{(93. a.)}$$

Fällt man von dem Puncte O′ auf die durch O gelegte, noch nicht weiter bestimmte Ebene ein Loth, wodurch diese Ebene im Puncte S geschnitten wird, und zieht man in der Ebene die Gerade OS, so bildet O′OS ein bei S rechtwinkliges Dreieck, in welchem OO′ die Länge R hat, und wir die Seiten O′S und OS durch *E* und *Π* bezeichnen wollen. Der spitze Winkel

O O′ S, den in diesem Dreiecke die Seiten O O′ und O′ S einschliessen, ist entweder der, den die von O nach O′ hinzielende Richtung mit der bildet, deren schiefe und senkrechte Projectionszahlen so eben durch p, p′, p″ und 𝔭, 𝔭′, 𝔭″ bezeichnet worden sind, welchen Winkel wir durch Θ vorstellen werden, oder es ist der Winkel O O′ S der Nebenwinkel von dem hier durch Θ vorgestellten; mithin ist in jedem Falle:

(93. b.) $$\mathrm{R}\sin\Theta = \Pi \quad \text{und} \quad E = \pm \mathrm{R}\cos\Theta,$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere oder untere zu nehmen ist, je nachdem Θ ein spitzer oder stumpfer Winkel ist, und es ist den im ersten Abschnitt §. 2. aufgestellten Gleichungen (13.) zur Folge, wenn man sie auf die neuen Axen O X, O X′, O X″ in Anwendung bringt:

(93. c.) $$\mathrm{R}\cos\Theta = \mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x'_0 + \mathfrak{p}''x''_0 = p\,u_0 + p'u'_0 + p''u''_0\,.$$

Setzt man in diese letzte Zeile für x''_0 und u''_0 ihre durch die Gleichungen (85. a. und b.) gegebenen Werthe, so findet man:

(93. d.) ……………………
$$\begin{cases} \mathrm{R}\cos\Theta = [\mathfrak{p} + \mathfrak{p}''\overset{10}{\partial}\xi'']\,x_0 + [\mathfrak{p}' + \mathfrak{p}''\overset{01}{\partial}\xi'']\,x'_0 \\ \qquad + \mathfrak{p}''\,[\overset{20}{\partial}\xi''\frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi''x_0x'_0 + \overset{02}{\partial}\xi'\frac{x_0'^2}{1.2}] + \ldots. \\ \text{und} \\ \mathrm{R}\cos\Theta = [p + p''\overset{10}{\partial}\eta'']\,u_0 + [p' + p''\overset{01}{\partial}\eta'']\,u'_0 \\ \qquad + p''[\overset{20}{\partial}\eta''\frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta''u_0u'_0 + \overset{02}{\partial}\eta''\frac{u_0'^2}{1.2}] + \ldots.; \end{cases}$$

ferner liefern die Gleichungen (85. a. und b.):

$$\begin{aligned} x''_0u''_0 = {} & [\overset{10}{\partial}\xi''x_0 + \overset{01}{\partial}\xi''x'_0]\,[\overset{10}{\partial}\eta''\,u_0 + \overset{01}{\partial}\eta''u'_0] \\ & + [\overset{10}{\partial}\xi''x_0 + \overset{01}{\partial}\xi''x'_0]\,[\overset{20}{\partial}\eta''\frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta''u_0u'_0 + \overset{02}{\partial}\eta''\frac{u_0'^2}{1.2}] \\ & + [\overset{10}{\partial}\eta''u_0 + \overset{01}{\partial}\eta''u'_0]\,[\overset{20}{\partial}\xi''\frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi''x_0x'_0 + \overset{02}{\partial}\xi''\frac{x_0'^2}{1.2}] + \ldots., \end{aligned}$$

und setzt man diesen Werth von $x''_0u''_0$ in die Gleichung (93. a.), so verwandelt sich dieselbe in:

(93. e.) ……………
$$\begin{cases} \mathrm{R}^2 = x_0u_0 + x'_0u'_0 + [\overset{10}{\partial}\xi''x_0 + \overset{01}{\partial}\xi''x'_0]\,[\overset{10}{\partial}\eta''u_0 + \overset{01}{\partial}\eta''u'_0] \\ \quad + [\overset{10}{\partial}\xi''x_0 + \overset{01}{\partial}\xi''x'_0]\,[\overset{20}{\partial}\eta''\frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta''u_0u'_0 + \overset{02}{\partial}\eta''\frac{u_0'^2}{1.2}] \\ \quad + [\overset{10}{\partial}\eta''u_0 + \overset{01}{\partial}\eta''u'_0]\,[\overset{20}{\partial}\xi''\frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi''x_0x'_0 + \overset{02}{\partial}\xi''\frac{x_0'^2}{1.2}] + \ldots. \end{cases}$$

Es stellt E oder $\pm\mathrm{R}\cos\Theta$ den senkrechten Abstand eines beliebigen Punctes O′ der krummen Fläche von der durch O gelegten Ebene vor; soll nun diese Ebene in grösster Nähe rings um den Punct O herum den Puncten der krummen Fläche möglichst nahe liegen, so ist damit nichts anderes gesagt, als dass $\mathrm{R}\cos\Theta$ für alle denkbaren in grösster Nähe bei O liegenden Puncte der krummen Fläche bei der so definirten Tangentialebene einen möglichst kleinen Werth annehmen muss. Da nun aber alle zunächst bei O liegende Puncte der krummen Fläche für x_0 und x'_0 oder für u_0 und u'_0 Werthe liefern, die kleiner sind, als dass sie sich durch endliche

und wirkliche Zahlen ausdrücken liessen, für solche Werthe von x_0, x'_0 oder u_0, u'_0 aber die Glieder der höhern Dimensionen in Bezug auf diese Grössen in den Reihen (93. d.) neben denen der niedern Dimensionen, wenn diese nicht völlig null sind, ganz und gar verschwinden, so überzeugt man sich, dass $R\cos\Theta$ für alle Puncte der krummen Fläche, welche in grösster Nähe rings um O herum liegen, möglichst kleine Werthe annehmen werde, wenn man es so einrichtet, dass so viele Glieder der niedrigsten Dimensionen in Bezug auf x_0 und x'_0 oder u_0 und u'_0 wie möglich in den Reihen (93. d.) strenge null werden. Diess giebt zuvörderst die Bedingung:

$$(\mathfrak{p}+\mathfrak{p}''\overset{10}{\partial}\xi'')x_0+(\mathfrak{p}'+\mathfrak{p}''\overset{01}{\partial}\xi'')x'_0=0$$

oder

$$(p+p''\overset{10}{\partial}\eta'')u_0+(p'+p''\overset{01}{\partial}\eta'')u'_0=0,$$

und da diese Bedingung für alle in möglichster Nähe rings um O herum liegende Puncte der krummen Fläche, d. h. für alle denkbaren Verhältnisse zwischen x_0 und x'_0 oder u_0 und u'_0 bestehen bleiben muss, so zerfällt sie in:

$$\mathfrak{p}+\mathfrak{p}''\overset{10}{\partial}\xi''=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}'+\mathfrak{p}''\overset{01}{\partial}\xi''=0$$

oder

$$p+p''\overset{10}{\partial}\eta''=0 \quad \text{und} \quad p'+p''\overset{01}{\partial}\eta''=0,$$

welche Bedingungspaare sich auch in die nachstehende Gestalt bringen lassen:

$$\mathfrak{p}'':\mathfrak{p}':\mathfrak{p}=1:-\overset{01}{\partial}\xi'':-\overset{10}{\partial}\xi'' \quad \text{oder} \quad p'':p':p=1:-\overset{01}{\partial}\eta'':-\overset{10}{\partial}\eta''. \qquad \textbf{(93. f.)}$$

Hierdurch werden nun die Verhältnisse der Projectionszahlen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ oder p, p', p'' zu einander, somit auch (Abschn. I. §. 2. Nr. 31.) die Richtung, auf welche dieselben sich beziehen, gänzlich bestimmt, und da diese Richtung normal zu der durch O gelegten Ebene steht, so ist durch die Bedingungen (93. f.) die durch O gelegte Ebene, welche sich zunächst an dieser Stelle am meisten an die Puncte der krummen Fläche anschmiegt, völlig gegeben; diese Bedingungen sind daher die einzigen, welche man der Tangentialebene der krummen Fläche an der Stelle O auferlegen kann; sie führen auch in der That geradezu wieder zu den Gleichungen (86.) hin.

Die Gleichung (93. e.) liefert R^2, in welcher Entfernung auch der Punct O′ von dem O genommen werden mag, und die Gleichungen (93. d.) geben, weil $R\cos\Theta=\pm E$ ist, den senkrechten Abstand dieses Punctes O′ von der durch O gelegten Ebene, wie auch diese Ebene sein mag; stellt man sich aber unter O′ blos möglichst nahe an O liegende Puncte vor, so hat man in jenen Reihen die Glieder der höhern Dimensionen in Bezug auf x_0 und x'_0 oder u_0 und u'_0 gegen die der niedern Dimensionen, wenn diese nicht völlig null sind, zu vernachlässigen, und stellt man sich unter der durch O gelegten Ebene blos die Tangentialebene der Fläche an der Stelle O vor, wo dann, den Bedingungen (93. f.) zur Folge, die Glieder der ersten Dimension in Bezug auf x_0 und x'_0 oder u_0 und u'_0 völlig null werden, so verwandeln sich die Gleichungen (93. e.) und (93. d.), wenn wir R_0 und E_0 an die Stelle von R und E setzen, um dadurch anzudeuten, dass man sich O′ möglichst nahe bei O liegend, und die durch O gelegte Ebene als Tangentialebene der Fläche zu denken habe, in:

$$
\text{(93. g.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
& R_0^2 = x_0 u_0 + x_0' u_0' + (\overset{10}{\partial}\xi'' x_0 + \overset{01}{\partial}\xi'' x_0')(\overset{10}{\partial}\eta'' u_0 + \overset{01}{\partial}\eta'' u_0') \\
& \text{und} \\
& \pm E_0 = \mathfrak{p}''\left(\overset{20}{\partial}\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi'' x_0 x_0' + \overset{02}{\partial}\xi'' \frac{x_0'^2}{1.2}\right) \\
& \text{oder} \\
& \pm E_0 = \mathfrak{p}''\left(\overset{20}{\partial}\eta'' \frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta'' u_0 u_0' + \overset{02}{\partial}\eta'' \frac{u_0'^2}{1.2}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

in welchen R_0 den Abstand eines möglichst nahe bei O liegenden Punctes O′ von dem O, E_0 aber den senkrechten Abstand des Punctes O′ von der Tangentialebene der krummen Fläche an der Stelle O bezeichnet.

146) Da Tangentialebenen für die Untersuchung der krummen Flächen von grosser Wichtigkeit sind, so wollen wir der Entdeckung ihrer Eigenschaften noch einige Aufmerksamkeit zuwenden. Die Tangentialebene einer durch combinirte Gleichungen von der in (83.) aufgeführten Form gegebenen krummen Fläche wird durch jede der Gleichungen (86.), nämlich:

$$
\text{(94. a.)} \quad x_0'' = \overset{10}{\partial}\xi'' x_0 + \overset{01}{\partial}\xi'' x_0' \quad \text{und} \quad u_0'' = \overset{10}{\partial}\eta'' u_0 + \overset{01}{\partial}\eta'' u_0'
$$

dargestellt, wenn x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' die schiefen und senkrechten, auf die neuen Axen OX, OX′, OX″ bezogenen Coordinaten ihrer Puncte bezeichnen, und die krumme Fläche selbst wird durch jede der in (85. a. und b.) enthaltenen Gleichungen an den gleichen Axen dargestellt, welche Gleichungen sich so schreiben lassen:

$$
\text{(94. b.)} \quad x_0'' = \overset{10}{\partial}\xi'' x_0 + \overset{01}{\partial}\xi'' x_0' + Z \quad \text{und} \quad u_0'' = \overset{10}{\partial}\eta'' u_0 + \overset{01}{\partial}\eta'' u_0' + \mathfrak{Z},
$$

wenn man zur Abkürzung

$$
\text{(94. c.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
& \left(\overset{20}{\partial}\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\xi'' x_0 x_0' + \overset{02}{\partial}\xi'' \frac{x_0'^2}{1.2}\right) + \ldots = Z \\
& \left(\overset{20}{\partial}\eta'' \frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\eta'' u_0 u_0' + \overset{02}{\partial}\eta'' \frac{u_0'^2}{1.2}\right) + \ldots = \mathfrak{Z}
\end{aligned}
\right.
$$

setzt, und es bezeichnen in diesen letzten Gleichungen x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' die auf die neuen Axen OX, OX′, OX″ bezogenen schiefen und senkrechten Coordinaten der zur krummen Fläche gehörigen Puncte. Fasst man nun in dieser krummen Fläche drei beliebige, aber bestimmt hervorgehobene Puncte O_1, O_2, O_3 ins Auge, welche ausserhalb des Punctes O und nicht in einer und derselben Geraden liegen, so sind die Gleichungen der durch die drei Puncte O_1, O_2, O_3 gelegten Ebene in schiefen und senkrechten Coordinaten ausgedrückt:

$$
\text{(94. d.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
0 = {} & [(x_3' - x_1')(x_2'' - x_1'') - (x_3'' - x_1'')(x_2' - x_1')](x_0 - x_1) \\
& - [(x_3 - x_1)(x_2'' - x_1'') - (x_3'' - x_1'')(x_2 - x_1)](x_0' - x_1') \\
& + [(x_3 - x_1)(x_2' - x_1') - (x_3' - x_1')(x_2 - x_1)](x_0'' - x_1'') \\
& \text{und} \\
0 = {} & [(u_3' - u_1')(u_2'' - u_1'') - (u_3'' - u_1'')(u_2' - u_1')](u_0 - u_1) \\
& - [(u_3 - u_1)(u_2'' - u_1'') - (u_3'' - u_1'')(u_2 - u_1)](u_0' - u_1') \\
& + [(u_3 - u_1)(u_2' - u_1') - (u_3' - u_1')(u_2 - u_1)](u_0'' - u_1'')
\end{aligned}
\right.
$$

der im ersten Abschnitt mitgetheilten Gleichung (100. d.) gemäss, wenn x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten von jedem Puncte dieser Ebene, so wie x_1, x'_1, x''_1; x_2, x'_2, x''_2; x_3, x'_3, x''_3 die schiefen und u_1, u'_1, u''_1; u_2, u'_2, u''_2; u_3, u'_3, u''_3 die senkrechten auf die neuen Axen bezogenen Coordinaten der Puncte O_1, O_2, O_3 bedeuten. Weil aber die Puncte O_1, O_2, O_3 in der durch die Gleichungen (94. b.) dargestellten krummen Fläche liegen, mithin die Coordinaten der drei Puncte für x_0, x'_0, x''_0 oder u_0, u'_0, u''_0 gesetzt diese Gleichungen befriedigen müssen, so geben diese der Reihe nach:

$$x''_1 = \overset{10}{\partial}\xi'' x_1 + \overset{01}{\partial}\xi'' x'_1 + Z_1 \quad \text{und} \quad u''_1 = \overset{10}{\partial}\eta'' u_1 + \overset{01}{\partial}\eta'' u'_1 + \mathfrak{Z}_1;$$

$$x''_2 = \overset{10}{\partial}\xi'' x_2 + \overset{01}{\partial}\xi'' x'_2 + Z_2 \quad \text{und} \quad u''_2 = \overset{10}{\partial}\eta'' u_2 + \overset{01}{\partial}\eta'' u'_2 + \mathfrak{Z}_2;$$

$$x''_3 = \overset{10}{\partial}\xi'' x_3 + \overset{01}{\partial}\xi'' x'_3 + Z_3 \quad \text{und} \quad u''_3 = \overset{10}{\partial}\eta'' u_3 + \overset{01}{\partial}\eta'' u'_3 + \mathfrak{Z}_3;$$

wo Z_1, Z_2, Z_3 und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ das bedeuten, was aus Z und $\mathfrak{Z}$ wird, wenn man in diesen x_1 und x'_1, x_2 und x'_2, x_3 und x'_3 an die Stelle von x_0 und x'_0, und u_1 und u'_1, u_2 und u'_2, u_3 und u'_3 an die Stelle von u_0 und u'_0 setzt; und hieraus folgt weiter:

$$x''_2 - x''_1 = \overset{10}{\partial}\xi''(x_2 - x_1) + \overset{01}{\partial}\xi''(x'_2 - x'_1) + Z_2 - Z_1,$$

$$x''_3 - x''_1 = \overset{10}{\partial}\xi''(x_3 - x_1) + \overset{01}{\partial}\xi''(x'_3 - x'_1) + Z_3 - Z_1,$$

und

$$u''_2 - u''_1 = \overset{10}{\partial}\eta''(u_2 - u_1) + \overset{01}{\partial}\eta''(u'_2 - u'_1) + \mathfrak{Z}_2 - \mathfrak{Z}_1,$$

$$u''_3 - u''_1 = \overset{10}{\partial}\eta''(u_3 - u_1) + \overset{01}{\partial}\eta''(u'_3 - u'_1) + \mathfrak{Z}_3 - \mathfrak{Z}_1,$$

Setzt man die hier für $x''_2 - x''_1$, $x''_3 - x''_1$ und $u''_2 - u''_1$ und $u''_3 - u''_1$ erhaltenen Werthe in die Gleichungen (94. d.) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} x''_0 - x''_1 = (x_0 - x_1)\left[\overset{10}{\partial}\xi'' + \frac{(x'_2 - x'_1)Z_3 - (x'_3 - x'_1)Z_2 + (x'_3 - x'_2)Z_1}{(x'_2 - x'_1)x_3 - (x'_3 - x'_1)x_2 + (x'_3 - x'_2)x_1}\right] \\ + (x'_0 - x'_1)\left[\overset{01}{\partial}\xi'' + \frac{(x_2 - x_1)Z_3 - (x_3 - x_1)Z_2 + (x_3 - x_2)Z_1}{(x_2 - x_1)x'_3 - (x_3 - x_1)x'_2 + (x_3 - x_2)x'_1}\right], \\ \text{und} \qquad\qquad \\ u''_0 - u''_1 = (u_0 - u_1)\left[\overset{10}{\partial}\eta'' + \frac{(u'_2 - u'_1)\mathfrak{Z}_3 - (u'_3 - u'_1)\mathfrak{Z}_2 + (u'_3 - u'_2)\mathfrak{Z}_1}{(u'_2 - u'_1)u_3 - (u'_3 - u'_1)u_2 + (u'_3 - u'_2)u_1}\right] \\ + (u'_0 - u'_1)\left[\overset{01}{\partial}\eta'' + \frac{(u_2 - u_1)\mathfrak{Z}_3 - (u_3 - u_1)\mathfrak{Z}_2 + (u_3 - u_2)\mathfrak{Z}_1}{(u_2 - u_1)u'_3 - (u_3 - u_1)u'_2 + (u_3 - u_2)u'_1}\right]. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(94. e.)}$$

Jede der zwei letzten Gleichungen stellt die durch die drei Puncte O_1, O_2, O_3 gelegte Ebene dar, wo immer auch diese Puncte auf der krummen Fläche liegen mögen; denkt man sich nun diese drei Puncte sämmtlich in grösster Nähe bei dem O liegend, so dass x_1, x'_1, x''_1; x_2, x'_2, x''_2; x_3, x'_3, x''_3 und u_1, u'_1, u''_1; u_2, u'_2, u''_2; u_3, u'_3, u''_3 kleiner als jede noch so kleine angebbare Grösse werden, so verschwinden in den Ausdrücken Z_1, Z_2, Z_3 und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ alle Glieder von einer höhern Dimension in Bezug auf diese unendlich kleinen Coordinatenwerthe in Vergleich zu solchen, die von einer niedern Dimension sind, vorausgesetzt, dass diese letztern nicht völlig null sind. Ist daher der erste Theil in Z_1 oder Z_2 oder Z_3 und in $\mathfrak{Z}_1$ oder $\mathfrak{Z}_2$ oder $\mathfrak{Z}_3$ nicht völlig null, so giebt dieser erste Theil allein, welcher von der zweiten Dimension in Bezug

37 *

auf die unendlich kleinen Coordinatenwerthe ist, den Werth des ganzen Ausdrucks her; ist aber dieser erste Theil strenge null, so giebt der erste in den genannten Ausdrücken vorhandene Theil, welcher dann von einer höhern als der zweiten Dimension ist, den Werth der ganzen Ausdrücke her. Hieraus folgt, dass jeder von den Ausdrücken Z_1, Z_2, Z_3 und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ einen Werth annimmt, der in Bezug auf die unendlich kleinen Grössen, deren Grundzeichen x_1, x_2, x_3 oder u_1, u_2, u_3 ist, entweder von der zweiten oder von einer noch höhern Dimension ist, weshalb die in den eckigen Klammern der Gleichungen (94. e.) neben $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$ und $\overset{10}{\partial}\eta''$, $\overset{01}{\partial}\eta''$ stehenden Quotienten in Bezug auf dieselben Grössen entweder von der ersten oder von einer höhern Dimension sind, sonach neben $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$ oder $\overset{10}{\partial}\eta''$, $\overset{01}{\partial}\eta''$ ganz und gar verschwinden, wenn letztere irgend angebbare Werthe haben. Aus diesem Grunde werden die Gleichungen (94. e.) bei drei solchen zunächst an O liegenden Puncten:

(94. f.) $$x_0'' - x_1'' = (x_0 - x_1)\overset{10}{\partial}\xi'' + (x_0' - x_1')\overset{01}{\partial}\xi'' \quad \text{und} \quad u_0'' - u_1'' = (u_0 - u_1)\overset{10}{\partial}\eta'' + (u_0' - u_1')\overset{01}{\partial}\eta'',$$

und geben durch ihre Form zu erkennen (Ab. II. §. 10. Nr. 91.), dass die durch drei zunächst bei O befindliche Puncte gelegte Ebene mit der Tangentialebene der krummen Fläche an der Stelle O parallel laufe. Sogar wenn $\overset{10}{\partial}\xi''$ und $\overset{01}{\partial}\xi''$ oder $\overset{10}{\partial}\eta''$ und $\overset{01}{\partial}\eta''$ gleichzeitig null würden, bliebe die so eben gezogene Folgerung doch noch gültig, weil dann jedenfalls $x_0'' - x_1''$ oder $u_0'' - u_1''$ unvergleichlich kleiner als $x_0 - x_1$ und $x_0' - x_1'$ oder $u_0 - u_1$ und $u_0' - u_1'$ würde, was allein schon nach sich zieht, dass die beiden genannten Ebenen keinen Winkel von angebbarer Grösse mit einander machen können.

Aus dem Umstande, dass jede durch drei möglichst nahe an O liegende Puncte hindurch gehende Ebene mit der Tangentialebene an dieser Stelle parallel läuft, dass also die krumme Fläche dicht um O herum keine merklichen Ein- und Ausbiegungen hat, in Verbindung mit der aus den Gleichungen (93. g.) zu schöpfenden Einsicht, dass die Abstände aller so nahe bei O liegender Puncte von der zu dieser Stelle gehörigen Tangentialebene unvergleichlich kleiner als deren Abstände von dem Puncte O sind, lassen sich nun mit grösster Leichtigkeit und Strenge die folgenden zwei Eigenschaften der Tangentialebenen herleiten:

a) Wird durch Ebenen, die mit einer Geraden parallel laufen oder in einem Puncte sich schneiden, und die mit der Tangentialebene lauter endliche Winkel bilden, ein Stück sowohl von der zu O gehörigen Tangentialebene als von der krummen Fläche selber so abgeschnitten, dass die Puncte dieser zwei Stücke sämmtlich möglichst nahe an dem O liegen, so unterscheiden sich die Flächengrössen dieser beiden Stücke unter sich nicht um eine Grösse, die mit diesen Flächengrössen selbst vergleichbar wäre;

b) werden die eben gedachten mit einer Geraden parallelen, oder in einem Puncte zusammen laufenden Ebenen von einer neuen Ebene sämmtlich durchschnitten, und liegen alle Puncte dieser letztern Ebene in endlicher Entfernung von dem O, so unterscheiden sich die beiden Körperräume, welche einerseits durch diese Ebenen und andererseits durch die Tangentialebene und durch die krumme Fläche begrenzt werden, unter sich nicht um eine Grösse, die mit diesen Körperräumen selbst vergleichbar wäre.

Zu den vorstehenden Eigenschaften der Tangentialebenen fügen wir noch die folgenden hinzu: Läuft an einem gewissen Puncte O der krummen Fläche die Tangentialebene parallel

mit einer der Grund-Coordinatenebenen, z. B. mit der XAX', so nimmt die schiefe Coordinaten in sich aufnehmende Gleichung dieser Tangentialebene die Form

$$x''-\xi''=0 \tag{95. a.}$$

an, welche Gleichung für alle Puncte der Tangentialebene Gültigkeit behält; die senkrechte Coordinaten in sich aufnehmende Gleichung der Tangentialebene aber wird unter solchen Umständen (Abschn. I. §. 2. Gleich. 48. c.):

$$(u-\eta)\,\mathfrak{A}_2+(u'-\eta')\,\mathfrak{A}'_2+(u''-\eta'')\,\mathfrak{A}''_2=0 \tag{95. b.}$$

und ist ebenfalls für alle Puncte der Tangentialebene gültig. Bringt man diese Gleichungen mit denen (92. a.) in Verbindung, wodurch die Tangentialebene unter allen Umständen dargestellt wird, so gewinnt man die Ueberzeugung, dass in dem vorliegenden besondern Falle, d. h. wenn die Grund-Coordinatenebene XAX' der Tangentialebene parallel läuft, sein müsse:

$$\overset{10}{\partial}\xi''=0 \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\xi''=0 \tag{95. c.}$$

sowohl, als auch

$$\overset{10}{\partial}\eta''=-\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}''_2} \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\eta''=-\frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{A}''_2}, \tag{95. d.}$$

und die Werthe von $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$, $\mathfrak{A}''_2$ führen zu der Einsicht, dass die letzten beiden Gleichungen nur in dem einen Falle in

$$\overset{10}{\partial}\eta''=0 \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\eta''=0 \tag{95. e.}$$

übergehen können, wenn W' und W'' rechte Winkel sind, d. h. wenn die Axe AX'' mit den beiden andern AX und AX' ein senkrechtes Coordinatensystem bildet. Läuft hingegen z. B. die Polar-Coordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallel mit der Tangentialebene der krummen Fläche an einem gewissen Puncte O, so würde die Gleichung der Tangentialebene, welche senkrechte Coordinaten in sich aufnimmt, werden:

$$u''-\eta''=0; \tag{96. a.}$$

die aber, welche schiefe Coordinaten enthält, würde unter solchen Umständen (Abschn. I. §. 2. Gl. 15. b.):

$$(x-\xi)\cos W'+(x'-\xi')\cos W''+x''-\xi''=0, \tag{96. b.}$$

und beide sind für alle Puncte der Tangentialebene gültig. Vergleicht man diese beiden Gleichungen mit denen (92. a.), wodurch die Tangentialebene unter allen Umständen dargestellt wird, so gewinnt man die Ueberzeugung, dass im vorliegenden Falle, d. h. wenn die Polar-Coordinatenebene mit der Tangentialebene an O parallel läuft, sein müsse:

$$\overset{10}{\partial}\eta''=0 \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\eta''=0 \tag{96. c.}$$

sowohl, als auch:

$$\overset{10}{\partial}\xi''=-\cos W' \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\xi''=-\cos W'', \tag{96. d.}$$

und man sieht, dass die letzten beiden Gleichungen nur dann in

$$\overset{10}{\partial}\xi''=0 \quad\text{und}\quad \overset{01}{\partial}\xi''=0 \tag{96. e.}$$

übergehen können, wenn W' und W'' rechte Winkel sind, d. h. wenn die Axe AX'' mit den beiden andern AX und AX' ein senkrechtes Coordinatensystem bildet.

147) Man nennt die Gerade, welche senkrecht auf der zu einem Puncte O gehörigen Tangentialebene einer krummen Fläche steht und durch O hindurch geht, die **Normale der krummen Fläche an der Stelle O.** Aus den in Nr. 145. angestellten Betrachtungen geht unmittelbar hervor, dass die Lage der Normale an dem Puncte O der krummen Fläche, durch die Gleichungen (93. f.), nämlich:

(97. a.) $$\mathfrak{p}'' : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p} = 1 : -\overset{01}{\partial}\xi'' : -\overset{10}{\partial}\xi'' \quad \text{oder} \quad p'' : p' : p = 1 : -\overset{01}{\partial}\eta'' : -\overset{10}{\partial}\eta''$$

gegeben werde, wenn $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die senkrechten, p, p′, p″ dagegen die schiefen Projectionszahlen vorstellen, welche die Richtung der fraglichen Normale an den Axen AX, AX′, AX″ des ursprünglichen Systems oder auch an denen OX, OX′, OX″, welche mit jenen parallel und gleichläufig sind, giebt.

Da den in §. 12. Nr. 112. erhaltenen Gleichungen (6. a.) gemäss

$$\overset{10}{\partial} x'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} x'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}$$

ist, wenn man sich x″ als die durch die Gleichung $\varphi_x = 0$ gegebene Function von x und x′ vorstellt, und man aus demselben Grunde auch

$$\overset{10}{\partial} u'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u} \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial} u'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u}$$

hat, wenn man sich unter u″ die aus der Gleichung $\psi_u = 0$ herzuholende Function von u und u′ denkt, so ist auch, wenn man diese Gleichungen auf den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, in Anwendung bringt:

$$\overset{10}{\partial}\xi'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi}, \quad \overset{01}{\partial}\xi'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi} \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}\eta'' = -\frac{\overset{100}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta}, \quad \overset{01}{\partial}\eta'' = -\frac{\overset{010}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta},$$

und durch diese Werthe von $\overset{10}{\partial}\xi''$, $\overset{01}{\partial}\xi''$ und $\overset{10}{\partial}\eta''$, $\overset{01}{\partial}\eta''$ verwandeln sich die Gleichungen (97. a.) in:

(97. b.) $$\mathfrak{p}'' : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p} = \overset{001}{\partial}\varphi_\xi : \overset{010}{\partial}\varphi_\xi : \overset{100}{\partial}\varphi_\xi \quad \text{und} \quad p'' : p' : p = \overset{001}{\partial}\psi_\eta : \overset{010}{\partial}\psi_\eta : \overset{100}{\partial}\psi_\eta,$$

welche in den Stand setzen, die Richtung der Normale einer krummen Fläche an irgend einem hervorgehobenen Punct O unmittelbar aus der Gleichung, wodurch die Fläche gegeben wird, herzuholen.

Wir haben im zweiten Abschnitte (§. 11. Nr. 94.) gezeigt, dass sich das eine Gerade darstellende Gleichungspaar immer in einer der dort (22. a.) und (22. b.) angegebenen Formen aufstellen lässt, und in der darauf folgenden Nummer ist daselbst nachgewiesen worden, dass die in jenen Formen auftretenden Coefficienten p, p′, p″ oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ immer durch drei solche Zahlen vertreten werden können, von denen man weiss, dass sie den schiefen oder senkrechten Projectionszahlen der Richtung proportional sind, welche der durch die Gleichungen darzustellenden Geraden angehört. Da nun nach Aussage der vorstehenden Gleichungen (97. a. und b.) die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen der Normale einer durch die Gleichung $\varphi_x = 0$ oder $\psi_u = 0$ gegebenen krummen Fläche an der Stelle O, deren Coordinaten

ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' sind, sich verhalten wie die Zahlen $-\overset{10}{\partial}\eta''$, $-\overset{01}{\partial}\eta''$, 1 oder $-\overset{10}{\partial}\xi''$, $-\overset{01}{\partial}\xi''$, 1, und auch wie die Zahlen $\overset{100}{\partial}\psi_\eta$, $\overset{010}{\partial}\psi_\eta$, $\overset{001}{\partial}\psi_\eta$ oder $\overset{100}{\partial}\varphi_\xi$, $\overset{010}{\partial}\varphi_\xi$, $\overset{001}{\partial}\varphi_\xi$, so erhält man aus jeder der genannten Formen ein diese Normale darstellendes Gleichungspaar, wenn man in jene Formen ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' für x_1, x'_1, x''_1 oder u_1, u'_1, u''_1, und $-\overset{10}{\partial}\eta''$, $-\overset{01}{\partial}\eta''$, 1 oder $\overset{100}{\partial}\psi_\eta$, $\overset{010}{\partial}\psi_\eta$, $\overset{001}{\partial}\psi_\eta$ für p, p', p'', so wie $-\overset{10}{\partial}\xi''$, $-\overset{01}{\partial}\xi''$, 1 oder $\overset{100}{\partial}\varphi_\xi$, $\overset{010}{\partial}\varphi_\xi$, $\overset{001}{\partial}\varphi_\xi$ für $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ einsetzt. Auf diese Weise kann man, wo es gewünscht wird, das die Normale darstellende Gleichungspaar in schiefen sowohl, wie in senkrechten Coordinaten von jeder der drei besondern Formen aufstellen, die im zweiten Abschnitte, da wo die Gerade im Raume betrachtet worden ist, ausführlich besprochen worden sind.

148) Da die Krümmung einer Fläche an einem beliebig in ihr hervorgehobenen Puncte O nach verschiedenen Richtungen hin aufgefasst eine sehr verschiedene sein kann, so springt in die Augen, dass weder eine Kreis- noch eine Kugelkrümmung im Allgemeinen die Krümmung einer Fläche an einer ihrer Stellen anzuzeigen im Stande ist; wohl aber lässt sich die Krümmung der ebenen Curve, in welcher die Fläche von einer nach Belieben durch den Punct O gelegten Ebene geschnitten wird, an der Stelle O durch eine Kreiskrümmung angeben, und man wird so zu einer vollständigen Erkenntniss der Natur der Krümmung der Fläche hingeführt werden, wenn man an jeder ihrer Stellen alle die Krümmungen aufzufinden im Stande ist, welche hier den ebenen Curven zukommen, in denen die Fläche an der betrachteten Stelle durch irgend Ebenen geschnitten werden mag. Wie diess geschehen kann, soll nun gezeigt werden.

Stellt

$$\mathfrak{q}(x-\xi)+\mathfrak{q}'(x'-\xi')+\mathfrak{q}''(x''-\xi'')=0 \quad \text{oder} \quad q(u-\eta)+q'(u'-\eta')+q''(u''-\eta'')=0 \tag{98. a.}$$

die in schiefen oder senkrechten auf die Axen AX, AX′, AX″ eines beliebigen Coordinatensystems bezogenen Coordinaten ausgedrückte Gleichung einer beliebigen durch den hervorgehobenen Punct O der Fläche, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, gelegten Ebene vor, und denkt man sich durch diesen Punct drei neue, den vorigen parallele und gleichläufige Axen OX, OX′, OX″ gelegt, so hat man, wenn x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die auf diese drei neuen Axen bezogenen schiefen und senkrechten Coordinaten von einem irgendwo im Raume gelegenen Puncte bezeichnen, dessen Coordinaten an den ursprünglichen Axen durch x, x', x'' und u, u', u'' vorgestellt werden, den oben (Abschn. I. §. 2.) gegebenen Gleichungen (7.) gemäss:

$$x=\xi+x_0, \quad x'=\xi'+x'_0, \quad x''=\xi''+x''_0 \quad \text{und} \quad u=\eta+u_0, \quad u'=\eta'+u'_0, \quad u''=\eta''+u''_0, \tag{98. b.}$$

wobei es gleichgültig ist, ob der Punct im Raume der durch die Gleichungen (98. a.) dargestellten Ebene oder der zu untersuchenden Fläche angehört, welche wir uns durch eine Gleichung von der Form

$$\varphi_x=0 \quad \text{oder} \quad \psi_u=0 \tag{98. c.}$$

gegeben vorstellen. Die ebene Curve, welche aus der krummen Fläche (98. c.) von der Ebene (98. a.) herausgeschnitten wird, enthält alle die Puncte in sich, deren Coordinaten gleichzeitig den beiden ersten oder letzten Gleichungen (98. a.) und (98. c.) genügen. Da hierdurch entweder die schiefen oder die senkrechten Coordinaten der Puncte, welche zu dieser ebenen

Curve gehören, von zwei Gleichungen abhängig gemacht werden, so hat man sich zwei von diesen Coordinaten als Functionen der dritten zu denken; es finden also zwischen ihnen die Beziehungen statt, welche in §. 12. dieses Abschnitts (Nr. 113. und Nr. 115.) besprochen worden sind. Namentlich geben die dortigen Gleichungen (9. c.) in Bezug auf die schiefen Coordinaten solcher Puncte

(98. d.)
$$\left\{\begin{array}{l} x'_0 = \partial\xi' x_0 + \partial^2\xi' \frac{x_0^2}{1.2} + \ldots \quad \text{und} \quad x''_0 = \partial\xi'' x_0 + \partial^2\xi'' \frac{x_0^2}{1.2} + \ldots \\ \text{und in Bezug auf deren senkrechte Coordinaten:} \\ u'_0 = \partial\eta' u_0 + \partial^2\eta' \frac{u_0^2}{1.2} + \ldots \quad \text{und} \quad u''_0 = \partial\eta'' u_2 + \partial^2\eta'' \frac{u_0^2}{1.2} + \ldots \end{array}\right.$$

Denkt man sich den Punct O′ der ebenen Curve, dessen Coordinaten an den neuen Axen durch x_0, x'_0, x''_0 oder u_0, u'_0, u''_0 vorgestellt werden, dem O so nahe rückend, dass sich der Abstand zwischen beiden durch kein endliches Maas mehr angeben lässt, so verschwinden die auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichungen befindlichen Glieder, welche höhere Potenzen von x_0 oder u_0 in sich enthalten, gegen solche, die niedrigere Potenzen derselben Grössen in sich tragen, wenn diese nicht völlig null sind, ganz und gar, weshalb die vorstehenden Gleichungen für alle solche in grösster Nähe bei dem O liegende Puncte O′ übergehen in:

(98. e.) $$x'_0 = \partial\xi' x_0\,, \quad x''_0 = \partial\xi'' x_0 \quad \text{und} \quad u'_0 = \partial\eta' u_0\,, \quad u''_0 = \partial\eta'' u_0\,,$$

welche Gleichungen einer Geraden angehören, die zunächst am Puncte O an die ebene Curve sich möglichst genau anschmiegt, und also die Tangente dieser Curve an der Stelle O ist.

Dass diese Gerade die Tangente der ebenen Curve sei, geht zwar schon daraus hervor, weil wir oben gezeigt haben, dass eine Gerade, die nicht in der Ebene der ebenen Curve liegt, sich auch nicht möglichst genau an eine bestimmte Stelle der Curve anschmiegen könne. Es lässt sich indessen noch zum Ueberflusse hier wieder speciell darthun, dass die Gerade (98. e.) in der durch die Gleichungen (98. a.) gegebenen Ebene liege, womit dann alles Bedenken, ob sie auch wirklich die Tangente sei, in sich selbst zerfällt. Schreibt man nämlich die Gleichungen (98. e.) mit Zuziehung derer (98. b.) so:

$$x' - \xi' = \partial\xi'(x - \xi)\,, \quad x'' - \xi'' = \partial\xi''(x - \xi) \quad \text{und} \quad u' - \eta' = \partial\eta'(u - \eta)\,, \quad u'' - \eta'' = \partial\eta''(u - \eta)\,,$$

und setzt die hier für $x' - \xi'$, $x'' - \xi''$ und $u' - \eta'$, $u'' - \eta''$ erhaltenen Werthe in die Gleichungen (98. a.), so werden diese nach Wegwerfung des allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen Factors $x - \xi$ oder $u - \eta$:

$$\mathfrak{p} + \partial\xi'\mathfrak{p}' + \partial\xi''\mathfrak{p}'' = 0 \quad \text{und} \quad p + \partial\eta' p' + \partial\eta'' p'' = 0\,,$$

und dass diesen Bedingungen in der That ein Genüge geschieht, welchen Punct der Fläche man auch zu dem O genommen haben mag, geht aus den in §. 12. Nr. 113. stehenden Gleichungen (7. a.) geradezu hervor, welche zeigen, dass man an jeder Stelle der ebenen Curve

$$\mathfrak{p} + \partial x'\mathfrak{p}' + \partial x''\mathfrak{p}'' = 0 \quad \text{und} \quad p + \partial u' p' + \partial u'' p'' = 0$$

hat, wie man sogleich einsieht, wenn man einmal die in der vordern, ein andermal die in der hintern Gleichung (98. a.) stehende linke Seite als den Ausdruck sich denkt, welcher a. o. a. O. durch φ_x oder Φ_x bezeichnet worden ist, und im letztern Falle die Veränderlichen x, x′, x″ durch u, u′, u″ ersetzt.

Nachdem wir so die Gewissheit erlangt haben, dass die durch die Gleichungen (98. e.) dargestellte Gerade in der Ebene liegt, durch welche die Curve aus der krummen Fläche herausgeschnitten worden ist, und Tangente dieser ebenen Curve an der Stelle O ist, schreiten wir jetzt zur Bestimmung des Krümmungshalbmessers dieser ebenen Curve an der Stelle O. Zu diesem Zwecke denken wir uns durch die Spitze A des ursprünglichen Coordinatensystems drei neue Axen AZ, AZ', AZ'' gelegt, von denen die eine AZ parallel mit der Tangente der ebenen Curve an dem Puncte O, die andere AZ' parallel mit der Ebene dieser Curve läuft und mit der AZ einen rechten Winkel bildet, also parallel zur Normale der ebenen Curve am Puncte O ist, die dritte AZ'' endlich auf der Ebene der Curve senkrecht steht und daher mit jeder der beiden vorigen einen rechten Winkel bildet, so dass das aus den Axen AZ, AZ', AZ'' zusammengesetzte Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist. Bezeichnen wir durch z, z', z'' die auf diese Axen bezogenen Coordinaten von irgend einem Puncte der ebenen Curve, durch ζ, ζ', ζ'' die des Punctes O, so ist in Bezug auf alle Puncte der ebenen Curve $z''=\zeta''$, weil die Ebene der Curve mit der Coordinatenebene ZAZ' parallel läuft; daher wird die ebene Curve dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$F_z=0 \quad \text{und} \quad z''=\zeta'', \qquad \textbf{(99. a.)}$$

welche aus denen (98. a.) und (98. c.) dadurch hervorgehen müssen, dass man in diese für x, x', x'' oder u, u', u'' ihre Ausdrücke in z, z', z'' und zugleich für ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' ihre Werthe in ζ, ζ', ζ'' einsetzt, so wie umgekehrt aus denen (99. a.) wieder die (98. a.) und (98. c.) gefunden werden können, wenn in erstere für z, z', z'' ihre Ausdrücke in x, x', x'' oder u, u', u'' und zugleich für ζ, ζ', ζ'' ihre Werthe in ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' gesetzt werden. Legt man in der Gleichung $F_z=0$ der Coordinate z'' ihren durch die zweite Gleichung (99. a.) gegebenen constanten Werth ζ'' bei, so enthält dann F_z nur noch die beiden veränderlichen Coordinaten z und z' in sich; desshalb stellt sodann die Gleichung $F_z=0$, für sich betrachtet, den in Nr. 139. des gegenwärtigen Paragraphen gegebenen Erläuterungen zur Folge, eine Cylinderfläche dar, deren Seiten senkrecht auf der Coordinatenebene ZAZ' stehen, und die von uns betrachtete ebene Curve wird aus dieser Cylinderfläche durch eine Ebene herausgeschnitten, die in der Entfernung ζ'' mit der Coordinatenebene ZAZ' parallel läuft. Daher ist der Durchschnitt, den diese Coordinatenebene in der Cylinderfläche hervorruft, eine Curve, welche der von uns betrachteten ebenen Curve congruent ist, und es entsprechen einerlei Werthe von z und z' gleichliegenden Puncten in den beiden Curven, so dass die Krümmung des von der Coordinatenebene ZAZ' in die Cylinderfläche gemachten Schnittes an der Stelle, wo $z=\zeta$, $z'=\zeta'$ und $z''=0$ ist, die gleiche ist, wie die an der Stelle O in der von uns betrachteten ebenen Curve, wo $z=\zeta$, $z'=\zeta'$, $z''=\zeta''$ ist. Da nun die Axen AZ, AZ', AZ'' ein rechtwinkliges Coordinatensystem bilden und desshalb die Axen AZ und AZ' in Bezug auf den von der Ebene ZAZ' gemachten Schnitt ein ebenes Coordinatensystem, so ist, wenn ϱ die Länge des Krümmungshalbmessers an der Stelle dieses Schnittes vorstellt, wo $z=\zeta$ und $z'=\zeta'$ ist, der in §. 13. dieses Abschnitts aufgestellten Gleichung (72. b.) gemäss, weil die Axe AZ mit der Tangente der ebenen Curve an O, sonach auch mit der gleichliegenden des durch die Ebene ZAZ' in die Cylinderfläche gemachten Schnittes an der Stelle, wo $z=\zeta$ und $z'=\zeta'$ ist, parallel läuft:

$$\pm\frac{1}{\varrho}=\partial^2\zeta', \qquad \textbf{(99. b.)}$$

wenn ζ' als Function von ζ angesehen wird, und diese Gleichung giebt durch ϱ zugleich auch den Krümmungshalbmesser der aus der krummen Fläche herausgeschnittenen ebenen Curve an der Stelle O zu erkennen.

Um nun die Länge dieses Krümmungshalbmessers aus den Gleichungen (98. c.), wodurch die krumme Fläche gegeben ist, zu erhalten, seien A, A', A''; A_1, A'_1, A''_1; A_2, A'_2, A''_2 die schiefen, so wie C, C', C''; C_1, C'_1, C''_1; C_2, C'_2, C''_2 die senkrechten Projectionszahlen, welche die neuen Axen AZ, AZ', AZ'' der Ordnung nach an den ursprünglichen AX, AX', AX'' liefern; ferner sollen B, B', B''; B_1, B'_1, B''_1; B_2, B'_2, B''_2 die Projectionszahlen vorstellen, welche die Axen AX, AX', AX'' der Ordnung nach an den Axen AZ, AZ', AZ'' geben, wobei sich schiefe und senkrechte Projectionszahlen nicht mehr von einander unterscheiden lassen, da das letztere Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist; dann geben die dem rechtwinkligen Coordinatensysteme eigenthümlichen, im ersten Abschnitte angezeigten auf (111. b.) folgenden Gleichungen, wenn man sie mit den dortigen Gleichungen (31.) in Verbindung bringt:

(100. a.)
$$\begin{cases} B = D = C\,, & B' = D' = C_1\,, & B'' = D'' = C_2\,, \\ B_1 = D_1 = C'\,, & B'_1 = D'_1 = C'_1\,, & B''_1 = D''_1 = C'_2\,, \\ B_2 = D_2 = C''\,, & B'_2 = D'_2 = C''_1\,, & B''_2 = D''_2 = C''_2\,, \end{cases}$$

Ausserdem hat man nach Anleitung der Gleichungen (65. a.) und (66. a.), weil man im rechtwinkligen Coordinatensysteme die Coordinaten z, z', z'' sowohl als schiefe, wie als senkrechte ansehen darf, wenn man einmal z, z', z'' für y, y', y'', ein andermal für v, v', v'' setzt:

(100. b.)
$$\begin{cases} z = B\,x + B_1\,x' + B_2\,x'', \quad z' = B'\,x + B'_1\,x' + B'_2\,x'', \quad z'' = B''\,x + B''_1\,x' + B''_2\,x'' \\ \text{und} \\ z = A\,u + A'\,u' + A''u'', \quad z' = A_1\,u + A'_1\,u' + A''_1 u'', \quad z'' = A_2\,u + A'_2\,u' + A''_2 u''. \end{cases}$$

Diese letztern Gleichungen geben für z, z', z'' die Ausdrücke in x, x', x'' oder u, u', u'' an die Hand, welche man in die Gleichungen (99. a.) einsetzen muss, um die vordern oder hintern Gleichungen (98. a.) und (98. c.) zu erhalten; diese letztern Gleichungen (98. a.) und (98. c.) hängen daher mit denen (99. a.) vermittelst der Gleichungen (100. b.) gerade so zusammen, wie die in §. 12. dieses Abschnittes betrachteten (36. a.) mit denen (37. a.) durch die (37. c.), wesshalb alle dort erhaltenen Resultate *mutatis mutandis* hier wieder ihre Anwendung finden. Fasst man zuvörderst blos die ersten in (98. a.) und (98. c.) enthaltenen Gleichungen ins Auge, so hat man den Buchstaben u mit dem z zu vertauschen und ausserdem noch

$$\begin{aligned} \nu_0 &= 0\,, & \nu_1 &= B\,, & \nu_2 &= B_1\,, & \nu_3 &= B_2\,, \\ \nu'_0 &= 0\,, & \nu'_1 &= B'\,, & \nu'_2 &= B'_1\,, & \nu'_3 &= B'_2\,, \\ \nu''_0 &= 0\,, & \nu''_1 &= B''\,, & \nu''_2 &= B''_1\,, & \nu''_3 &= B''_2 \end{aligned}$$

zu setzen, wodurch die erste dortige Gleichung (38. b.) hier

(100. c.)
$$\delta z = B + B_1\,\partial x' + B_2\,\partial x''$$

wird, und die dortigen Gleichungen (39. c.) hier geben:

(100. d.)
$$\partial z' = \frac{B' + B'_1\,\partial x' + B'_2\,\partial x''}{B + B_1\,\partial x' + B_2\,\partial x''} \quad \text{und} \quad \partial z'' = \frac{B'' + B''_1\,\partial x' + B''_2\,\partial x''}{B + B_1\,\partial x' + B_2\,\partial x''}\,.$$

In diesen Gleichungen ist, der in §. 12. angeordneten Gebrauchsweise gemäss, die durch δ angezeigte Ableitung nach x zu nehmen; die durch ∂ angezeigten sind auf die hinter diesem

Zeichen stehenden accentlos zu nehmenden Buchstaben zu beziehen. Aus diesen Formeln ergeben sich die, welche die letzten in (98. a.) und (98. c.) enthaltenen Gleichungen angehen, wenn man den Buchstaben u an die Stelle von x und den A an die Stelle von B setzt, wobei man dem Buchstaben u dieselben Accente zu geben hat, die bei x standen, hingegen dem Buchstaben A die Zahl der bei B stehenden Accente als Index anzuhängen und so viel Accente beizufügen hat, als der Index von B besagt. So erhält man anstatt der Gleichung (100. c.) die:

$$\delta z = A + A'\partial u' + A''\partial u'' \qquad \textbf{(100. e.)}$$

und anstatt der Gleichungen (100. d.) die:

$$\partial z' = \frac{A_1 + A_1'\partial u' + A_1''\partial u''}{A + A'\partial u' + A''\partial u''} \quad \text{und} \quad \partial z'' = \frac{A_2 + A_2'\partial u' + A_2''\partial u''}{A + A'\partial u' + A''\partial u''}, \qquad \textbf{(100. f.)}$$

in welchen wieder die durch δ angezeigte Ableitung nach u und die durch ∂ angezeigten nach den hinter diesem Zeichen stehenden, aber ohne Accent gedachten Veränderlichen zu nehmen sind.

Da bei unserer jetzigen Betrachtung z'' den constanten Werth ζ'' hat und deswegen $\partial z'' = 0$ ist, so verwandeln sich die hintern in (100. d.) und (100. f.) stehenden Gleichungen in:

$$B'' + B_1''\partial x' + B_2''\partial x'' = 0 \quad \text{und} \quad A_2 + A_2'\partial u' + A_2''\partial u'' = 0; \qquad \textbf{(101. a.)}$$

eliminirt man aber mittelst dieser Gleichungen die Grössen $\partial x''$ und $\partial u''$ aus den Gleichungen (100. c.) und (100. e.), so wie aus den vordern (100. d.) und (100. f.), so findet man:

$$B_2''\delta z = B B_2'' - B'' B_2 + (B_1 B_2'' - B_1'' B_2)\partial x',$$

$$\partial z' = \frac{B' B_2'' - B'' B_2' + (B_1' B_2'' - B_1'' B_2')\partial x'}{B B_2'' - B'' B_2 + (B_1 B_2'' - B_1'' B_2)\partial x'},$$

und

$$A_2''\delta z = A A_2'' - A'' A_2 + (A' A_2'' - A'' A_2')\partial u',$$

$$\partial z' = \frac{A_1 A_2'' - A_1'' A_2 + (A_1' A_2'' - A_1'' A_2')\partial u'}{A A_2'' - A'' A_2 + (A' A_2'' - A'' A_2')\partial u'},$$

und diese Gleichungen gehen mittelst eines auf die im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichungen (81. a.) geworfenen Blickes über in:

$$\left.\begin{aligned} &B_2''\delta z = (A_1' - A_1\partial x')\overset{3}{[B]}, \quad \partial z' = \frac{-A' + A\partial x'}{A_1' - A_1\partial x'} \\ \text{und} \quad &A_2''\delta z = (B_1' - B'\partial u')\overset{3}{[A]}, \quad \partial z' = \frac{-B_1 + B\partial u'}{B_1' - B'\partial u'}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(101. b.)}$$

Leitet man jetzt die hintern der Gleichungen (101. b.) nach x und u ab, so erhält man mit nochmaliger Rücksichtnahme auf die so eben angezogenen Gleichungen (81. a.):

$$\partial^2 z'\delta z = \frac{B_2''\partial^2 x'}{(A_1' - A_1\partial x')^2}\overset{3}{[A]}, \quad \partial^2 z'\delta z = \frac{A_2''\partial^2 u'}{(B_1' - B'\partial u')^2}\overset{3}{[B]},$$

wo δz in der vordern die Ableitung von z nach x, in der hintern Gleichung dagegen die Ableitung von z nach u bedeutet, wie schon in den vordern auf erster und zweiter Zeile stehen-

den Gleichungen (101. b.); setzt man aber die aus letztern für δz sich ergebenden Werthe in die vorigen, so verwandeln sich diese in:

$$\partial^2 z' = \frac{B_2''^2\,\partial^2 x'}{(A_1' - A_1\,\partial x')^3}\,\frac{\overset{3}{[A]}}{\underset{3}{[B]}} \quad \text{und} \quad \partial^2 z' = \frac{A_2''^2\,\partial^2 u'}{(B_1' - B_1\,\partial u')^3}\,\frac{\overset{3}{[B]}}{\underset{3}{[A]}}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (100. a.):

(101. c.)

$$\partial^2 z' = \frac{C_2''^2\,\partial^2 x'}{(A_1' - A_1\,\partial x')^3}\,\frac{\overset{3}{[A]}}{\underset{3}{[B]}} \quad \text{und} \quad \partial^2 z' = \frac{A_2''^2\,\partial^2 u'}{(C_1' - C_1\,\partial u')^3}\,\frac{\overset{3}{[B]}}{\underset{3}{[A]}}.$$

Wendet man jetzt diese für alle Puncte der ebenen Curve gültigen Gleichungen auf den Punct O an, bei welchem $x' = \xi'$, $u' = \eta'$ und $z' = \zeta'$ ist, so erhält man:

$$\partial^2 \zeta' = \frac{C_2''^2\,\partial^2 \xi'}{(A_1' - A_1\,\partial \xi')^3}\,\frac{\overset{3}{[A]}}{\underset{3}{[B]}} \quad \text{und} \quad \partial^2 \zeta' = \frac{A_2''^2\,\partial^2 \eta'}{(C_1' - C_1\,\partial \eta')^3}\,\frac{\overset{3}{[B]}}{\underset{3}{[A]}},$$

und hierdurch nimmt die Gleichung (99. b.) jede von den zwei nachstehenden Formen an:

(101. d.)

$$\pm\frac{1}{\varrho} = \frac{C_2''^2\,\partial^2 \xi'}{(A_1' - A_1\,\partial \xi')^3}\,\frac{\overset{3}{[A]}}{\underset{3}{[B]}} \quad \text{und} \quad \pm\frac{1}{\varrho} = \frac{A_2''^2\,\partial^2 \eta'}{(C_1' - C_1\,\partial \eta')^3}\,\frac{\overset{3}{[B]}}{\underset{3}{[A]}},$$

welche zeigen, wie sich der Krümmungshalbmesser der ebenen Curve an der Stelle O sowohl mittelst der aus der Gleichung $\varphi_x = 0$ und der vordern (98. a.) herzuholenden Werthe $\partial \xi'$ und $\partial^2 \xi'$ als auch mittelst der aus der Gleichung $\psi_u = 0$ und der hintern (98. a.) herzuholenden Werthe $\partial \eta'$ und $\partial^2 \eta'$ finden lässt. Die Gleichungen (101. d.) lehren zugleich, wie sich der Krümmungshalbmesser einer ebenen Curve an einer ihrer Stellen finden lässt, wenn diese Curve nicht in einer der Coordinatenebenen liegt. Hierbei hat man noch zu beachten, dass der im ersten Abschnitte gegebenen Gleichung (84. b.) zur Folge hier

$$\frac{\overset{3}{[A]}}{\underset{3}{[B]}} = \frac{1}{h^2}, \quad \frac{\overset{3}{[B]}}{\underset{3}{[A]}} = h^2$$

ist, weil unser gegenwärtiges neu eingeführtes Coordinatensystem ein rechtwinkliges und also $k = 1$ ist, wesswegen man die Gleichungen (101. d.) auch so schreiben kann:

(101. e.)

$$\pm\frac{1}{\varrho} = \frac{C_2''^2\,\partial^2 \xi'}{h^2 (A_1' - A_1\,\partial \xi')^3} \quad \text{und} \quad \pm\frac{1}{\varrho} = \frac{h^2 A_2''^2\,\partial^2 \eta'}{(C_1' - C_1\,\partial \eta')^3}.$$

149) Die Gleichungen (101. e.) haben zwar eine sehr einfache Form, aber die in ihnen vorkommenden Projectionszahlen A_1 und A_1' oder C_1 und C_1', welche die Richtung AZ' oder die zum Puncte O gehörige Normale der ebenen Curve an den Axen AX und AX' liefert, verlangen selbst noch ihre weitere Bestimmung durch die Gleichungen der ebenen Curve. Erwägt man, dass die Axe AZ'' senkrecht steht auf der durch die Gleichungen (98. a.) gegebenen Ebene, deren Durchschnitt mit der krummen Fläche die ebene Curve liefert, dass also die Projectionszahlen A_2, A_2', A_2'' und C_2, C_2', C_2'', welche diese Richtung AZ'' an den Axen AX, AX', AX'' giebt, den Coefficienten q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$, welche in den Gleichungen (98. a.) vorkommen, proportional sind, wie die im zweiten Abschnitt mitgetheilten Gleichungen

(4.) sogleich an die Hand geben, so überzeugt man sich, dass diese Coeffizienten durch jene Projectionszahlen ersetzt werden können, und man sonach anstatt der Gleichungen (98. a.) die folgenden nehmen kann:

$$C_2(x-\xi)+C'_2(x'-\xi')+C''_2(x''-\xi'')=0 \text{ und } A_2(u-\eta)+A'_2(u'-\eta')+A''_2(u''-\eta'')=0. \qquad \textbf{(102. a.)}$$

Die erste dieser Gleichungen stellt in Verbindung mit der ersten in (98. c.) enthaltenen die ebene Curve in schiefen Coordinaten dar, so wie die zweiten der genannten Gleichungen die ebene Curve in senkrechten Coordinaten darstellen. Jedes dieser beiden Gleichungspaare befindet sich genau unter den im ersten Paragraphen dieses Abschnitts (Nr. 113.) angeführten Umständen, und man hat beim ersten Paare nichts weiter zu thun, um alle dortigen Formeln auf es anwendbar zu machen, als

$$\Phi_x = C_2(x-\xi)+C'_2(x'-\xi')+C''_2(x''-\xi''),$$

sonach

$$\overset{100}{\partial}\Phi_x = C_2, \quad \overset{010}{\partial}\Phi_x = C'_2, \quad \overset{001}{\partial}\Phi_x = C''_2$$

zu setzen, und aus den diesem Paare angehörigen Resultaten ergeben sich die dem andern Paare zugehörigen analogen einfach dadurch, dass man ψ_u und A an die Stelle von φ_x und C setzt, alle weiteren Abzeichen aber eben so schreibt. Auf diese Weise giebt die dortige erste Gleichung (7. b.) hier:

$$\partial x' = \frac{C''_2\,\overset{100}{\partial}\varphi_x - C_2\,\overset{001}{\partial}\varphi_x}{C'_2\,\overset{001}{\partial}\varphi_x - C''_2\,\overset{010}{\partial}\varphi_x} \text{ und } \partial u' = \frac{A''_2\,\overset{100}{\partial}\psi_u - A_2\,\overset{001}{\partial}\psi_u}{A'_2\,\overset{001}{\partial}\psi_u - A''_2\,\overset{010}{\partial}\psi_u},$$

oder, wenn man auch hier wieder zur Abkürzung

$$\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi'_x, \quad \frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} = \varphi''_x \text{ und } \frac{\overset{100}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u} = \psi'_u, \quad \frac{\overset{010}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u} = \psi''_u \qquad \textbf{(102. b.)}$$

setzt:

$$\partial x' = \frac{C''_2\,\varphi'_x - C_2}{C'_2 - C''_2\,\varphi''_x} \text{ und } \partial u' = \frac{A''_2\,\psi'_u - A_2}{A'_2 - A''_2\,\psi''_u}. \qquad \textbf{(102. c.)}$$

Aus den Gleichungen (102. c.) findet man aber, dass

$$A'_1 - A_1\,\partial x' = \frac{A_1 C_2 + A'_1 C'_2 - C''_2(A_1\varphi'_x + A'_1\varphi''_x)}{C'_2 - C''_2\,\varphi''_x}$$

und

$$C'_1 - C_1\,\partial u' = \frac{C_1 A_2 + C'_1 A'_2 - A''_2(C_1\psi'_u + C'_1\psi''_u)}{A'_2 - A''_2\,\psi''_u}$$

ist, oder wenn man beachtet, dass die Axen A Z′ und A Z″ senkrecht auf einander stehen, und desswegen den oben im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichungen (21.) gemäss

$$A_1 C_2 + A'_1 C'_2 + A''_1 C''_2 = 0 \text{ und } C_1 A_2 + C'_1 A'_2 + C''_1 A''_2 = 0$$

ist, und der Kürze halber

$$A_1\varphi'_x + A'_1\varphi''_x + A''_1 = \mathfrak{F}_x \text{ und } C_1\psi'_u + C'_1\psi''_u + C''_1 = F_u \qquad \textbf{(102. d.)}$$

schreibt:

$$A'_1 - A_1\,\partial x' = -\frac{C''_2\,\mathfrak{F}_x}{C'_2 - C''_2\,\varphi''_x} \text{ und } C'_1 - C_1\,\partial u' = -\frac{A''_2\,F_u}{A'_2 - A''_2\,\psi''_u}. \qquad \textbf{(102. e.)}$$

Aus den Gleichungen (102. a.) und (102. c.) erhält man, wenn man die vordere nach x, die hintere nach u ableitet, x′ und x″ als Functionen von x, und u′ und u″ als Functionen von u betrachtend:

(103. a.) $$C_2 + C_2' \partial x' + C_2'' \partial x'' = 0 \quad \text{und} \quad A_2 + A_2' \partial u' + A_2'' \partial u'' = 0$$

und

$$\partial^2 x' = \frac{C_2''}{(C_2' - C_2'' \varphi_x'')^2} \Big[(C_2' - C_2'' \varphi_x'') \overset{100}{\partial} \varphi_x' + (C_2'' \varphi_x' - C_2) \overset{100}{\partial} \varphi_x''$$

$$+ [(C_2' - C_2'' \varphi_x'') \overset{010}{\partial} \varphi_x' + (C_2'' \varphi_x' - C_2) \overset{010}{\partial} \varphi_x''] \partial x' + [(C_2' - C_2'' \varphi_x'') \overset{001}{\partial} \varphi_x' + (C_2'' \varphi_x' - C_2) \overset{001}{\partial} \varphi_x''] \partial x'' \Big],$$

$$\partial^2 u' = \frac{A_2''}{(A_2' - A_2'' \psi_u'')^2} \Big[(A_2' - A_2'' \psi_u'') \overset{100}{\partial} \psi_u' + (A_2'' \psi_u' - A_2) \overset{100}{\partial} \psi_u''$$

$$+ [(A_2' - A_2'' \psi_u'') \overset{010}{\partial} \psi_u' + (A_2'' \psi_u' - A_2) \overset{010}{\partial} \psi_u''] \partial u' + [(A_2' - A_2'' \psi_u'') \overset{001}{\partial} \psi_u' + (A_2'' \psi_u' - A_2) \overset{001}{\partial} \psi_u''] \partial u'' \Big]$$

und diese letzten Gleichungen geben, wenn man aus ihnen $\partial x''$ und $\partial u''$ mittelst der Gleichungen (101. a.) eliminirt und für $\partial x'$ und $\partial u'$ ihre Werthe aus (102. c.) einsetzt:

(103. b.) $$\begin{cases} \partial^2 x' = \dfrac{C_2''}{(C_2' - C_2'' \varphi_x'')^3} [(C_2' - C_2'' \varphi_x'')(C_2 \varphi_x'' - C_2' \varphi_x') \overset{001}{\partial} \varphi_x' + (C_2'' \varphi_x' - C_2)(C_2 \varphi_x'' - C_2' \varphi_x') \overset{001}{\partial} \varphi_x'' \\ \qquad + (C_2' - C_2'' \varphi_x'')(C_2'' \varphi_x' - C_2) \overset{010}{\partial} \varphi_x' + (C_2'' \varphi_x' - C_2)^2 \overset{010}{\partial} \varphi_x'' \\ \qquad + (C_2' - C_2'' \varphi_x'')^2 \overset{100}{\partial} \varphi_x' + (C_2' - C_2'' \varphi_x'')(C_2'' \varphi_x' - C_2) \overset{100}{\partial} \varphi_x''], \end{cases}$$

(103. c.) $$\begin{cases} \partial^2 u' = \dfrac{A_2''}{(A_2' - A_2'' \psi_u'')^3} [(A_2' - A_2'' \psi_u'')(A_2 \psi_u'' - A_2' \psi_u') \overset{001}{\partial} \psi_u' + (A_2'' \psi_u' - A_2)(A_2 \psi_u'' - A_2' \psi_u') \overset{001}{\partial} \psi_u'' \\ \qquad + (A_2' - A_2'' \psi_u'')(A_2'' \psi_u' - A_2) \overset{010}{\partial} \psi_u' + (A_2'' \psi_u' - A_2)^2 \overset{010}{\partial} \psi_u'' \\ \qquad + (A_2' - A_2'' \psi_u'')^2 \overset{100}{\partial} \psi_u' + (A_2' - A_2'' \psi_u'')(A_2'' \psi_u' - A_2) \overset{100}{\partial} \psi_u'']. \end{cases}$$

Die Gleichungen (103. a. bis c.) haben Gültigkeit für alle Puncte der ebenen Curve; wendet man sie auf den Punct O an, indem man ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' an die Stelle von x, x′, x″ und u, u′, u″ setzt, wodurch den Gleichungen (102. b. und d.) zur Folge

(104. a.) $$\frac{\overset{100}{\partial} \varphi_\xi}{\overset{001}{\partial} \varphi_\xi} = \varphi_\xi', \quad \frac{\overset{010}{\partial} \varphi_\xi}{\overset{001}{\partial} \varphi_\xi} = \varphi_\xi'' \quad \text{und} \quad \frac{\overset{100}{\partial} \psi_\eta}{\overset{001}{\partial} \psi_\eta} = \psi_\eta', \quad \frac{\overset{010}{\partial} \psi_\eta}{\overset{001}{\partial} \psi_\eta}$$

und

(104. b.) $$A_1 \varphi_\xi' + A_1' \varphi_\xi'' + A_1'' = \mathfrak{F}_\xi \quad \text{und} \quad C_1 \psi_\eta' + C_1' \psi_\eta'' + C_1'' = F_\eta$$

wird, so werden die Gleichungen (102. e.) an diesem Puncte:

(104. c.) $$A_1' - A_1 \partial \xi' = -\frac{C_2'' \mathfrak{F}_\xi}{C_2' - C_2'' \varphi_\xi''} \quad \text{und} \quad C_1' - C_1 \partial \eta' = -\frac{A_2'' F_\eta}{A_2' - A_2'' \psi_\eta''},$$

und die (103. b. und c.) geben an demselben Puncte:

(104. d.) $$\begin{cases} \partial^2 \xi' = \dfrac{C_2''}{(C_2' - C_2'' \varphi_\xi'')^3} [(C_2' - C_2'' \varphi_\xi'')(C_2 \varphi_\xi'' - C_2' \varphi_\xi') \overset{001}{\partial} \varphi_\xi' + (C_2'' \varphi_\xi' - C_2)(C_2 \varphi_\xi'' - C_2' \varphi_\xi') \overset{001}{\partial} \varphi_\xi'' \\ \qquad + (C_2' - C_2'' \varphi_\xi'')(C_2'' \varphi_\xi' - C_2) \overset{010}{\partial} \varphi_\xi' + (C_2'' \varphi_\xi' - C_2)^2 \overset{010}{\partial} \varphi_\xi'' \\ \qquad + (C_2' - C_2'' \varphi_\xi'')^2 \overset{100}{\partial} \varphi_\xi' + (C_2' - C_2'' \varphi_\xi'')(C_2'' \varphi_\xi' - C_2) \overset{100}{\partial} \varphi_\xi''], \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}\partial^2\eta' = \frac{A''_2}{(A'_2 - A''_2\psi''_\eta)^3}\Big[&(A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A_2\psi''_\eta - A'_2\psi'_\eta)\overset{001}{\partial}\psi'_\eta + (A''_2\psi'_\eta - A_2)(A_2\psi''_\eta - A'_2\psi'_\eta)\overset{001}{\partial}\psi''_\eta\\ &+ (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A''_2\psi'_\eta - A_2)\overset{010}{\partial}\psi'_\eta + (A''_2\psi'_\eta - A_2)^2\overset{010}{\partial}\psi''_\eta\\ &+ (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)^2\overset{100}{\partial}\psi'_\eta + (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A''_2\psi'_\eta - A_2)\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\Big].\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(104. e.)}$$

Mittelst der Gleichungen (104. c.) gehen nun die (101. e.) über in:

$$\pm\frac{1}{\varrho} = \frac{(C'_2 - C''_2\varphi''_\xi)^3\,\partial^2\xi'}{h^2 C''_2\,\mathfrak{F}^3_\xi} \quad\text{und}\quad \pm\frac{1}{\varrho} = \frac{h^2(A'_2 - A''_2\psi''_\eta)^3\,\partial^2\eta'}{A''_2 F^3_\eta} \quad \textbf{(105. a.)}$$

oder, wenn man in diese für $\partial^2\xi'$ und $\partial^2\eta$ ihre Werthe aus denen (104. d.) und (104. e.) einsetzt:

$$\left.\begin{aligned}\pm\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h^2\mathfrak{F}^3_\xi}\Big[&(C'_2 - C''_2\varphi''_\xi)(C_2\varphi''_\xi - C'_2\varphi'_\xi)\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi + (C''_2\varphi'_\xi - C_2)(C_2\varphi''_\xi - C'_2\varphi'_\xi)\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi\\ &+ (C'_2 - C''_2\varphi''_\xi)(C''_2\varphi'_\xi - C_2)\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi + (C''_2\varphi'_\xi - C_2)^2\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\\ &+ (C'_2 - C''_2\varphi''_\xi)^2\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + (C'_2 - C''_2\varphi''_\xi)(C''_2\varphi'_\xi - C_2)\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\Big].\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(105. b.)}$$

$$\left.\begin{aligned}\pm\frac{1}{\varrho} = \frac{h^2}{F^3_\eta}\Big[&(A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A_2\psi''_\eta - A'_2\psi'_\eta)\overset{001}{\partial}\psi'_\eta + (A''_2\psi'_\eta - A_2)(A_2\psi''_\eta - A'_2\psi'_\eta)\overset{001}{\partial}\psi''_\eta\\ &+ (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A''_2\psi'_\eta - A_2)\overset{010}{\partial}\psi'_\eta + (A''_2\psi'_\eta - A_2)^2\overset{010}{\partial}\psi''_\eta\\ &+ (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)^2\overset{100}{\partial}\psi'_\eta + (A'_2 - A''_2\psi''_\eta)(A''_2\psi'_\eta - A_2)\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\Big].\end{aligned}\right\}\quad \textbf{(105. c.)}$$

Die rechten Seiten der letzten zwei Gleichungen vereinfachen sich durch folgende Betrachtungen. Bezeichnen p, p′, p″ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Richtung der zum Puncte O gehörigen Normale der krummen Fläche an den Axen AX, AX′, AX″ liefert oder eine mit dieser Normale durch die Coordinatenspitze A parallel gezogene Gerade AN, so ist den Gleichungen (97. b.) gemäss:

$$\mathfrak{p}'' : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p} = \overset{001}{\partial}\varphi_\xi : \overset{010}{\partial}\varphi_\xi : \overset{100}{\partial}\varphi_\xi \quad\text{und}\quad p'' : p' : p = \overset{001}{\partial}\psi_\eta : \overset{010}{\partial}\psi_\eta : \overset{100}{\partial}\psi_\eta, \quad \textbf{(106. c.)}$$

oder den in (104. a.) eingeführten Bezeichnungen entsprechend:

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' = \varphi'_\xi : \varphi''_\xi : 1 \quad\text{und}\quad p : p' : p'' = \psi'_\eta : \psi''_\eta : 1; \quad \textbf{(106. a.)}$$

stellt ferner λ den Winkel vor, welchen die Richtungen AN und AZ′ oder die Normalen der krummen Fläche und der aus ihr herausgeschnittenen ebenen Curve, beide an dem Puncte O genommen, mit einander bilden; so ist den im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichungen (9. a. und b.) zur Folge:

$$A_1\mathfrak{p} + A'_1\mathfrak{p}' + A''_1\mathfrak{p}'' = \cos\lambda \quad\text{und}\quad C_1 p + C'_1 p' + C''_1 p'' = \cos\lambda, \quad \textbf{(106. b.)}$$

oder wenn man für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und für p, p′ ihre Werthe aus den Gleichungen (106. a.) setzt:

$$A_1\varphi'_\xi + A'_1\varphi''_\xi + A''_1 = \frac{\cos\lambda}{\mathfrak{p}''} \quad\text{und}\quad C_1\psi'_\eta + C'_1\psi''_\eta + C''_1 = \frac{\cos\lambda}{p''};$$

diese Gleichungen lassen sich aber den in (104. b.) eingeführten Bezeichnungen entsprechend auch so schreiben:

(106. c.) $$\mathfrak{F}_\xi = \frac{\cos\lambda}{\mathfrak{p}''} \quad \text{und} \quad F_\eta = \frac{\cos\lambda}{p''}\,.$$

Weil ferner die zwei Richtungen AZ' und AZ'' senkrecht auf einander stehen, so ist den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (21.) gemäss:

$$A_1 C_2 + A_1' C_2' + A_1'' C_2'' = 0 \quad \text{und} \quad C_1 A_2 + C_1' A_2' + C_1'' A_2'' = 0\,,$$

und eliminirt man aus diesen Gleichungen und denen (106. b.) die Grössen A_1'' und C_1'', so erhält man:

$$C_2'' \cos\lambda = A_1(\mathfrak{p}\, C_2'' - \mathfrak{p}''\, C_2) + A_1'(\mathfrak{p}'\, C_2' - \mathfrak{p}''\, C_2')$$

und

$$A_2'' \cos\lambda = C_1(p\, A_2'' - p''\, A_2) + C_1'(p'\, A_2'' - p''\, A_2')$$

oder, wenn man in diese für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und p, p' ihre aus den Gleichungen (106. a.) entnommenen Werthe und zu gleicher Zeit für $\cos\lambda$ seinen aus der ersten und zweiten Gleichung (106. c.) sich ergebenden Werth einsetzt:

(106. d.)
$$\begin{cases} C_2''\,\mathfrak{F}_\xi = A_1(C_2''\,\varphi_\xi' - C_2) - A_1'(C_2' - C_2''\,\varphi_\xi'') \\ A_2''\,F_\eta = C_1(A_2''\,\psi_\eta' - A_2) - C_1'(A_2' - A_2''\,\psi_\eta'')\,. \end{cases}$$

Da die Normale der krummen Fläche an der Stelle O senkrecht auf der Tangentialebene der krummen Fläche an derselben Stelle steht, so steht sie auch senkrecht auf der in dieser Tangentialebene liegenden Tangente der ebenen Curve an der Stelle O; es bildet daher die Richtung AZ mit den beiden andern AZ'' und AN rechte Winkel, so dass zufolge der im ersten Abschnitte erwiesenen Gleichungen (23.) ist:

$$C_2'\,\mathfrak{p}'' - C_2''\,\mathfrak{p}' : C_2''\,\mathfrak{p} - C_2\,\mathfrak{p}'' : C_2\,\mathfrak{p}' - C_2'\,\mathfrak{p} = A : A' : A''$$

und

$$A_2'\,p'' - A_2''\,p' : A_2''\,p - A_2\,p'' : A_2\,p' - A_2'\,p = C : C' : C''\,,$$

oder, wenn man in diese Proportionen für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und p, p' ihre Werthe aus den Gleichungen (106. a.) einsetzt:

(106. e.)
$$\begin{cases} C_2' - C_2''\,\varphi_\xi'' : C_2''\,\varphi_\xi' - C_2 : C_2\,\varphi'' - C_2'\,\varphi_\xi' = A : A' : A'' \\ \text{und} \\ A_2' - A_2''\,\psi_\eta'' : A_2''\,\psi_\eta' - A_2 : A_2\,\psi_\eta'' - A_2'\,\psi_\eta' = C : C' : C''. \end{cases}$$

Dividirt man nun die erste der Gleichungen (106. d.) successive mit $C_2''\,\varphi_\xi' - C_2$, $C_2' - C_2''\,\varphi_\xi''$, $C_2\,\varphi_\xi'' - C_2'\,\varphi_\xi'$, und die zweite derselben Gleichungen successive mit $A_2''\,\psi_\eta' - A_2$, $A_2' - A_2''\,\psi_\eta''$, $A_2\,\psi_\eta'' - A_2'\,\psi_\eta'$, so erhält man mit Zuziehung der Verhältnissgleichungen (106. e.):

(107. a.)
$$\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{F}_\xi}{C_2''\,\varphi_\xi' - C_2} = \dfrac{A_1 A' - A_1' A}{C_2'' A'}\,, \quad \dfrac{\mathfrak{F}_\xi}{C_2' - C_2''\,\varphi_\xi''} = \dfrac{A_1 A' - A_1' A}{C_2'' A}\,, \quad \dfrac{\mathfrak{F}_\xi}{C_2\,\varphi_\xi'' - C_2'\,\varphi_\xi'} = \dfrac{A_1 A' - A_1' A}{C_2'' A''} \\ \text{und} \\ \dfrac{F_\eta}{A_2''\,\psi_\eta' - A_2} = \dfrac{C_1 C' - C_1' C}{A_2'' C'}\,, \quad \dfrac{F_\eta}{A_2' - A_2''\,\psi''} = \dfrac{C_1 C' - C_1' C}{A_2'' C}\,, \quad \dfrac{F_\eta}{A_2\,\psi_\eta'' - A_2'\,\psi_\eta'} = \dfrac{C_1 C' - C_1' C}{A_2'' C''}\,; \end{cases}$$

weil aber den Gleichungen (100. a.) zur Folge

$$\frac{A_1 A' - A_1' A}{C_2''} = \frac{A_1 A' - A_1' A}{B_2''} \text{ und } \frac{C_1 C' - C_1' C}{A_2''} = \frac{B_1 B' - B_1' B}{A_2''}$$

ist, und den im ersten Abschnitte gegebenen letzten Gleichungen (81. a.) gemäss

$$\frac{A_1 A' - A_1' A}{B_2''} = -\overset{3}{[A]} \text{ und } \frac{B_1 B' - B_1' B}{A_2''} = -\overset{3}{[B]},$$

also

$$\frac{A_1 A' - A_1' A}{C_2''} = -\overset{3}{[A]} \text{ und } \frac{C_1 C' - C_1' C}{A_2''} = -\overset{3}{[B]}$$

ist, so gehen hierdurch die Gleichungen (107. a.), wenn man gleichzeitig alle in ihnen vorkommenden Quotienten umkehrt, über in:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{C_2''\varphi_\xi' - C_2}{\mathfrak{F}_\xi} = -\dfrac{A'}{\overset{3}{[A]}}, \quad \dfrac{C_2' - C_2''\varphi_\xi''}{\mathfrak{F}_\xi} = -\dfrac{A}{\overset{3}{[A]}}, \quad \dfrac{C_2\varphi_\xi'' - C_2'\varphi_\xi'}{\mathfrak{F}_\xi} = -\dfrac{A''}{\overset{3}{[A]}} \\ \text{und} \\ \dfrac{A_2''\psi_\eta' - A_2}{F_\eta} = -\dfrac{C'}{\overset{3}{[B]}}, \quad \dfrac{A_2' - A_2''\psi_\eta''}{F_\eta} = -\dfrac{C}{\overset{3}{[B]}}, \quad \dfrac{A_2\psi_\eta'' - A_2'\psi_\eta'}{F_\eta} = -\dfrac{C''}{\overset{3}{[B]}}. \end{array}\right\} \dots\dots \textbf{(107. b.)}$$

Giebt man jetzt in der Gleichung (105. b.) jedem der bei den Ableitungen von φ_ξ' und φ_ξ'' stehenden Factoren eines von den drei in $\mathfrak{F}_\xi^3$ enthaltenen $\mathfrak{F}_\xi$ zum Nenner, und in der Gleichung (105. c.) jedem der bei den Ableitungen von ψ_η' und ψ_η'' stehenden Factoren eines von den drei in F_η^3 enthaltenen F_η zum Nenner, setzt hierauf an die Stelle der so abgeänderten Factoren deren Werthe aus den Gleichungen (107. b.), und für das eine noch zurückgebliebene $\mathfrak{F}_\xi$ und F_η seinen aus der Gleichung (106. c.) entnommenen Werth, so erhält man, wenn man zu gleicher Zeit beachtet, dass den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (84. c.) gemäss hier

$$\overset{3}{[A]}^2 = \frac{1}{h^2} \text{ und } \overset{3}{[B]}^2 = h^2$$

ist, weil man im neu eingeführten rechtwinkligen Coordinatensysteme $k^2 = 1$ hat:

$$\left.\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda = \mathfrak{p}''[A A'' \overset{001}{\partial}\varphi_\xi' + A' A'' \overset{001}{\partial}\varphi_\xi'' + A A'(\overset{010}{\partial}\varphi_\xi' + \overset{100}{\partial}\varphi_\xi'') + A'^2 \overset{010}{\partial}\varphi_\xi'' + A^2 \overset{100}{\partial}\varphi_\xi'] \\ \pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda = p''[C C'' \overset{001}{\partial}\psi_\eta' + C' C'' \overset{001}{\partial}\psi_\eta'' + C C'(\overset{010}{\partial}\psi_\eta' + \overset{100}{\partial}\psi_\eta'') + C'^2 \overset{010}{\partial}\psi_\eta'' + C^2 \overset{100}{\partial}\psi_\eta'], \end{array}\right\} \dots \textbf{(107. c.)}$$

und diese Gleichungen lösen die Aufgabe der Krümmungsbestimmung einer krummen Fläche an einer ihrer Stellen in allgemeinster Weise. Sie lehren den Krümmungshalbmesser für jeden unter einer beliebigen Neigung λ gegen die Normale der Fläche geführten Schnitt der Fläche an dieser Stelle, und für jede Lage der Geraden, in welcher dieser Schnitt der Tangentialebene der Fläche begegnet, unmittelbar aus der Gleichung finden, durch welche die krumme Fläche gegeben ist; denn die Grössen $\mathfrak{p}''$ und p'' lassen sich mittelst der Gleichungen (106. a.) ebenfalls aus der Gleichung der krummen Fläche herleiten.

150) Da die Grössen A, A', A'' oder C, C', C'' der Geraden angehören, in welcher die Schnittebene der Tangentialebene der krummen Fläche an der Stelle O begegnet, und also ihren Werth nicht ändern, so lange diese Gerade dieselbe bleibt, was auch übrigens die Neigung des Schnittes gegen die Normale der Fläche an dieser Stelle, d. h. der Winkel λ sein mag, so lässt sich aus den Gleichungen (107. c.) unmittelbar entnehmen, dass von allen den Schnitten, welche die Tangentialebene in derselben Geraden treffen, derjenige den grössten Krümmungshalbmesser bei O hat, für welchen $\cos\lambda = \pm 1$ ist, also der, welcher durch die Normale der Fläche an der Stelle O hindurch geführt wird. Bezeichnet ϱ_0 diesen grössten Krümmungshalbmesser für irgend einen durch die Normale der Fläche hindurch geführten Schnitt und ϱ_1 den, welcher einem Schnitte angehört, der mit der Normale der Fläche den Winkel λ macht und die Tangentialebene der Fläche in derselben Geraden trifft, wie der Schnitt, dessen Krümmungshalbmesser bei O sich als ϱ_0 gezeigt hat, so geht aus jeder der Gleichungen (107. c.) hervor, dass

(108.) $$\varrho_0 \cos\lambda = \varrho_1$$

ist, dass also die Krümmungshalbmesser zweier Schnitte, die durch dieselbe in der Tangentialebene an O liegende Gerade hindurch gehen, und von denen die eine durch die zu O gehörige Normale der Fläche hindurch geht, die andere aber nicht, stets dasselbe Verhältniss zu einander behalten, was auch die Gerade sein mag, in welcher diese beiden Schnitte die Tangentialebene an O treffen, wenn nur der Winkel, den die beiden Schnittebenen mit einander bilden, derselbe bleibt. Während die Schnittebene bei stets gleicher Neigung gegen die Normale der Fläche sich um den Punct O herumdreht, ändern sich die Krümmungshalbmesser der Schnittcurven an dieser Stelle in einer Weise ab, die von der Grösse der Neigung des Schnittes gegen die Normale gänzlich unabhängig ist; es drängt sich daher hier die Frage auf, bei welcher Lage der Geraden, worin die Schnittebene der Tangentialebene begegnet, der Krümmungshalbmesser einen grössten oder kleinsten Werth annimmt, und diese Frage läuft offenbar mit der andern auf Eins hinaus: Wie müssen die Grössen A, A', A'' oder C, C', C'' beschaffen sein, damit die auf der rechten Seite der ersten oder zweiten Gleichung (107. c.) stehenden Ausdrücke grösste oder kleinste Werthe annehmen? Um diese Untersuchung in der rechten Weise durchführen zu können, darf man nicht ausser Acht lassen, dass die Grössen A, A', A'' und C, C', C'' keineswegs von einander unabhängig sind; denn erstlich bestehen, den im ersten Abschnitte erwiesenen Relationen (12.) und (47. a.) gemäss, zwischen ihnen die Gleichungen:

(109. a.) $$\left\{\begin{array}{l} C = A + A'\cos W + A''\cos W',\quad C' = A\cos W + A' + A''\cos W'',\quad C'' = A\cos W' + A'\cos W'' + A'' \\ \text{und} \\ \mathfrak{E}A = \mathfrak{A}C + \mathfrak{A}'C' + \mathfrak{A}''C'',\quad \mathfrak{E}_1 A' = \mathfrak{A}_1 C + \mathfrak{A}_1' C' + \mathfrak{A}_1'' C'',\quad \mathfrak{E}_2'' A'' = \mathfrak{A}_2 C + \mathfrak{A}_2' C' + \mathfrak{A}_2'' C'', \end{array}\right.$$

von welchen jedoch die drei einen blos Umformungen der drei andern sind; sodann besteht zwischen ihnen die dort aufgefundene Richtungsgleichung (11.), nämlich:

(109. b.) $$AC + A'C' + A''C'' = 1;$$

endlich hat man zu diesen Gleichungen, weil die Gerade, worin die Tangentialebene der krummen Fläche von der Schnittebene getroffen wird, deren Projectionszahlen eben A, A', A'' und C, C', C'' sind, mit der Normale der krummen Fläche an O einen rechten Winkel bildet, noch die

$$A\mathfrak{p} + A'\mathfrak{p}' + A''\mathfrak{p}'' = 0 \quad \text{oder} \quad C\mathfrak{p} + C'\mathfrak{p}' + C''\mathfrak{p}'' = 0$$

hinzuzufügen, wofür man auch den Gleichungen (106. a.) gemäss die

$$A\varphi'_\xi + A'\varphi''_\xi + A'' = 0 \quad \text{oder} \quad C\psi'_\eta + C'\psi''_\eta + C'' = 0 \qquad \textbf{(109. c.)}$$

setzen kann. Man sieht hieraus, dass die sechs Grössen A, A′, A″ und C, C′, C″ durch fünf Gleichungen von einander abhängig gemacht werden, dass sonach nur eine von ihnen nach Belieben gewählt werden kann, die fünf übrigen dagegen als Functionen dieser einen angesehen werden müssen. Anstatt uns aber fünf von diesen Grössen als Functionen der sechsten vorzustellen, werden wir alle sechs wie Functionen einer ausserhalb ihnen liegenden Veränderlichen ansehen, um symmetrischere Resultate zu erhalten. Leitet man in diesem Sinne die Gleichungen (109. a. bis c.) nach der neu eingeführten und völlig unbestimmt gelassenen Veränderlichen ab, so geben sie, wenn man hierbei das Ableitungszeichen d in Anwendung bringt:

$$\left.\begin{aligned} &dC = dA + dA'\cos W + dA''\cos W', \quad dC' = dA\cos W + dA' + dA''\cos W'', \\ &\qquad dC'' = dA\cos W' + dA'\cos W'' + dA'' \\ \text{oder}\quad &\mathfrak{C}\,dA = \mathfrak{A}\,dC + \mathfrak{A}'\,dC' + \mathfrak{A}''\,dC'', \quad \mathfrak{C}_1'\,dA' = \mathfrak{A}_1\,dC + \mathfrak{A}_1'\,dC' + \mathfrak{A}_1''\,dC'', \\ &\qquad \mathfrak{C}_2''\,dA'' = \mathfrak{A}_2\,dC + \mathfrak{A}_2'\,dC' + \mathfrak{A}_2''\,dC''; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \textbf{(110. a.)}$$

$$A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' + C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA'' = 0; \qquad \textbf{(110. b.)}$$

$$dA\,\varphi'_\xi + dA'\,\varphi''_\xi + dA'' = 0 \quad \text{oder} \quad dC\,\psi'_\eta + dC'\,\psi''_\eta + dC'' = 0. \qquad \textbf{(110. c.)}$$

Man kann sich aber leicht überzeugen, dass stets

$$A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' = C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA'' \qquad \textbf{(110. d.)}$$

ist; denn multiplicirt man die drei ersten Gleichungen (110. a.) der Reihe nach mit A, A′, A″ und addirt die drei so sich ergebenden Resultate zu einander, so überzeugt man sich, dass

$$\begin{aligned} A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' = dA\,(A + A'\cos W + A''\cos W') &+ dA'\,(A\cos W + A' + A''\cos W'') \\ &+ dA''\,(A\cos W' + A'\cos W'' + A'') \end{aligned}$$

ist, und diese Gleichung geht mit einem Blick auf die in erster Zeile stehenden (109. a.) sogleich in die zu erweisende Relation (110. d.) über. Mittelst dieser Relation nun zerfällt die Gleichung (110. b.) in die zwei folgenden:

$$C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA'' = 0 \quad \text{und} \quad A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' = 0. \qquad \textbf{(110. e.)}$$

Aus den vordern Gleichungen (110. c. und e.) findet man durch successive Elimination von einer ihrer Ableitungen:

$$\left.\begin{aligned} &dA : dA' : dA'' = C' - C''\varphi''_\xi : C''\varphi'_\xi - C : C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi \\ &\text{und aus den hintern auf die gleiche Weise} \\ &dC : dC' : dC'' = A' - A''\psi''_\eta : A''\psi'_\eta - A : A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(110. f.)}$$

Setzt man nun, um zu den gewünschten grössten und kleinsten Werthen zu gelangen, die Ableitungen der auf der rechten Seite der Gleichungen (107. c.) stehenden Ausdrücke in dem Sinne genommen, dass A, A′, A″ und C, C′, C″ Functionen von einer ausser ihnen liegenden und nicht weiter bestimmten Veränderlichen sind, der Null gleich, so findet man:

$$0=(A\,dA''+A''\,dA)\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi+(A'\,dA''+A''\,dA')\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi$$
$$+(A\,dA'+A'\,dA)(\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi+\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi)+2A'\,dA'\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi+2A\,dA\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi$$

und

$$0=(C\,dC''+C''\,dC)\overset{001}{\partial}\psi'_\eta+(C'\,dC''+C''\,dC')\overset{001}{\partial}\psi''_\eta$$
$$+(C\,dC'+C''\,dC)(\overset{010}{\partial}\psi'_\eta+\overset{100}{\partial}\psi''_\eta)+2C'\,dC'\overset{010}{\partial}\psi''_\eta+2C\,dC\overset{100}{\partial}\psi'_\eta\,,$$

in welchen Gleichungen man für dA, dA', dA'' und dC, dC', dC'' die ihnen proportionalen Grössen setzen darf, welche durch die Gleichungen (110. f.) gegeben sind. Thut man diess und vereinfacht man die Substitutionsergebnisse mit Hilfe der Gleichungen (109. b.) und (109. c.), so nehmen sie die folgende Form an:

(111. a.)

$$\left\{\begin{aligned}
0=&[2A(C\varphi''_\xi-C'\varphi'_\xi)-\varphi''_\xi]\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi+[2A'(C\varphi''_\xi-C'\varphi'_\xi)+\varphi'_\xi]\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi\\
&+[2A(C''\varphi'_\xi-C)+1]\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi+2A'(C''\varphi'_\xi-C)\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\\
&+[2A'(C'-C''\varphi''_\xi)-1]\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi+2A(C'-C''\varphi''_\xi)\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi\\
&\text{und}\\
0=&[2C(A\psi''_\eta-A'\psi'_\eta)-\psi''_\eta]\overset{001}{\partial}\psi'_\eta+[2C'(A\psi''_\eta-A'\psi'_\eta)+\psi'_\eta]\overset{001}{\partial}\psi''_\eta\\
&+[2C(A''\psi'_\eta-A)+1]\overset{010}{\partial}\psi'_\eta+2C'(A''\psi'_\eta-A)\overset{010}{\partial}\psi''_\eta\\
&+[2C'(A'-A''\psi''_\eta)-1]\overset{100}{\partial}\psi''_\eta+2C(A'-A''\psi''_\eta)\overset{100}{\partial}\psi'_\eta\,.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit denen (109. a. bis c.) hat man die Werthe von A, A', A'' und C, C', C'' herzuholen, welche in die Gleichungen (107. c.) gesetzt $\frac{1}{\varrho}\cos\lambda$ zu einem Grössten oder Kleinsten machen. Die Aufsuchung dieser Grössen auf dem hier eingeschlagenen Wege, wo in die Ausdrücke blos die Functionen φ und ψ aufgenommen worden sind, stösst indessen auf einige Hindernisse, wesswegen wir im Interesse des Lesers die hierbei einfach zum Ziele führende Behandlungsweise ausführlich angeben werden.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn $\varphi_x=0$ eine Gleichung ist, welche drei Veränderliche in sich enthält und φ'_x, φ''_x die ihnen in den Gleichungen (104. a.) gegebene Bedeutung haben, man der in Paragraph 12. dieses Abschnitts gegebenen Gleichung (6. e.) gemäss hat:

$$-\varphi''_x\overset{001}{\partial}\varphi'_x+\varphi'_x\overset{001}{\partial}\varphi''_x+\overset{010}{\partial}\varphi'_x-\overset{100}{\partial}\varphi''_x=0\,,$$

und aus demselben Grunde ist auch noch:

$$-\psi''_u\overset{001}{\partial}\psi'_u+\psi'_u\overset{001}{\partial}\psi''_u+\overset{010}{\partial}\psi'_u-\overset{100}{\partial}\psi''_u=0\,;$$

setzt man daher an die Stelle der allgemeinen Coordinatenwerthe x, x', x'' und u, u', u'' die besondern ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'', so werden die vorstehenden Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}
-\varphi''_\xi \overset{001}{\partial}\varphi'_\xi + \varphi'_\xi \overset{001}{\partial}\varphi''_\xi + \overset{010}{\partial}\varphi'_\xi - \overset{100}{\partial}\varphi''_\xi = 0 \\
\text{und} \\
-\psi''_\eta \overset{001}{\partial}\psi'_\eta + \psi'_\eta \overset{001}{\partial}\psi''_\eta + \overset{010}{\partial}\psi'_\eta - \overset{100}{\partial}\psi''_\eta = 0\,.
\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(111. b.)}$$

Zieht man diese Gleichungen ihrer Aufeinanderfolge nach von denen (111. a.) ab und dividirt mit 2, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l}
0=(C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi)\,A\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi + (C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi)\,A'\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi + (C''\varphi'_\xi - C)\,A\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi \\
\qquad + (C''\varphi'_\xi - C)\,A'\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi + (C' - C''\varphi''_\xi)\,A\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + (C' - C''\varphi''_\xi)\,A'\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi \\
\text{und} \\
0=(A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta)\,C\overset{001}{\partial}\psi'_\eta + (A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta)\,C'\overset{001}{\partial}\psi''_\eta + (A''\psi'_\eta - A)\,C\overset{010}{\partial}\psi'_\eta \\
\qquad + (A''\psi'_\eta - A)\,C'\overset{010}{\partial}\psi''_\eta + (A' - A''\psi''_\eta)\,C\overset{100}{\partial}\psi'_\eta + (A' - A''\psi''_\eta)\,C'\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\,.
\end{array}\right\}\ldots\ldots \textbf{(111. c.)}$$

Eliminirt man jetzt mittelst der Gleichung (109. b.) aus der vordern Gleichung (109. c.) successive die Grössen A, A′, A″ und aus der hintern successive die Grössen C, C′, C″, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{lcl}
A\,(C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi) - A''\,(C' - C''\varphi''_\xi) = \varphi''_\xi & \text{und} & C\,(A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta) - C''(A' - A''\psi''_\eta) = \psi''_\eta \\
-A'\,(C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi) + A''\,(C''\varphi'_\xi - C) = \varphi'_\xi & \text{und} & -C'\,(A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta) + C''(A''\psi'_\eta - A) = \psi'_\eta \\
-A\,(C''\varphi'_\xi - C) + A'\,(C' - C''\varphi''_\xi) = 1 & \text{und} & -C\,(A''\psi'_\eta - A) + C'\,(A' - A''\psi''_\eta) = 1\,;
\end{array}\right\} \textbf{(111. d.)}$$

setzt man aber in die ersten Glieder der Gleichungen (111. c.) für $A(C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi)$ und $C(A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta)$ ihre aus den ersten Gleichungen (111. d.) entnommenen Werthe, sodann in deren zweite Glieder für $A'(C\varphi''_\xi - C'\varphi'_\xi)$ und $C'(A\psi''_\eta - A'\psi'_\eta)$ ihre aus den zweiten Gleichungen (111. d.) entnommenen Werthe, hierauf in deren dritte Glieder für $A(C''\varphi'_\xi - C)$ und $C(A''\psi'_\eta - A)$ und zuletzt in deren letzte Glieder für $A'(C' - C''\varphi''_\xi)$ und $C'(A' - A''\psi''_\eta)$ ihre aus den dritten Gleichungen (111. d.) entnommenen Werthe, so findet man, nachdem noch zu den Resultaten dieser Substitution die Gleichungen (111. b.) addirt worden sind:

$$\left.\begin{array}{l}
0=(C' - C''\varphi''_\xi)[A''\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi + A'\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi + A\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi] + (C''\varphi'_\xi - C)[A''\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi + A'\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi + A\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi] \\
\text{und} \\
0=(A' - A''\psi''_\eta)[C''\overset{001}{\partial}\psi'_\eta + C'\overset{010}{\partial}\psi'_\eta + C\overset{100}{\partial}\psi'_\eta] + (A''\psi'_\eta - A)[C''\overset{001}{\partial}\psi''_\eta + C'\overset{010}{\partial}\psi''_\eta + C\overset{100}{\partial}\psi''_\eta].
\end{array}\right\} \textbf{(111. e.)}$$

Dividirt man nun diese Gleichungen mit A″ C″ und setzt man

$$\frac{A}{A''} = m\,,\quad \frac{A'}{A''} = m' \quad \text{und} \quad \frac{C}{C''} = n\,,\quad \frac{C'}{C''} = n',$$

so wandeln sie sich um in:

$$\left.\begin{array}{l}
0=(n' - \varphi''_\xi)(\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi + m'\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi + m\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi) + (\varphi'_\xi - n)(\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi + m'\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi + m\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi)\,, \\
0=(m' - \psi''_\eta)(\overset{001}{\partial}\psi'_\eta + n'\overset{010}{\partial}\psi'_\eta + n\overset{100}{\partial}\psi'_\eta) + (\psi'_\eta - m)(\overset{001}{\partial}\psi''_\eta + n'\overset{010}{\partial}\psi''_\eta + n\overset{100}{\partial}\psi''_\eta)\,,
\end{array}\right\}\ldots \textbf{(111. f.)}$$

und die Gleichungen (109. c.) geben, wenn man die erste mit A″, die zweite mit C″ dividirt:

(111. g.) $$\mathrm{m}\varphi'_\xi + \mathrm{m}'\varphi''_\xi + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{n}\psi'_\eta + \mathrm{n}'\psi''_\eta + 1 = 0\;;$$

setzt man aber die aus diesen letzten Gleichungen für m′ und n′ sich ergebenden Werthe in die (111. f.) ein, so erhält man:

$$0 = -\left(\frac{1+\mathrm{n}\psi'_\eta}{\psi''_\eta} + \varphi''_\xi\right)\left[\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi - \frac{1}{\varphi''_\xi}\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi + \mathrm{m}\left(\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi - \frac{\varphi'_\xi}{\varphi''_\xi}\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi\right)\right]$$
$$+ (\varphi'_\xi - \mathrm{n})\left[\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi - \frac{1}{\varphi''_\xi}\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi + \mathrm{m}\left(\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi - \frac{\varphi'_\xi}{\varphi''_\xi}\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\right)\right]$$

und

$$0 = -\left(\frac{1+\mathrm{m}\varphi'_\xi}{\varphi''_\xi} + \psi''_\eta\right)\left[\overset{001}{\partial}\psi'_\eta - \frac{1}{\psi''_\eta}\overset{010}{\partial}\psi'_\eta + \mathrm{n}\left(\overset{100}{\partial}\psi'_\eta - \frac{\psi'_\eta}{\psi''_\eta}\overset{010}{\partial}\psi'_\eta\right)\right]$$
$$+ (\psi'_\eta - \mathrm{m})\left[\overset{001}{\partial}\psi''_\eta - \frac{1}{\psi''_\eta}\overset{010}{\partial}\psi''_\eta + \mathrm{n}\left(\overset{100}{\partial}\psi''_\eta - \frac{\psi'_\eta}{\psi''_\eta}\overset{010}{\partial}\psi''_\eta\right)\right],$$

welchen Gleichungen man auch die nachstehende Form geben kann:

(111. h.) $$\mathrm{G\,m\,n} + \mathrm{H\,m} + \mathrm{I\,n} + \mathrm{K} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{G}\,\mathrm{m\,n} + \mathfrak{H}\,\mathrm{m} + \mathfrak{I}\,\mathrm{n} + \mathfrak{K} = 0\,,$$

wenn man der Bequemlichkeit halber

(111. i.) $$\left\{\begin{aligned}
&\psi'_\eta\left(\varphi'_\xi\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi - \varphi''_\xi\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi\right) + \psi''_\eta\left(\varphi'_\xi\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \varphi''_\xi\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\right) = \mathrm{G}\,,\\
&(1+\varphi''_\xi\psi''_\eta)\left(\varphi'_\xi\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi - \varphi''_\xi\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi\right) - \varphi'_\xi\psi''_\eta\left(\varphi'_\xi\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \varphi''_\xi\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\right) = \mathrm{H}\,,\\
&\psi'_\eta\left(\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi - \varphi''_\xi\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi\right) + \psi''_\eta\left(\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \varphi''_\xi\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi\right) = \mathrm{I}\,,\\
&(1+\varphi''_\xi\psi''_\eta)\left(\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi - \varphi''_\xi\overset{001}{\partial}\varphi'_\xi\right) - \varphi'_\xi\psi''_\eta\left(\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \varphi''_\xi\overset{001}{\partial}\varphi''_\xi\right) = \mathrm{K}\,,\\
&\text{und}\\
&\varphi'_\xi\left(\psi'_\eta\overset{010}{\partial}\psi'_\eta - \psi''_\eta\overset{100}{\partial}\psi'_\eta\right) + \varphi''_\xi\left(\psi'_\eta\overset{010}{\partial}\psi''_\eta - \psi''_\eta\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\right) = \mathfrak{G}\,,\\
&\varphi'_\xi\left(\overset{010}{\partial}\psi'_\eta - \psi''_\eta\overset{001}{\partial}\psi'_\eta\right) + \varphi''_\xi\left(\overset{010}{\partial}\psi''_\eta - \psi''_\eta\overset{001}{\partial}\psi''_\eta\right) = \mathfrak{H}\,,\\
&(1+\varphi''_\xi\psi''_\eta)\left(\psi'_\eta\overset{010}{\partial}\psi'_\eta - \psi''_\eta\overset{100}{\partial}\psi'_\eta\right) - \psi'_\eta\varphi''_\xi\left(\psi'_\eta\overset{010}{\partial}\psi''_\eta - \psi''_\eta\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\right) = \mathfrak{I}\,,\\
&(1+\varphi''_\xi\psi''_\eta)\left(\overset{010}{\partial}\psi'_\eta - \psi''_\eta\overset{001}{\partial}\psi'_\eta\right) - \psi'_\eta\varphi''_\xi\left(\overset{010}{\partial}\psi''_\eta - \psi''_\eta\overset{001}{\partial}\psi''_\eta\right) = \mathfrak{K}
\end{aligned}\right.$$

setzt.

Aus den Gleichungen (111. h.) findet man nun ohne Mühe für m und n zwei Paare von Werthen, die wir durch m_1, n_1 und m_2, n_2 bezeichnen wollen. Diese zwei Paare von Werthen entsprechen zweierlei Richtungen der Schnittlinie, in welcher die Ebene der Curve der Tangentialebene der krummen Fläche begegnet, von denen die eine zur kleinsten, die andere zur grössten Krümmung der Fläche bei einerlei Neigung der Schnittebene gegen die Normale der Fläche an dem hervorgehobenen Puncte O hinführt. Bezeichnen a_1, a'_1, a''_1 und c_1, c'_1, c''_1 die

schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die eine von diesen zwei Richtungen an den Axen A X, A X', A X'' giebt, so wie a_2, a'_2, a''_2 und c_2, c'_2, c''_2 die, welche die andere Richtung an den gleichen Axen liefert, so lassen sich diese Grössen aus den Werthen m_1, n_1 und m_2, n_2 wie folgt finden. Es ist nämlich den unmittelbar hinter den Gleichungen (111. e.) eingeführten Bezeichnungen gemäss:

$$\frac{a_1}{a''_1} = m_1 \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c''_1} = n_1 \quad \text{sowie} \quad \frac{a_2}{a''_2} = m_2 \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{c''_2} = n_2 , \qquad \textbf{(112. a.)}$$

und die für jede in der Tangentialebene an O liegende Richtung gültigen Gleichungen (109. c.) geben, wenn man in sie für A, A', A'' und C, C', C'' einmal a_1, a'_1, a''_1 und c_1, c'_1, c''_1 und ein andermal a_2, a'_2, a''_2 und c_2, c'_2, c''_2 einsetzt:

$$\frac{a_1}{a''_1}\varphi'_\xi + \frac{a'_1}{a''_1}\varphi''_\xi + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{c''_1}\psi'_\eta + \frac{c'_1}{c''_1}\psi''_\eta + 1 = 0 ,$$

$$\frac{a_2}{a''_2}\varphi'_\xi + \frac{a'_2}{a''_2}\varphi''_\xi + 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{c_2}{c''_2}\psi'_\eta + \frac{c'_2}{c''_2}\psi''_\eta + 1 = 0 ,$$

aus denen man, die Gleichungen (112. a.) berücksichtigend, findet:

$$\frac{a'_1}{a''_1}\varphi''_\xi = -(1 + m_1\varphi'_\xi) \quad \text{und} \quad \frac{c'_1}{c''_1}\psi''_\eta = -(1 + n_1\psi'_\eta) ,$$

$$\frac{a'_2}{a''_2}\varphi''_\xi = -(1 + m_2\varphi'_\xi) \quad \text{und} \quad \frac{c'_2}{c''_2}\psi''_\eta = -(1 + n_2\psi'_\eta) ;$$

hieraus und aus den Gleichungen (112. a.) folgt aber:

$$a_1 : a'_1 : a''_1 = m_1 : -\frac{1 + m_1\varphi'_\xi}{\varphi''_\xi} : 1 \quad \text{und} \quad c_1 : c'_1 : c''_1 = n_1 : -\frac{1 + n_1\psi'_\eta}{\psi''_\eta} : 1$$

sowie

$$a_2 : a'_2 : a''_2 = m_2 : -\frac{1 + m_2\varphi'_\xi}{\varphi''_\xi} : 1 \quad \text{und} \quad c_2 : c'_2 : c''_2 = n_2 : -\frac{1 + n_2\psi'_\eta}{\psi''_\eta} : 1 ; \qquad \textbf{(112. b.)}$$

man kennt also Zahlen, welche den Projectionszahlen der gesuchten Richtungen proportional sind, aus denen man sonach diese Projectionszahlen selbst berechnen kann, wie oben im ersten Abschnitte (Nr. 21.) gezeigt worden ist.

151) Die beiden in voriger Nummer bestimmten Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung einer Fläche an einem ihrer Puncte O besitzen einige merkwürdige Eigenschaften, die wir jetzt angeben werden. Dabei werden wir voraussetzen, dass die Axe A X'' in der Normale der Fläche an dem Puncte O liege und die beiden andern A X und A X' mit der Tangentialebene der Fläche an dem Puncte O zusammenfallen, wodurch alle Betrachtungen viel einfacher werden, ohne dass die aus ihnen zu schöpfenden Resultate darunter Noth leiden können, da die Natur der Krümmung einer Fläche offenbar in keiner Abhängigkeit zu dem besondern Coordinatensysteme steht, an welchem die Untersuchung derselben vorgenommen wird. An diesem besondern Coordinatensysteme wird erstlich

$$p'' = \mathfrak{p}'' = 1 , \qquad \textbf{(113. a.)}$$

wenn p'' und $\mathfrak{p}''$ wie in den Gleichungen (107. c.) die Projectionszahlen vorstellen, welche die zur Stelle O gehörige Normale der krummen Fläche an der Axe A X'' giebt, weil jetzt die

Normale in dieser Axe selber liegt. Weil ferner in diesem besondern Coordinatensysteme die Ebene XAX' mit der Tangentialebene der Fläche an O parallel läuft, so ist den Gleichungen (95. c.) gemäss:

(113. b.) $$\overset{10}{\partial}\xi''=0 \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial}\xi''=0,$$

und da zudem die Axe AX'' mit den beiden andern AX und AX' rechte Winkel bildet, so ist auch noch zufolge der Gleichungen (95. e.):

(113. c.) $$\overset{10}{\partial}\eta''=0 \quad \text{und} \quad \overset{01}{\partial}\eta''=0.$$

Aus den Gleichungen $\varphi_x=0$ und $\psi_u=0$ erhält man aber den im Paragraph 12. dieses Abschnitts mitgetheilten Gleichungen (6. a.) zur Folge

$$\overset{10}{\partial}x''=-\frac{\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}, \quad \overset{01}{\partial}x''=-\frac{\overset{010}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x} \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}u''=-\frac{\overset{100}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u}, \quad \overset{01}{\partial}u''=-\frac{\overset{010}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u}$$

oder den in (104. a.) eingeführten Bezeichnungen gemäss:

$$\overset{10}{\partial}x''=-\varphi'_x, \quad \overset{01}{\partial}x''=-\varphi''_x \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}u''=-\psi'_u, \quad \overset{01}{\partial}u''=-\psi''_u$$

und auf den Punct O angewandt:

$$\overset{10}{\partial}\xi''=-\varphi'_\xi, \quad \overset{01}{\partial}\xi''=-\varphi''_\xi \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial}\eta''=-\psi'_\eta, \quad \overset{01}{\partial}\eta''=-\psi''_\eta;$$

es ist daher bei diesem besondern Coordinatensysteme nach Aussage der Gleichungen (113. b. u. c.):

(113. d.) $$\varphi'_\xi=0, \quad \varphi''_\xi=0 \quad \text{und} \quad \psi'_\eta=0, \quad \psi''_\eta=0.$$

In diesem besondern Falle verlieren die Gleichungen (111. h.) ihre Brauchbarkeit, weil die Gleichungen (109. c.) in Folge der in (113. d.) gegebenen Werthe sich verwandeln in:

(114. a.) $$A''=0 \quad \text{und} \quad C''=0,$$

sonach die hinter den Gleichungen (111. e.) vorgenommenen Divisionen mit A'' und C'' unstatthaft sind. Dafür gehen jetzt diese Gleichungen denen (114. a.) zur Folge über in:

(114. b.)
$$\begin{cases} 0=C'(A'\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi+A\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi)-C(A'\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi+A\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi) \\ \text{und} \\ 0=A'(C'\overset{010}{\partial}\psi'_\eta+C\overset{100}{\partial}\psi'_\eta)-A(C'\overset{010}{\partial}\psi''_\eta+C\overset{100}{\partial}\psi''_\eta). \end{cases}$$

Die Relationen (111. b.) zeigen, dass im gegenwärtigen Falle

(114. c.) $$\overset{010}{\partial}\varphi'_\xi=\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi \quad \text{und} \quad \overset{010}{\partial}\psi'_\eta=\overset{100}{\partial}\psi''_\eta$$

ist, dem zufolge die Gleichungen (114. b.) sich auch so schreiben lassen:

$$0=\frac{C'}{C}\frac{A'}{A}-1+\frac{C'}{C}\frac{\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi}{\underset{}{\overset{100}{\partial}}\varphi''_\xi}-\frac{A'}{A}\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi}{\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi}\quad\text{und}\quad 0=\frac{C'}{C}\frac{A'}{A}-1-\frac{C'}{C}\frac{\overset{010}{\partial}\psi''_\eta}{\overset{100}{\partial}\psi''_\eta}+\frac{A'}{A}\frac{\overset{100}{\partial}\psi'_\eta}{\overset{100}{\partial}\psi''_\eta}, \qquad \textbf{(114. d.)}$$

und diese geben durch Subtraction:

$$\frac{C'}{C}(\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi\,\overset{100}{\partial}\psi''_\eta+\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\,\overset{010}{\partial}\psi''_\eta)=\frac{A'}{A}(\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\,\overset{100}{\partial}\psi''_\eta+\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\,\overset{100}{\partial}\psi'_\eta)$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\,\overset{100}{\partial}\psi''_\eta+\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi\,\overset{100}{\partial}\psi'_\eta}{\overset{010}{\partial}\psi''_\eta\,\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi+\overset{100}{\partial}\psi''_\eta\,\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi}=\mathfrak{L}$$

schreibt,

$$\frac{C'}{C}=\frac{A'}{A}\mathfrak{L}\,. \qquad \textbf{(114. e.)}$$

Setzt man den hieraus für $\frac{C'}{C}$ sich ergebenden Werth in die erste Gleichung (114. d.) und den für $\frac{A'}{A}$ sich ergebenden in die zweite Gleichung, so kommt:

$$\left.\begin{aligned}&0=\left(\frac{A'}{A}\right)^2-\frac{A'}{A}\left(\frac{1}{\mathfrak{L}}\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi}{\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi}-\frac{\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi}{\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi}\right)-\frac{1}{\mathfrak{L}}=0\\ &\text{und}\\ &0=\left(\frac{C'}{C}\right)^2-\frac{C'}{C}\left(\mathfrak{L}\frac{\overset{010}{\partial}\psi''_\eta}{\overset{100}{\partial}\psi''_\eta}-\frac{\overset{100}{\partial}\psi'_\eta}{\overset{100}{\partial}\psi''_\eta}\right)-\mathfrak{L}=0.\end{aligned}\right\}\qquad \textbf{(114. f.)}$$

Diese letzten zwei Gleichungen liefern für $\frac{A'}{A}$ zwei Werthe, die wir durch $\frac{a'_1}{a_1}$ und $\frac{a'_2}{a_2}$ bezeichnen wollen, und eben so für $\frac{C'}{C}$ zwei Werthe, die wir durch $\frac{c'_1}{c_1}$ und $\frac{c'_2}{c_2}$ bezeichnen werden, wobei a_1, a'_1 und c_1, c'_1, so wie a_2, a'_2 und c_2, c'_2 die schiefen und senkrechten Projectionszahlen vorstellen, welche die den beiden Werthen von $\frac{A'}{A}$ und $\frac{C'}{C}$ entsprechenden zwei Richtungen an den Axen A X und A X′ geben. Schon die Form der Gleichungen (114. f.) giebt zu erkennen, dass

$$\frac{a'_1\,a'_2}{a_1\,a_2}=-\frac{1}{\mathfrak{L}}\quad\text{und}\quad\frac{c'_1\,c'_2}{c_1\,c_2}=-\mathfrak{L}$$

ist, und aus der Gleichung (114. e.) folgt, dass

$$\frac{c'_1}{c_1}=\frac{a'_1}{a_1}\mathfrak{L}\quad\text{und}\quad\frac{c'_2}{c_2}=\frac{a'_2}{a_2}\mathfrak{L}$$

ist; eliminirt man aber aus diesen und den vorigen Gleichungen die Grösse $\mathfrak{L}$, so findet man:

$$\frac{c'_1}{c_1}\frac{a'_2}{a_2}=-1\quad\text{und}\quad\frac{a'_1}{a_1}\frac{c'_2}{c_2}=-1$$

oder

(114. g.)
$$a_2 c_1 + a_2' c_1' = 0 \quad \text{und} \quad a_1 c_2 + a_1' c_2' = 0 \;,$$

welche letzten beiden Gleichungen in der Aussage übereinstimmen, dass die Richtungen, deren Projectionszahlen bei der einen a_1, a_1' und c_1, c_1', bei der andern a_2, a_2' und c_2, c_2' sind, einen rechten Winkel mit einander bilden; die zwei Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung an jeder Stelle einer krummen Fläche stehen mithin senkrecht auf einander.

An dem besondern Coordinatensysteme, auf das wir unsere letzten Betrachtungen gestützt haben, nehmen die Gleichungen (107. c.) in Folge der für dieses System gültigen Relationen (113. a.), (114. a.) und (114. c.) die folgende Gestalt an:

(115. a.)
$$\left\{\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda = A^2 \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + 2AA' \overset{100}{\partial}\varphi''_\xi + A'^2 \overset{010}{\partial}\varphi''_\xi \\ \text{und} \\ \pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda = C^2 \overset{100}{\partial}\psi'_\eta + 2CC' \overset{100}{\partial}\psi''_\eta + C'^2 \overset{010}{\partial}\psi''_\eta \;, \end{array}\right.$$

und geben an diesem besondern Systeme die Grösse der Krümmung an der Stelle O zu erkennen, welche dem Schnitt der Fläche angehört, der mit der Normale der Fläche an dem Puncte O den Winkel λ macht, und der die zur gleichen Stelle gehörige Tangentialebene der Fläche in einer Richtung schneidet, die mit den Axen AX und AX′ die schiefen Projectionsverhältnisse A und A′ oder die senkrechten C und C′ eingeht. Diese Gleichungen liefern die grösste und kleinste Krümmung, wenn man an die Stelle von A, A′ oder C, C′ die so eben gefundenen und durch a_1, a_1' oder c_1, c_1' und a_2, a_2' oder c_2, c_2' bezeichneten Werthe setzt. Bezeichnen wir durch ϱ_1 und ϱ_2 die zu diesen letztern Richtungen gehörigen Krümmungshalbmesser, von welchen der eine den grössten, der andere den kleinsten Werth liefert bei einer bestimmten, sich nicht ändernden Grösse des Winkels λ, so ist diesem nach:

(115. b.)
$$\left\{\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\varrho_1}\cos\lambda = a_1^2 \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + 2a_1a_1' \overset{100}{\partial}\varphi''_\xi + a_1'^2 \overset{010}{\partial}\varphi''_\xi \\ \text{und} \\ \pm\frac{1}{\varrho_1}\cos\lambda = c_1^2 \overset{100}{\partial}\psi'_\eta + 2c_1c_1' \overset{100}{\partial}\psi''_\eta + c_1'^2 \overset{010}{\partial}\psi''_\eta \;, \\ \text{sowie} \\ \pm\frac{1}{\varrho_2}\cos\lambda = a_2^2 \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + 2a_2a_2' \overset{100}{\partial}\varphi''_\xi + a_2'^2 \overset{010}{\partial}\varphi''_\xi \\ \text{und} \\ \pm\frac{1}{\varrho_2}\cos\lambda = c_2^2 \overset{100}{\partial}\psi'_\eta + 2c_2c_2' \overset{100}{\partial}\psi''_\eta + c_2'^2 \overset{010}{\partial}\psi''_\eta \;. \end{array}\right.$$

Zieht man das Coordinatensystem, an welchem diese Gleichungen gültig sind, dadurch noch mehr ins Besondere, dass man die beiden Axen AX und AX′, welche in der zu O gehörigen Tangentialebene der Fläche liegen, mit den zwei Richtungen zusammenfallen lässt, deren Projectionszahlen an diesen Axen a_1, a_1' oder c_1, c_1' und a_2, a_2' oder c_2, c_2' waren, so wird das so gedachte Coordinatensystem, weil diese Richtungen senkrecht auf einander und auch senk-

recht auf der dritten Axe AX'' stehen, ein rechtwinkliges, in welchem sich die senkrechten und schiefen Projectionszahlen sowohl als Coordinaten nicht mehr von einander unterscheiden, und desswegen

$$a_1 = c_1\,,\quad a_1' = c_1'\,;\quad a_2 = c_2\,,\quad a_2' = c_2'\,;\quad A = C\,,\quad A' = C'$$

und

$$x = u\,,\quad x' = u'\,,\quad x'' = u''\,;\quad \xi = \eta\,,\quad \xi' = \eta'\,,\quad \xi'' = \eta''$$

und in Folge dessen auch

$$\varphi_x = \psi_u\,,\quad \varphi'_x = \psi'_u\,,\quad \varphi''_x = \psi''_u\,;\quad \varphi_\xi = \psi_\eta\,,\quad \varphi'_\xi = \psi'_\eta\,,\quad \varphi''_\xi = \psi''_\eta$$

ist. Aus diesem Grunde ziehen sich je zwei von den Gleichungen (115. a.) und (115. b.), welche schiefen und senkrechten Formen angehören, an dem jetzigen Coordinatensysteme in eine einzige zusammen, und da an diesem Systeme

$$a_1 = c_1 = 1\,,\quad a_1' = c_1' = 0 \quad\text{und}\quad a_2 = c_2 = 0\,,\quad a_2' = c_2' = 1$$

wird, weil die Axen AX und AX' in den Richtungen liegen, auf welche sich die vorstehenden Projectionszahlen beziehen, und zudem

$$A = C = \cos\theta_1\,,\quad A' = C' = \cos\theta_2$$

wird, wenn θ_1 und θ_2 die Winkel bezeichnen, welche die in der Tangentialebene liegende Richtung eines beliebig in die Fläche gemachten Schnittes mit den Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung bilden unter allen Schnitten, die einerlei Neigung gegen die Normale der Fläche haben, so verwandeln sich an unserm jetzigen Coordinatensysteme die Gleichungen (115. a.) in die eine:

$$\pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda = \cos^2\theta_1\,\overset{100}{\partial}\varphi'_\xi + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\,\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi + \cos^2\theta_2\,\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\,, \qquad \textbf{(115. c.)}$$

so wie die (115. b.) in die zwei

$$\pm\frac{1}{\varrho_1}\cos\lambda = \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi \quad\text{und}\quad \pm\frac{1}{\varrho_2}\cos\lambda = \overset{010}{\partial}\varphi''_\xi\,. \qquad \textbf{(115. d.)}$$

Bei einiger Aufmerksamkeit findet man jedoch, dass an dem gegenwärtigen Coordinatensysteme stets $\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi = 0$ sein muss. In der That ziehen sich die beiden Gleichungen (114. f.) jetzt, wo $\varphi'_\xi = \psi'_\eta$ und $\varphi''_\xi = \psi''_\eta$ ist, was zur Folge hat, dass $\mathfrak{L} = 1$ wird, in die eine

$$0 = \left(\frac{A'}{A}\right)^2 - \frac{A'}{A}\,\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi}{\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi} - 1 \quad\text{oder}\quad 0 = \left(\frac{C'}{C}\right)^2 - \frac{C'}{C}\,\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi}{\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi} - 1$$

zusammen, aus welcher sich die beiden Wurzelwerthe $\frac{a_1'}{a_1}$ und $\frac{a_2'}{a_2}$ oder $\frac{c_1'}{c_1}$ und $\frac{c_2'}{c_2}$, welche hier $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{0}$ sind, ergeben müssen. Die Auflösung der vorstehenden Gleichung liefert aber ihre beiden Wurzeln in den zwei Formen

$$\frac{\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi \pm \sqrt{4(\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi)^2 + (\overset{010}{\partial}\varphi''_\xi - \overset{100}{\partial}\varphi'_\xi)^2}}{2\,\overset{100}{\partial}\varphi''_\xi}\,,$$

woraus man sogleich ersieht, dass der eine von ihnen nur dann $\frac{1}{0}$ sein kann, wenn $\overset{100}{\eth}\varphi''=0$ ist; die andere $\frac{0}{1}$ erhält man sodann aus den vorstehenden zwei Formen zwar in der Gestalt $\frac{0}{0}$, aber die Auswerthung dieser unbestimmten Grösse in der gewöhnlichen Weise zeigt, dass sie hier den bestimmten Werth 0 annimmt. Da hiernach an dem jetzigen Coordinatensysteme $\overset{100}{\eth}\varphi''_\xi=0$ sein muss, so verwandelt sich die Gleichung (115. c.) an ihm in:

$$\pm\frac{1}{\varrho}\cos\lambda=\cos^2\theta_1\,\overset{100}{\eth}\varphi'_\xi+\cos^2\theta_2\,\overset{010}{\eth}\varphi''_\xi\,,$$

welche Gleichung, mit denen (115. d.) verglichen, zeigt, dass

(116.) $$\pm\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{\varrho_1}\cos^2\theta_1\pm\frac{1}{\varrho_2}\cos^2\theta_2$$

ist. Diese letzte Gleichung, in welcher sich eine einfache Relation zwischen den Halbmessern der grössten und kleinsten Krümmung und dem Krümmungshalbmesser eines beliebigen andern Schnittes, dessen Stellung zu jenen beiden Schnitten bekannt ist, ausspricht, giebt in Verbindung mit dem Satze, dass die Schnitte der grössten und kleinsten Krümmung senkrecht auf einander stehen und in Verbindung mit dem durch die Gleichung (108.) ausgesprochenen Satze alles an die Hand, was sich in allgemeiner Weise über die Natur der Krümmung einer Fläche sagen lässt. Diese allgemeinen Eigenschaften lassen sich auch am schiefwinkligen Coordinatensysteme in der Weise entwickeln, wie es von Cauchy im rechtwinkligen Systeme geschehen ist; ich habe indessen den vorliegenden Gang vorgezogen, einmal, weil er der directere ist, und dann hauptsächlich desswegen, weil er mehr Gelegenheit gab, das Rechnen mit den Formen des schiefwinkligen Systems vor Augen zu legen. Die Aufgabe der Flächenkrümmung allein schliesst eine ganze Sammlung von einzelnen Beispielen in sich. Sehr einfach lässt sich übrigens die Natur der Krümmung einer Fläche an den durch die Gleichungen (93. g.) gegebenen Ausdrücken aufstellen, wozu die Andeutungen in Nr. 131. des vorigen Paragraphen enthalten sind.

152) Stellen wie im Vorigen

(117. a.) $$\varphi_x=0 \quad\text{und}\quad \psi_u=0$$

die combinirten Gleichungen einer krummen Fläche vor, wobei man sich φ_x als eine Function der drei schiefen Coordinaten x, x′, x″, ψ_u als eine Function der drei senkrechten Coordinaten u, u′, u″ zu denken hat, die ein beliebiger Punct O_1 der durch die vorstehenden Gleichungen dargestellten Fläche an den Axen AX, AX′, AX″ eines beliebigen Coordinatensystems liefert; ist ferner $\mathfrak{O}$ (Fig. 5.) ein in dieser Fläche unveränderlich festgestellter Punct, durch welchen zwei Ebenen parallel mit zweien der Coordinatenebenen, die sowohl dem Grundsysteme, wie dem Polarsysteme angehören können, gelegt werden, welche Ebenen die krumme Fläche in den ebenen Curven $\mathfrak{O}\mathfrak{O}''_0$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}''_1$, die dritte Coordinatenebene aber in den Geraden PP''_0 und PP''_1 schneiden; nimmt man endlich in derselben krummen Fläche einen veränderlich gedachten Punct O′ an, durch den man zwei neue mit den vorigen parallele Ebenen legt, von welchen die krumme Fläche in den ebenen Curven $O'\mathfrak{O}'_0$ und $O'\mathfrak{O}'_1$, die dritte Coordinatenebene dagegen in den Geraden $Q'P'_0$ und $Q'P'_1$ geschnitten wird, so begrenzen die zwei beweglich gedachten Durchschnittscurven $O'\mathfrak{O}'_0$ und $O'\mathfrak{O}'_1$ in Verbindung mit den unveränderlich angenommenen $\mathfrak{O}\mathfrak{O}''_0$

und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1''$ ein Stück $O'\mathfrak{O}_0'\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1'O'$ der krummen Fläche, dessen Grösse nur mit der Lage des Punctes O' sich abändert, sonach eine Function von dieser Lage, oder der diese Lage bestimmenden Coordinaten des Punctes O' ist. Wir bezeichnen die Coordinaten des beliebigen und veränderlich gedachten Punctes durch x, x', x'', wenn es schiefe sind, und durch u, u', u'', wenn es senkrechte sind, und müssen uns eine von den drei Coordinaten einer jeden Art als die durch die Gleichungen (117. a.) gegebenen Functionen der beiden andern denken. Um unsere Anschauung in dieser Beziehung festzustellen, wollen wir die Coordinatenebenen, denen parallel die Curven $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_0''$, $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1''$ und $O'\mathfrak{O}_0'$, $O'\mathfrak{O}_1'$ aus der krummen Fläche ausgeschnitten werden, die XAX'' und $X'AX''$ oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ sein lassen, je nachdem die Schnitte den Grundcoordinatenebenen oder den Polarcoordinatenebenen parallel geführt werden, und dann x'' oder u'' als Functionen von x und x' oder u und u' ansehen. Unsere gegenwärtige Aufgabe besteht nun darin, die noch unbekannte Function von x und x' oder von u und u' zu finden, durch welche bei jeder möglichen Lage des Punctes O' jedesmal die Grösse des Stückes $O'\mathfrak{O}_0'\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1'O'$ der krummen Fläche dargestellt wird, welche Function wir durch $\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_u$ anzeigen werden, je nachdem wir sie uns aus den schiefen oder senkrechten Coordinaten zusammengesetzt vorstellen.

Denkt man sich im Innern des völlig begrenzten Flächenstücks $O'\mathfrak{O}_0'\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1'O'$ noch einen beliebigen, aber bestimmt gedachten Punct O der Fläche hervorgehoben und durch ihn zwei neue den vorigen parallele Ebenen gelegt, welche die krumme Fläche in den Curven $\mathfrak{O}_0 O S_0$ und $\mathfrak{O}_1 O S_1$ die dritte Coordinatenebene dagegen in den Geraden P_0T_0 und P_1T_1 schneiden, so wird das Flächenstück $O\mathfrak{O}_0\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1O$, wenn ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' die schiefen oder senkrechten Coordinaten des Punctes O vorstellen durch $\mathfrak{F}_\xi$ oder $\mathfrak{F}_\eta$ dargestellt, weil der Punct O eine von den Lagen inne hat, die der Punct O' annehmen kann. Legt man jetzt durch diesen Punct O drei neue Axen OX, OX', OX'', welche den ursprünglichen AX, AX', AX'' parallel und gleichläufig sind, und bezeichnet man durch x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' die auf diese neuen Axen bezogenen schiefen und senkrechten Coordinaten von demselben veränderlichen Puncte O', der an den ursprünglichen Axen die x, x', x'' und u, u', u'' gab, so ist den im ersten Abschnitte erwiesenen Gleichungen (7.) zur Folge:

$$x = \xi + x_0\,,\quad x' = \xi' + x_0'\,,\quad x'' = \xi'' + x_0'' \quad\text{und}\quad u = \eta + u_0\,,\quad u' = \eta' + u_0'\,,\quad u'' = \eta'' + u_0''\,, \qquad (117.\ b.)$$

und den in Paragraph 12. dieses Abschnittes niedergelegten Gleichungen (3. b.) gemäss hat man, weil $\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_u$ als eine Function der beiden unabhängig Veränderlichen x und x' oder u und u' gedacht wird:

$$\mathfrak{F}_{x,x'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'} = (\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\xi\, x_0 + \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\xi\, x_0') + \left(\overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\xi\, x_0 x_0' + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\xi \frac{x_0'^2}{1.2}\right) + \ldots$$

oder $\qquad\ldots\ldots$ (117. c.)

$$\mathfrak{F}_{u,u'} - \mathfrak{F}_{\eta,\eta'} = (\overset{10}{\partial}\mathfrak{F}_\eta\, u_0 + \overset{01}{\partial}\mathfrak{F}_\eta\, u_0') + \left(\overset{20}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} + \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_\eta\, u_0 u_0' + \overset{02}{\partial}\mathfrak{F}_\eta \frac{u_0'^2}{1.2}\right) + \ldots,$$

wobei wir auf der linken Seite an das Functionszeichen $\mathfrak{F}$ zur bessern Unterscheidung der in dieser Function auftretenden Veränderlichen die beiden in ihr vorhandenen Unabhängigen x, x' und ξ, ξ' oder u, u' und η, η' angehängt haben, wo wir sonst nur deren erste anzuhängen pflegen. Die Differenz $\mathfrak{F}_{x,x'} - \mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$ oder $\mathfrak{F}_{u,u'} - \mathfrak{F}_{\eta,\eta'}$ hat unter allen Umständen die Grösse des Flächenstücks $O\mathfrak{O}_0\mathfrak{O}_0'O'\mathfrak{O}_1'\mathfrak{O}_1O$ anzuzeigen, wo auch der Punct O' in der krummen Fläche an-

genommen werden mag, falls derselbe nur zur Hervorrufung eines völlig begrenzten Flächenstücks geeignet ist. Lässt man den beweglichen Punct O′ in die Stelle S_0 rücken, wo $x'=\xi'$ und $x'_0=0$ oder $u'=\eta'$ und $u'_0=0$ wird, x und x_0 oder u und u_0 aber ihre vorigen Werthe behalten, so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in:

(117. d.) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}_{x,\xi'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}=\overset{1\,0}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,x_0+\overset{2\,0}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,\frac{x_0^2}{1.2}+\dots \\ \text{oder} \\ \mathfrak{F}_{u,\eta'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}=\overset{1\,0}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,u_0+\overset{2\,0}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,\frac{u_0^2}{1.2}+\dots, \end{array}\right.$$

und in diesen Gleichungen stellt $\mathfrak{F}_{x,\xi'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$ oder $\mathfrak{F}_{u,\eta'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}$ das Flächenstück $O\,\mathfrak{O}_1\,\mathfrak{O}'_1\,S_0\,O$ dar; lässt man hingegen den beweglichen Punct O′ in die Stelle S_1 rücken, wo $x=\xi$ und $x_0=0$ oder $u=\eta$ und $u_0=0$ wird, x' und x'_0 oder u' und u'_0 aber ihre vorigen Werthe behalten, so verwandeln sich die Gleichungen (117. c.) in:

(117. e.) $$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{F}_{\xi,x'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}=\overset{0\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,x'_0+\overset{0\,2}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,\frac{x_0'^2}{1.2}+\dots \\ \text{oder} \\ \mathfrak{F}_{\eta,u'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}=\overset{0\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,u'_0+\overset{0\,2}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,\frac{u_0'^2}{1.2}+\dots, \end{array}\right.$$

und hierin stellt die Differenz $\mathfrak{F}_{\xi,x'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'}$ oder $\mathfrak{F}_{\eta,u'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}$ das Flächenstück $O\,\mathfrak{O}_0\,\mathfrak{O}'_0\,S_1\,O$ dar. Zieht man aber die beiden durch die Gleichungen (117. d. und e.) ausgedrückten Flächenstücke von dem durch die Gleichung (117. c.) vorgestellten ab, so erhält man das Flächenstück $O\,S_0\,O'\,S_1\,O$; es ist also entweder

$$O\,S_0\,O'\,S_1\,O=(\mathfrak{F}_{x,x'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'})-(\mathfrak{F}_{x,\xi'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'})-(\mathfrak{F}_{\xi,x'}-\mathfrak{F}_{\xi,\xi'})$$

oder

$$O\,S_0\,O'\,S_1\,O=(\mathfrak{F}_{u,u'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'})-(\mathfrak{F}_{u,\eta'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'})-(\mathfrak{F}_{\eta,u'}-\mathfrak{F}_{\eta,\eta'}),$$

und diese beiden Gleichungen gehen, wenn man an die Stelle der in ihnen auftretenden Differenzen ihre durch die Gleichungen (117. c. bis e.) gegebenen Werthe setzt, über in:

(117. f.) $$\left\{\begin{array}{l} O\,S_0\,O'\,S_1\,O=\overset{1\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,x_0\,x'_0+\frac{1}{2}\overset{2\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,x_0^2\,x'_0+\frac{1}{2}\overset{1\,2}{\partial}\mathfrak{F}_{\xi}\,x_0\,x_0'^2+\dots \\ \text{oder} \\ O\,S_0\,O'\,S_1\,O=\overset{1\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,u_0\,u'_0+\frac{1}{2}\overset{2\,1}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,u_0^2\,u'_0+\frac{1}{2}\overset{1\,2}{\partial}\mathfrak{F}_{\eta}\,u_0\,u_0'^2+\dots \end{array}\right.$$

Nachdem diese Grösse bestimmt worden ist, denke man sich die zum Puncte O gehörige Tangentialebene an die Fläche gelegt und die durch die Puncte O und O′ gehenden Ebenen, wodurch das Stück $O\,S_0\,O'\,S_1\,O$ aus der Fläche herausgeschnitten worden ist, nöthigenfalls verlängert, bis sie dieser Tangentialebene begegnen, so schneiden die genannten Ebenen aus der Tangentialebene ein geradliniges Viereck heraus, dessen Projection auf die dritte Coordinatenebene, unter welcher wir uns immer die XAX' vorstellen werden, das durch dieselben Ebenen aus dieser dritten Coordinatenebene herausgeschnittene Parallelogramm $Q\,T_0\,Q'\,T_1\,Q$ ist. Die Grösse dieses Parallelogramms ist $x_0\,x'_0\sin W$, wenn es durch den Grundcoordinatenebenen XAX'' und $X'AX''$ parallele Ebenen aus der Grundcoordinaten-

ebene XAX' ausgeschnitten worden ist, und $\frac{u_0 u'_0}{\sin W}$, wenn es durch den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallele Ebenen aus derselben Grundcoordinatenebene XAX' ausgeschnitten worden ist, wie man sogleich daran erkennt, dass im ersten Falle die in der Ebene XAX' gebildeten Durchschnittslinien den Axen AX und AX' parallel laufen, im andern Falle hingegen senkrecht auf diesen Axen stehen, und darum das Parallelogramm $QT_0Q'T_1Q$ in beiden Fällen dieselben Winkel in sich aufnimmt, den XAX' nämlich und seinen Nebenwinkel, zu seinen Seiten aber in jenem Falle x_0 und x'_0, in diesem hingegen $\frac{u_0}{\sin W}$ und $\frac{u'_0}{\sin W}$ hat. Aus der Grösse dieses Parallelogramms lässt sich aber leicht die Grösse des eben erwähnten aus der Tangentialebene ausgeschnittenen Vierecks, welche Grösse wir durch V bezeichnen werden, finden, da jenes Parallelogramm die Projection des Vierecks auf die Ebene XAX' ist, und man daher auf sie den im ersten Abschnitt aufgestellten Satz (2. a. oder b.) in Anwendung bringen kann. Im ersten Falle nämlich, wo die ausschneidenden Ebenen den Coordinatenebenen XAX'' und $X'AX''$ parallel laufen, stehen die projicirenden Linien senkrecht auf der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$, und es ist der Winkel, den die Ebenen XAX' und $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ mit einander bilden, dem gleich, welchen die auf diesen Ebenen senkrechten Axen $A\mathfrak{X}''$ und AX'' einschliessen, dessen Kosinus mithin $\mathfrak{C}''_2$ ist, wenn $\mathfrak{C}''_2$ die diesem Zeichen im ersten Abschnitte gegebene Bedeutung behält; sodann ist der Winkel, den die Tangentialebene an O mit der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ bildet, dem gleich, welchen die Normale an O, die senkrecht auf der Tangentialebene steht, mit der Axe AX'', welche senkrecht auf der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ steht, einschliesst, und den wir mit ε bezeichnen wollen. Darum hat man dem (Abschn. I. §. 1.) mitgetheilten Satze (2. b.) gemäss:

$$V_x \cos\varepsilon = \mathfrak{C}''_2 \sin W\, x_0 x'_0,$$

wenn V_x die Grösse des durch Ebenen, welche mit den Grundcoordinatenebenen XAX'' und $X'AX''$ parallel laufen, ausgeschnittenen Vierecks vorstellt, und hieraus findet man mit Beiziehung der obigen (Abschn. II. §. 2.) dritten Gleichung (41.):

$$V_x = \frac{h\, x_0 x'_0}{\cos\varepsilon}. \qquad \textbf{(118. a.)}$$

Im andern Falle, wo die ausschneidenden Ebenen den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, stehen die projicirenden Linien senkrecht auf der Grundcoordinatenebene XAX' und diese Ebene bildet mit der Tangentialebene an O einen Winkel, der dem gleich ist, welchen die auf XAX' senkrecht stehende Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ mit der auf der Tangentialebene senkrecht stehenden Normale an O einschliesst, und den wir durch ε' bezeichnen wollen. Deswegen ist dem (Abschn. I. §. 1.) mitgetheilten Satze (2. a.) zur Folge

$$V_u \cos\varepsilon' = \frac{u_0 u'_0}{\sin W},$$

wenn V_u die Grösse des durch Ebenen, die mit den Polarcoordinaten $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ und $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, ausgeschnittenen Vierecks vorstellt, und hieraus findet man:

$$V_u = \frac{u_0 u'_0}{\sin W \cos\varepsilon'}. \qquad \textbf{(118. b.)}$$

Lässt man nun den beweglichen Punct O′ dem beliebigen aber unveränderlich gedachten O stets näher rücken, bis die Grössen x_0, x'_0 und u_0, u'_0 so klein werden, dass sich dieselben durch kein endliches Maas mehr angeben lassen, so schmiegen sich alle in solcher Nähe bei O liegenden Puncte O′ der krummen Fläche der Tangentialebene an dieser Stelle möglichst an, und die Stücke, welche von parallelen Ebenen, die durch solche Puncte gehen und einer und derselben Geraden parallel sind, aus der krummen Fläche und ihrer Tangentialebene an der Stelle O ausgeschnitten werden, unterscheiden sich, nach Aussage des in Nr. 146. angezeigten Satzes a), von einander um keine Grösse, die mit ihrer eignen Grösse vergleichbar wäre. Aus diesem Grunde nehmen für so kleine Werthe von x_0, x'_0 oder u_0, u'_0 die auf der rechten Seite der Gleichungen (117. f.) und (118. a. und b.) stehenden Ausdrücke, sowohl die, welche x_0 und x'_0, als die, welche u_0 und u'_0 in sich enthalten und die Flächengrösse von Stücken liefern, die durch dieselben Ebenen aus der krummen Fläche und ihrer Tangentialebene an O ausgeschnitten werden, Werthe an, die sich von einander um keine Grösse unterscheiden, die mit ihrer eigenen Grösse vergleichbar wäre, und in Folge dessen hat man dem im Paragraph 12. dieses Abschnittes erwiesenen Satze (41. a. und b.) gemäss:

(118. c.) $$\ddot{\partial}\mathfrak{F}_\xi = \frac{h}{\cos\varepsilon} \quad \text{und} \quad \ddot{\partial}\mathfrak{F}_\eta = \frac{1}{\cos\varepsilon'\sin W}.$$

Diese Gleichungen beziehen sich zwar auf den unveränderlich gedachten Punct O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind; da man indessen hierzu jeden beliebigen Punct der Fläche, der eine völlige Begrenzung des Flächenstücks durch Ebenen der angezeigten Art zulässt, nehmen darf, so kann man in ihnen die Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' durch x, x′, x″ und u, u′, u″ ersetzen, und diese dann wieder als dem veränderlichen Puncte O′ angehörig sich vorstellen, nur muss dann alles, was sich in jenen Gleichungen auf den Punct O bezieht, in den neuen auf eine bestimmte Lage des beweglichen Punctes O′ bezogen werden. So erhält man:

(118. d.) $$\ddot{\partial}\mathfrak{F}_x = \frac{h}{\cos\varepsilon} \quad \text{und} \quad \ddot{\partial}\mathfrak{F}_u = \frac{1}{\cos\varepsilon'\sin W},$$

wenn man hier unter ε und ε' die Winkel versteht, welche die Axen AX″ und A$\mathfrak{X}$″ mit der zum beweglichen Puncte O′ gehörigen Normale der krummen Fläche bildet. Desshalb wird die Grösse $\cos\varepsilon$ oder $\cos\varepsilon'$ in den Gleichungen (118. d.) im Allgemeinen eine Function von x, x′ oder u, u′ werden, welche die zweite Ableitung von $\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_u$, einmal nach x oder u und das zweite Mal nach x′ oder u′ genommen, hergiebt, und aus welcher man daher durch doppelte Integration, einmal nach x oder u und das zweite Mal nach x′ oder u′, die gesuchte Function $\mathfrak{F}_x$ oder $\mathfrak{F}_u$ findet; es ist nämlich der oben (§. 13. Nr. 135.) erwähnten Bezeichnungsweise nach:

(118. e.) $$\mathfrak{F}_x = \int_{x_0}^{x}\int_{x'_0}^{x'} \frac{h}{\cos\varepsilon} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_u = \int_{u_0}^{u}\int_{u'_0}^{u'} \frac{1}{\cos\varepsilon'\sin W}.$$

153) Nun bleibt noch zu zeigen übrig, wie sich die in den Gleichungen (118. d.) enthaltenen Grössen $\cos\varepsilon$ und $\cos\varepsilon'$ als Functionen von x und x′ oder von u und u′ darstellen lassen. Bezeichnen wir durch p, p′, p″ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Normale der Fläche an dem Puncte O′, dessen Coordinaten x, x′, x″ und u, u′, u″ sind, mit den Axen AX, AX′, AX″ eingeht, und beachtet man, dass die Grundaxe AX″ an denselben Axen die schiefen Projectionszahlen 0, 0, 1 giebt, während die Po-

laraxe $A\mathfrak{X}''$ an diesen Axen die senkrechten Projectionszahlen 0, 0, $\mathfrak{C}_2''$ liefert, so geben die oben (Abschn. I. §. 2.) mitgetheilten Gleichungen (9. a. und b.) sogleich an die Hand, weil ε und ε' die Winkel sind, welche die Richtungen AX'' und $A\mathfrak{X}''$ mit der Normale der Fläche an dem Puncte O' bilden, dass

$$\cos\varepsilon = \mathfrak{p}'' \quad \text{und} \quad \cos\varepsilon' = \mathfrak{C}_2''\, p''$$

ist. Da nun nach Aussage der in Nr. 147. für die Normale einer krummen Fläche gelieferten Gleichungen (97. a.), wenn man in ihnen den beliebig hervorgehobenen Punct O durch den beweglich gedachten O' ersetzt,

$$\mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' = \overset{10}{\partial} x'' : \overset{01}{\partial} x'' : -1 \quad \text{und} \quad p : p' : p'' = \overset{10}{\partial} u'' : \overset{01}{\partial} u'' : -1$$

ist, und sich aus den hier gegebenen Verhältnisszahlen für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ und p, p', p'' diese Grössen selber auf die oben (Abschn. I. §. 2.) in Nr. 21. angezeigte Weise finden lassen, so erhält man aus den dortigen Gleichungen (24.) und (25. a.), indem man $\overset{10}{\partial} u''$, $\overset{01}{\partial} u''$, -1 für m, m', m'' und $\overset{10}{\partial} x''$, $\overset{01}{\partial} x''$, -1 für n, n', n'' setzt und die Buchstaben a'' und c'' mit denen p'' und $\mathfrak{p}''$ vertauscht, auf der Stelle:

$$\mathfrak{p}'' = \sqrt{\frac{\overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} u'' \cos W - \cos W'}{\overset{10}{\partial} x'' (\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)}} \quad \text{und} \quad p'' = \sqrt{\frac{(\overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} u'' \cos W - \cos W')^{-1}}{(\overset{10}{\partial} x'')^{-1} (\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)}},$$

welche sich mit Zuziehung der ersten Gleichung (91. d.) auch so schreiben lassen:

$$\mathfrak{p}'' = \frac{(1 - \overset{10}{\partial} u'' \cos W' - \overset{01}{\partial} u'' \cos W'')^{\frac{1}{2}}}{(\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad p'' = \frac{(1 - \overset{10}{\partial} u'' \cos W' - \overset{01}{\partial} u'' \cos W'')^{-\frac{1}{2}}}{(\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Mittelst dieser Werthe verwandeln sich nun die Gleichungen (118. d.) in:

$$\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x = h \frac{(\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \overset{10}{\partial} u'' \cos W' - \overset{01}{\partial} u'' \cos W'')^{\frac{1}{2}}}, \quad \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u = \frac{1}{h} \frac{(\overset{10}{\partial} x'' \overset{10}{\partial} u'' + \overset{01}{\partial} x'' \overset{01}{\partial} u'' + 1)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \overset{10}{\partial} u'' \cos W' - \overset{01}{\partial} u'' \cos W'')^{-\frac{1}{2}}} \qquad (119.\ a.)$$

und es ist der Gleichung (91. e.) gemäss:

$$(1 - \overset{10}{\partial} u'' \cos W' - \overset{01}{\partial} u'' \cos W'') \left(\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''} - \overset{10}{\partial} x'' \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}} - \overset{01}{\partial} x'' \frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}\right) = 1.$$

Da den im Paragraph 12. dieses Abschnitts (Nr. 112.) gegebenen Auseinandersetzungen gemäss

$$\overset{10}{\partial} x'' = -\frac{\overset{100}{\partial} \varphi_x}{\overset{001}{\partial} \varphi_x}, \quad \overset{01}{\partial} x'' = -\frac{\overset{010}{\partial} \varphi_x}{\overset{001}{\partial} \varphi_x} \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial} u'' = -\frac{\overset{100}{\partial} \psi_u}{\overset{001}{\partial} \psi_u}, \quad \overset{01}{\partial} u'' = -\frac{\overset{010}{\partial} \psi_u}{\overset{001}{\partial} \psi_u},$$

oder wenn man auch hier wieder die in (102. b.) eingeführten Bezeichnungen beibehält:

$$\overset{10}{\partial} x'' = -\varphi_x', \quad \overset{01}{\partial} x'' = -\varphi_x'' \quad \text{und} \quad \overset{10}{\partial} u'' = -\psi_u', \quad \overset{01}{\partial} u'' = -\psi_u''$$

ist, so kann man der ersten der Gleichung (119. a.) auch die folgende Gestalt geben:

$$\text{(119. b.)} \quad \left\{\begin{array}{l} \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x = h\,\dfrac{(\varphi'_x\psi'_u+\varphi''_x\psi''_u+1)^{\frac{1}{2}}}{(1+\psi'_u\cos W'+\psi''_u\cos W'')^{\frac{1}{2}}}, \\ \text{sowie der zweiten die} \\ \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u = \dfrac{(\varphi'_x\psi'_u+\varphi''_x\psi''_u+1)^{\frac{1}{2}}}{h\left(\dfrac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{E}''_2}+\varphi'_x\dfrac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}}+\varphi''_x\dfrac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}'_1}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{array}\right.$$

Sind nun die Ausdrücke φ_x und ψ_u von solcher Art, dass ψ_u unmittelbar aus φ_x hervorgeht, wenn man in diesem für x, x', x'' ihre durch die Gleichungen (48. a. Absch. I.) gegebenen Werthe einsetzt, und φ_x aus ψ_u, wenn man in letzterm u, u', u'' in x, x', x'' mittelst der Gleichungen (15. a. Absch. I.) ausdrückt, in welchem Falle wir die combinirten Gleichungen $\varphi_x=0$ und $\psi_u=0$ nächste combinirte nennen werden, ähnlich, wie wir diess schon unter denselben Umständen bei den Gleichungen der Ebene und der Geraden gethan haben, so ist den Regeln der Ableitungsrechnung gemäss:

$$\overset{001}{\partial}\varphi_x=\overset{100}{\partial}\psi_u\,\overset{001}{\delta}u+\overset{010}{\partial}\psi_u\,\overset{001}{\delta}u'+\overset{001}{\partial}\psi_u\,\overset{001}{\delta}u'' \quad \text{und} \quad \overset{001}{\partial}\psi_u=\overset{100}{\partial}\varphi_x\,\overset{001}{\delta}x+\overset{010}{\partial}\varphi_x\,\overset{001}{\delta}x'+\overset{001}{\partial}\varphi_x\,\overset{001}{\delta}x''$$

oder mit Zuziehung der in (102. b.) eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{\overset{001}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\psi_u}=\psi'_u\overset{001}{\delta}u+\psi''_u\overset{001}{\delta}u'+\overset{001}{\delta}u'' \quad \text{und} \quad \frac{\overset{001}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}=\varphi'_x\overset{001}{\delta}x+\varphi''_x\overset{001}{\delta}x'+\overset{001}{\delta}x''.$$

Aus den Gleichungen (91. a.) findet man aber

$$\overset{001}{\delta}u=\cos W',\quad \overset{001}{\delta}u'=\cos W'',\quad \overset{001}{\delta}u''=1 \quad \text{und} \quad \overset{001}{\delta}x=\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}},\quad \overset{001}{\delta}x'=\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}'_1},\quad \overset{001}{\delta}x''=\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{E}''_2}$$

und durch diese Werthe gehen die vorigen beiden Gleichungen über in:

$$\text{(119. c.)} \quad \frac{\overset{001}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\psi_u}=1+\psi'_u\cos W'+\psi''_u\cos W'' \quad \text{und} \quad \frac{\overset{001}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}=\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{E}''_2}+\varphi'_x\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}}+\varphi''_x\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{E}'_1},$$

und es gehen mittelst der Relationen (119. c.) die Gleichungen (119. b.) in die nachfolgenden über:

$$\text{(119. d.)} \quad \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x=h\left((\varphi'_x\psi'_u+\varphi''_x\psi''_u+1)\frac{\overset{001}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u=\frac{1}{h}\left((\varphi'_x\psi'_u+\varphi''_x\psi''_u+1)\frac{\overset{001}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\psi_u}\right)^{\frac{1}{2}},$$

welche sich auch so schreiben lassen:

$$\text{(119. e.)} \quad \left\{\begin{array}{l} \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x=\dfrac{h}{\overset{001}{\partial}\varphi_x}\left(\overset{100}{\partial}\varphi_x\overset{100}{\partial}\psi_u+\overset{010}{\partial}\varphi_x\overset{010}{\partial}\psi_u+\overset{001}{\partial}\varphi_x\overset{001}{\partial}\psi_u\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{und} \\ \overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u=\dfrac{1}{h\,\overset{001}{\partial}\psi_u}\left(\overset{100}{\partial}\varphi_x\overset{100}{\partial}\psi_u+\overset{010}{\partial}\varphi_x\overset{010}{\partial}\psi_u+\overset{001}{\partial}\varphi_x\overset{001}{\partial}\psi_u\right)^{\frac{1}{2}}; \end{array}\right.$$

hierdurch aber lassen sich die Grössen $\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_x$ und $\overset{11}{\partial}\mathfrak{F}_u$ unmittelbar aus den gegebenen nächsten combinirten Gleichungen der krummen Fläche entnehmen.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch eines Vortheils gedenken, den der Gebrauch von nächsten combinirten Gleichungen in sich schliesst. Es ist nämlich aus dem kurz vorher angegebenen Grunde, wenn $\varphi_x = 0$ und $\psi_u = 0$ nächste combinirte Gleichungen sind:

$$\overset{100}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u \overset{100}{\delta} u + \overset{010}{\partial}\psi_u \overset{100}{\delta} u' + \overset{001}{\partial}\psi_u \overset{100}{\delta} u'',$$

$$\overset{010}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u \overset{010}{\delta} u + \overset{010}{\partial}\psi_u \overset{010}{\delta} u' + \overset{001}{\partial}\psi_u \overset{010}{\delta} u'',$$

$$\overset{001}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u \overset{001}{\delta} u + \overset{010}{\partial}\psi_u \overset{001}{\delta} u' + \overset{001}{\partial}\psi_u \overset{001}{\delta} u''$$

oder, wenn man an die Stelle der durch δ angedeuteten Ableitungen ihre Werthe setzt:

$$\overset{100}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u + \overset{010}{\partial}\psi_u \cos W + \overset{001}{\partial}\psi_u \cos W',$$

$$\overset{010}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u \cos W + \overset{010}{\partial}\psi_u + \overset{001}{\partial}\psi_u \cos W'',$$

$$\overset{001}{\partial}\varphi_x = \overset{100}{\partial}\psi_u \cos W' + \overset{010}{\partial}\psi_u \cos W'' + \overset{001}{\partial}\psi_u,$$

und es gelten diese Gleichungen für jeden Punct der krummen Fläche, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten x, x', x'' und u, u', u'' sind; multiplicirt man aber die erste dieser Gleichungen mit x, die zweite mit x', die dritte mit x'' und addirt die drei so sich ergebenden Resultate zu einander, so findet man mit Zuziehung der Gleichungen (15. a. Absch. I.) auf der Stelle, dass

$$\overset{100}{\partial}\varphi_x x + \overset{010}{\partial}\varphi_x x' + \overset{001}{\partial}\varphi_x x'' = \overset{100}{\partial}\psi_u u + \overset{010}{\partial}\psi_u u' + \overset{001}{\partial}\psi_u u''$$

ist in Bezug auf jeden Punct der krummen Fläche. Stellen nun ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' die schiefen und senkrechten Coordinaten von irgend einem bestimmt hervorgehobenen Puncte derselben krummen Fläche vor, so ist daher

$$\overset{100}{\partial}\varphi_\xi \xi + \overset{010}{\partial}\varphi_\xi \xi' + \overset{001}{\partial}\varphi_\xi \xi'' = \overset{100}{\partial}\psi_\eta \eta + \overset{010}{\partial}\psi_\eta \eta' + \overset{001}{\partial}\psi_\eta \eta''.$$

Geht man jetzt auf die Gleichungen (92. b.) zurück, wodurch die Tangentialebene der krummen Fläche an der hervorgehobenen Stelle dargestellt wird, so zeigt die vorstehende Relation, dass die constanten Glieder in den beiden Gleichungen (92. b.) einerlei Grösse annehmen, dass also diese beiden Gleichungen der Tangentialebene in der ihnen eigenthümlichen Form nothwendig nächste combinirte werden, wenn die der krummen Fläche es sind, und die Vorzüge besitzen, welche wir im zweiten Abschnitte an combinirten, eine Ebene darstellenden Gleichungen aufgefunden haben.

154) Um den Körperinhalt eines Stücks des Raumes zu finden, das theils von einer gegebenen krummen Fläche und theils von Ebenen, die mit den Coordinatenebenen parallel laufen, ringsum völlig begrenzt wird, hat man ein Verfahren einzuhalten, welches dem bei der Bestimmung des Flächeninhalts eines Stücks der theilweise von einer ebenen Curve und theilweise von Geraden, die mit den Axen des zu dieser Curve gehörigen ebenen Coordinatensystems parallel laufen, begrenzten Coordinatenebene gebrauchten ähnlich ist, und in Folgendem besteht. Denken wir uns zuvörderst einen veränderlichen Punct O' im Raume (Fig. 6.) und durch ihn mit den drei Grund-Coordinatenebenen eines aus den Axen AX, AX', AX'' zusammenge-

setzten beliebigen Coordinatensystems parallel drei Ebenen gelegt, welche die krumme Fläche in den ebenen Curven $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}\mathfrak{P}'_1\mathfrak{O}'_1$, $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}'_2$, $\mathfrak{O}'_2\mathfrak{P}'_2\mathfrak{P}_1\mathfrak{O}'_1$ schneiden und in Verbindung mit dem Stück $\mathfrak{O}'\mathfrak{O}'_1\mathfrak{O}'_2\mathfrak{O}'$ der krummen Fläche den Raum völlig begrenzen, so ändert sich die Grösse des so begrenzten Körperraums offenbar nur mit der Lage des Punctes O′ ab, ist also eine Function dieser Lage oder von den sie bestimmenden Coordinaten des Punctes O′. Weil aber der Punct O′ im Allgemeinen nicht in der krummen Fläche liegt, und desswegen zwischen seinen Coordinaten nicht die Gleichung statt findet, wodurch die Puncte der krummen Fläche dargestellt werden, vielmehr die drei Coordinaten des Punctes O′, insofern er nur einen völlig begrenzten Raum zu liefern im Stande ist, ganz nach Belieben genommen werden können, und daher als völlig unabhängig von einander gedacht werden müssen, so hat man sich die Grösse des zu suchenden Körperinhalts als eine Function der drei Coordinaten des Punctes O′ vorzustellen. Bleiben wir bei schiefen Coordinaten stehen und bezeichnen x, x', x'' die des Punctes O′ an den Axen AX, AX', AX'' des Coordinatensystems, so hat man sich unter dem fraglichen Körperinhalt eine Function der drei Unabhängigen x, x', x'' zu denken, die wir durch $\mathfrak{K}_x$ bezeichnen wollen.

Nehmen wir im Innern des zu bestimmenden Körperraums irgendwo noch einen zweiten Punct O an, der zwar eben so beliebig wie der O′ ist, den wir uns aber nicht wie diesen beweglich, sondern in unveränderlicher Weise hervorgehoben vorstellen, und dessen schiefe Coordinaten wir durch ξ, ξ', ξ'' anzeigen werden, und legen wir durch diesen Punct O drei neue Axen OX, OX', OX'', welche den ursprünglichen parallel und gleichläufig sind, so finden, wenn x_0, x'_0, x''_0 die schiefen Coordinaten des Punctes O′ an diesen neuen Axen vorstellen, zwischen diesen und den vorigen Coordinaten die Gleichungen

(120. a.) $$x = \xi + x_0\,,\quad x' = \xi' + x'_0\,,\quad x'' = \xi'' + x''_0$$

statt, den im ersten Abschnitte aufgefundenen Gleichungen (7.) gemäss. Legt man auch durch diesen Punct O drei Ebenen, welche den durch O′ gelegten parallel laufen und die krumme Fläche in den ebenen Curven $\mathfrak{P}'\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}'_2$, $\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}'_1$ schneiden, so schliessen diese Ebenen in Verbindung mit dem Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}$ der krummen Fläche einen völlig begrenzten Raum ein, dessen Grösse $\mathfrak{K}_\xi$ ist, weil der Punct O einer von denen ist, die der O′ einnehmen kann, und es ist nach Analogie der im Paragraph 12. dieses Abschnitts angezeigten Gleichungen (3. a. und b.):

(120. b.) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{K}_{x,x',x''} - \mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''} = {} & \overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 + \overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0 + \overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0 + \overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 x'_0 \\ & + \overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x'^2_0}{1.2} + \overset{101}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 x''_0 + \overset{011}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0 x''_0 + \overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x''^2_0}{1.2} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

wo wir zur bessern Unterscheidung auf der linken Seite dem Functionszeichen $\mathfrak{K}$ die drei Coordinaten x, x', x'' oder ξ, ξ', ξ'', welche in der Function auftreten, angehängt haben, während die von uns eingeführte Bezeichnungsweise gewöhnlich nur die erste von ihnen anhängt, wie auch auf der rechten Seite dieser Gleichung geschehen ist. Es stellt hierbei $\mathfrak{K}_{x,x',x''} - \mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''}$ den zwischen den beiden vorhin genannten pyramidalischen Räumen (deren Spitzen O′ und O und deren Grundflächen $\mathfrak{O}'\mathfrak{O}'_1\mathfrak{O}'_2\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}$ waren) und der krummen Fläche liegenden Raum vor, welcher aus folgenden sieben Theilen zusammengesetzt ist:

1) Aus dem Parallelepiped, welches von den Parallelogrammen $O'PP'_1P_1$ und $OP'P_2P'_2$, $O'PP'P_2$ und $OP'_1P_1P'_2$, $O'P_1P'_2P_2$ und $OP'PP'_1$ begrenzt wird, und dessen Inhalt durch R vorgestellt werden soll;

2) aus den drei prismatischen Räumen S, S′, S″, von welchen der S durch die Flächen OP'_1PP' und $\mathfrak{O}\mathfrak{P}\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'$ und durch die mit der Axe AX parallelen Seiten $P\mathfrak{O}'$, $P'_1\mathfrak{P}$, $P'\mathfrak{P}'$, $O\mathfrak{O}$ begrenzt wird, — der zweite S′ durch die Flächen $OP'_1P_1P'_2$ und $\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{O}'_1\mathfrak{P}'_1$ und durch die mit der Axe AX′ parallelen Seiten $O\mathfrak{O}_1$, $P'_1\mathfrak{P}'_1$, $P_1\mathfrak{O}'_1$, $P'_2\mathfrak{P}_1$ — der dritte S″ durch die Flächen $OP'P_2P'_2$ und $\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}'_2\mathfrak{P}'_2$ und durch die mit der Axe AX″ parallelen Seiten $O\mathfrak{O}_2$, $P'\mathfrak{P}_2$, $P_2\mathfrak{O}'_2$, $P'_2\mathfrak{P}'_2$;

3) aus den drei keilförmigen Räumen T, T′, T″, von welchen der T die Gerade OP'_2 zur Schneide und das Stück $\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'_2\mathfrak{O}_2$ der krummen Fläche zum Rücken hat, — der T′ die Gerade OP′ zur Schneide und das Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_2\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}'\mathfrak{O}$ zum Rücken — der T″ die Gerade OP'_1 zur Schneide und das Stück $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}\mathfrak{O}$ der krummen Fläche zum Rücken.

Es ist diesen Bezeichnungen gemäss:

$$\mathfrak{K}_{x,x',x''} - \mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''} = R + S + S' + S'' + T + T' + T'',$$

oder der Gleichung (120. b.) zur Folge:

$$R + S + S' + S'' + T + T' + T'' = \overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 + \overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0 + \overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0$$
$$+ \overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 x'_0 + \overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0'^2}{1.2} + \overset{101}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 x''_0 + \overset{011}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0 x''_0 + \overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0''^2}{1.2} + \dots \quad \textbf{(120. c.)}$$

und die Theile S, S′, S″ und T, T′, T″ lassen sich auf die jetzt folgende Weise darstellen.

Denkt man sich den beweglichen Punct O′ in den P'_2 gerückt, wo x′ in ξ′ und x″ in ξ″ übergegangen ist, x dagegen seinen vorigen Werth behält, so verwandelt sich für diese Lage des Punctes O′, bei welcher $x'_0 = 0$ und $x''_0 = 0$ ist, die Gleichung (120. b.) in:

$$\mathfrak{K}_{x,\xi',\xi''} - \mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''} = \overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 + \overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \dots;$$

es stellt aber $\mathfrak{K}_{x,\xi',\xi''} - \mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''}$ den Unterschied zwischen den zwei pyramidenförmigen Räumen vor, welche die Puncte P'_2 und O zur Spitze und die Stücke $\mathfrak{O}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'_2\mathfrak{O}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}$ der krummen Fläche zur Grundfläche haben, und dieser Unterschied ist nichts anders, als der keilförmige Theil T, dessen Schneide OP'_2 und Rücken $\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}_1\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}'_2\mathfrak{O}_2$ ist, so dass man hat:

$$T = \overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0 + \overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0^2}{1.2} + \dots \quad \textbf{(120. d.)}$$

Eben so findet man, wenn man den Punct O′ successive in die Puncte P′ und P'_1 rücken lässt, weil beim ersten $x_0 = 0$ und $x''_0 = 0$, beim andern $x_0 = 0$ und $x'_0 = 0$ wird, und die auf der linken Seite der Gleichung (120. b.) stehende Differenz in den beiden Fällen T′ und T″ wird:

$$T' = \overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0 + \overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0'^2}{1.2} + \dots \quad \text{und} \quad T'' = \overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0 + \overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi \frac{x_0''^2}{1.2} + \dots \quad \textbf{(120. e.)}$$

Lässt man ferner den beweglichen Punct O′ in den P übergehen, wo x in ξ sich verwandelt, x′ und x″ aber ihre alten Werthe beibehalten, so nimmt für diese Lage des Punctes O′, bei welcher $x_0 = 0$ wird, die Gleichung (120. b.) die folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{K}_{\xi,x',x''}-\mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''}=\overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0+\overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0+\overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x'^2_0}{1.2}+\overset{011}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0x''_0+\overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x''^2_0}{1.2}+\ldots,$$

in welcher die Differenz $\mathfrak{K}_{\xi,x',x''}-\mathfrak{K}_{\xi,\xi',\xi''}$ nichts anders ist, als der Unterschied zwischen den zwei pyramidenförmigen Räumen, deren Spitzen P und O sind und welche die Stücke $\mathfrak{O}'\mathfrak{P}'_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{O}'$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{O}_1\mathfrak{O}_2\mathfrak{O}$ der krummen Fläche zu ihren Grundflächen haben; der Unterschied zwischen diesen beiden Räumen ist aber aus den Theilen S, T′ und T″ zusammengesetzt, so dass man hat:

(120. f.) $$S+T'+T''=\overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0+\overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0+\overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x'^2_0}{1.2}+\overset{011}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0x''_0+\overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x''^2_0}{1.2}+\ldots\ldots$$

Eben so findet man, wenn man den Punct O′ successive in die Puncte P_1 und P_2 rücken lässt, weil beim ersten $x'_0=0$ und beim zweiten $x''_0=0$ ist und die auf der linken Seite der Gleichung (120. b.) stehende Differenz in den beiden Fällen $S'+T+T''$ und $S''+T+T'$ wird:

(120. g.) $$\left\{\begin{array}{l} S'+T+T''=\overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0+\overset{001}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x''_0+\overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x^2_0}{1.2}+\overset{101}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0x''_0+\overset{002}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x''^2_0}{1.2}+\ldots\ldots \\ \text{und} \\ S''+T+T'=\overset{100}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0+\overset{010}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x'_0+\overset{200}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x^2_0}{1.2}+\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0x'_0+\overset{020}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x'^2_0}{1.2}+\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Zieht man jetzt von der Summe der Gleichungen (120. c.), (120. d.) und (120. e.) die Summe der Gleichungen (120. f.) und (120. g.) ab, so erhält man:

$$R=\overset{111}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0x'_0x''_0+\overset{211}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x^2_0}{1.2}x'_0x''_0+\overset{121}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0\frac{x'^2_0}{1.2}x''_0+\overset{112}{\partial}\mathfrak{K}x_0x'_0\frac{x''^2_0}{1.2}+\ldots\ldots$$

oder weil das Parallelepiped R die Längen x_0, x'_0, x''_0 zu seinen Seiten hat und diese dieselben Winkel mit einander bilden, wie die Axen AX, AX′, AX″, sonach

(120. h.) $$R=h\,x_0x'_0x''_0$$

ist, wenn h die Grösse vorstellt, welche im ersten Abschnitt durch die Gleichungen (40.) oder (42.) definirt worden ist, und die den Inhalt eines über den Coordinatenaxen beschriebenen Rhomboeders hergiebt, dessen Seiten sämmtlich der Längeneinheit gleich sind, so kann man die vorige Gleichung auch so schreiben:

$$h\,x_0x'_0x''_0=\overset{111}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0x'_0x''_0+\overset{211}{\partial}\mathfrak{K}_\xi\frac{x^2_0}{1.2}x'_0x''_0+\overset{121}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0\frac{x'^2_0}{1.2}x''_0+\overset{112}{\partial}\mathfrak{K}_\xi x_0x'_0\frac{x''^2_0}{1.2}+\ldots,$$

aus der sich folgern lässt, dass

(121. a.) $$\overset{111}{\partial}\mathfrak{K}_\xi=h \quad\text{und}\quad \overset{211}{\partial}\mathfrak{K}_\xi=0,\quad \overset{121}{\partial}\mathfrak{K}_\xi=0,\quad \overset{112}{\partial}\mathfrak{K}_\xi=0,\quad \text{u. s. f.}$$

ist, welche Gleichungen sich indessen sämmtlich auf deren erste zurückziehen, da alle übrigen eine nothwendige Folge von dieser sind. Es sind zwar die Gleichungen (121. a.) für den unveränderlichen Punct O, dessen schiefe Coordinaten ξ, ξ', ξ'' sind, aufgefunden worden, weil jedoch jeder in dem völlig begrenzten Raume der Fig. 6. liegende Punct zu dem O genommen werden kann, so bleiben jene Gleichungen wahr, welchem von diesen Puncten die Coordinaten ξ, ξ', ξ'' auch angehören mögen; man darf sich daher unter dem Puncte O jeden vorstellen, der zu einem völlig begrenzten Raume Gelegenheit darbietet, und in diesem Sinne kann man

sagen, dass die Coordinaten ξ, ξ', ξ'' eben so veränderlich sind, wie die x, x', x''. Setzt man, um diess augenfälliger zu machen, in die Gleichungen (121. a.) x, x', x'' an die Stelle von ξ, ξ', ξ'', so werden sie, wenn man blos auf deren erste Rücksicht nimmt:

$$\overset{111}{\partial}\,\mathfrak{K}_x = h. \qquad \textbf{(121. b.)}$$

Aus dieser Gleichung hat man nun durch eine dreifache Integration, jedesmal nach einer andern der drei Veränderlichen x, x', x'' genommen, die Function $\mathfrak{K}_x$ aufzusuchen.

Die vorstehenden Betrachtungen ändern sich nicht und man wird wieder zu denselben Resultaten hingeführt, wenn die durch den Punct O' gehenden, den zu suchenden Körperraum begrenzenden Ebenen, ehe sie die krumme Fläche erreichen, neuen, jedoch unveränderlichen Begrenzungsebenen begegnen, die mit einer der Coordinatenebenen parallel laufen. Solche Abänderungen haben auf die Gleichungen (121. a. und b.) keinen Einfluss, sie machen blos, dass die Grenzbestimmungen während des Integrirens in anderer Weise geschehen müssen.

155) Wenn die durch O' gelegten, den zu findenden Körperraum begrenzenden Ebenen nicht den Grund-Coordinatenebenen, sondern den Polar-Coordinatenebenen parallel laufen, so lassen sich die Grenzbestimmungen nur durch senkrechte Coordinaten einfach ausdrücken. In einem solchen Falle hat man sich den gesuchten Körperraum als eine Function der senkrechten Coordinaten u, u', u'' des Punctes O' zu denken, welche wir durch $\mathfrak{K}_u$ bezeichnen wollen, und nun auf diese alle Betrachtungen der vorigen Nummer in Anwendung zu bringen. Versinnlicht man den jetzigen Fall wieder durch die Fig. 6., indem man sich in ihr die Begrenzungsebenen den Polar-Coordinatenebenen parallel vorstellt, so gelangt man Schritt um Schritt ganz wie zuvor zu der Gleichung:

$$R = \overset{111}{\partial}\,\mathfrak{K}_\eta\, u_0 u_0' u_0'' + \overset{211}{\partial}\,\mathfrak{K}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} u_0' u_0'' + \overset{121}{\partial}\,\mathfrak{K}_\eta\, u_0 \frac{u_0'^2}{1.2} u_0'' + \overset{112}{\partial}\,\mathfrak{K}_\eta\, u_0 u_0' \frac{u_0''^2}{1.2} + \ldots, \qquad \textbf{(122. a.)}$$

wenn η, η', η'' die senkrechten Coordinaten eines zweiten bestimmt hervorgehobenen Punctes O vorstellen und u_0, u_0', u_0'' die senkrechten Coordinaten des Punctes O' an den neuen Axen OX, OX', OX'' bezeichnen, so dass

$$u = \eta + u_0, \quad u' = \eta' + u_0', \quad u'' = \eta'' + u_0''$$

ist, und es bedeutet wieder R den Inhalt des durch die Parallelogramme $O'PP_1'P_1$ und $OP'P_2P_2'$, $O'PP'P_2$ und $OP_1'P_1P_2'$, $O'P_1P_2'P_2$ und $OP'PP_1'$ begrenzten Parallelepipeds, nur mit dem Unterschiede, dass diese begrenzenden Ebenen jetzt den Polar-Coordinatenebenen parallel laufen. Der Inhalt dieses Parallelepipeds lässt sich aber am einfachsten auf folgende Weise finden. Da nämlich dieses Parallelepiped in Bezug auf das aus den Polaraxen gebildete System genau das ist, was das in voriger Nummer in Bezug auf das aus den Grundaxen gebildete System war, so wird hier nach Analogie der Gleichung (120. h.):

$$R = (h)(x_0)(x_0')(x_0''), \qquad \textbf{(122. b.)}$$

wenn (x_0), (x_0'), (x_0'') die Coordinaten des Punctes O' an den Polaraxen des neuen Systems bezeichnen und (h) in Bezug auf diese Polaraxen das vorstellt, was h in Bezug auf die Grundaxen, und man hat den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (57. b.) analog:

$$(x_0) = \frac{u_0}{\mathfrak{E}}, \quad (x_0') = \frac{u_0'}{\mathfrak{E}_1'}, \quad (x_0'') = \frac{u_0''}{\mathfrak{E}_2''},$$

wobei es gleichgültig ist, ob man die Grössen $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}''_2$ auf das neue oder auf das ursprüngliche System bezieht, da diese beiden Systeme parallele und gleichläufige Axen haben, wesshalb beide nicht nur zu einerlei Werthen von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{C}''_2$, sondern auch zu demselben Werth von (h) hinführen. Aus diesem Grunde wird auch (Abschn. I. §. 2. Gleich. 42.):

$$(h) = \sin \mathfrak{W}' \sin \mathfrak{W}'' \sin W$$

und nun geht die Gleichung (122. b.) mit Rücksicht auf die dortigen Gleichungen (41.) über in:

$$R = \frac{\sin^2 W \sin W' \sin W'' \sin \mathfrak{W}' \sin \mathfrak{W}''}{h^3} u_0 u'_0 u''_0$$

oder mit nochmaliger Zuziehung der dortigen Gleichung (42.) in:

$$R = \frac{1}{h} u_0 u'_0 u''_0 .$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung (122. a.) in:

$$\frac{1}{h} u_0 u'_0 u''_0 = \overset{111}{\partial} \mathfrak{K}_\eta u_0 u'_0 u''_0 + \overset{211}{\partial} \mathfrak{K}_\eta \frac{u_0^2}{1.2} u'_0 u''_0 + \overset{121}{\partial} \mathfrak{K}_\eta u_0 \frac{u'^2_0}{1.2} u''_0 + \overset{112}{\partial} \mathfrak{K}_\eta u_0 u'_0 \frac{u''^2_0}{1.2} + \dots$$

und liefert neben andern auch die Gleichungen:

(122. c.) $$\overset{111}{\partial} \mathfrak{K}_\eta = \frac{1}{h} \text{ oder auch } \overset{111}{\partial} \mathfrak{K}_u = \frac{1}{h},$$

woraus man durch eine dreifache Integration die Function $\mathfrak{K}_u$ aufzusuchen hat.

156) Hinsichtlich der beim Integriren der in den Gleichungen (119. e.) vorkommenden Ausdrücke erforderlichen Grenzbestimmungen ist alles das wieder anwendbar, was im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Grenzbestimmungen bei doppelten Integralen gesagt worden ist, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Grenzstellen hier nicht wie dort in der Ebene, sondern im Raume liegen, was indessen auch bei den dreifachen Integralen der Fall ist, zu welchen die Gleichungen (121. b.) oder (122. c.) auffordern, wesshalb wir bei diesen letztern stehen bleiben können. Um aber die eigenthümlichen Grenzbestimmungen, welche beim Integriren solcher Ausdrücke, wie die in den Gleichungen (121. b.) oder (122. c.) gegebenen sind, vorkommen, vor Augen legen zu können, wollen wir in allgemeinerer Weise voraussetzen, dass man

(123. a.) $$\overset{111}{\partial} \mathfrak{K}_x = f_x$$

habe, wobei $\mathfrak{K}_x$ und f_x Functionen der drei schiefen Coordinaten x, x′, x″ vorstellen, und dass der Ausdruck $\mathfrak{K}_x$ auf einen Raum beschränkt werde, der nach einer Seite hin durch eine Fläche, deren Gleichung in aufgelöster Gestalt

(123. b.) $$\mathfrak{x}'' = \varphi_\mathfrak{x}$$

ist, (wobei $\varphi_\mathfrak{x}$ eine Function von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ vorstellt, und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ die Coordinaten der Puncte dieser Fläche von derselben Art, wie die x, x′, x″ sind, zu bedeuten haben), und nach den übrigen Seiten hin durch Ebenen begrenzt wird, welche mit den Coordinatenebenen parallel durch den beweglichen Punct O′ hindurch gehen. Hierbei kann die Gleichung der Fläche für je zwei Werthe von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ nur ein einziges Ergebniss für $\mathfrak{x}''$ liefern, welches geschieht, wenn $\varphi_\mathfrak{x}$ nur eine einzige Form in sich enthält, oder sie kann für je zwei Werthe, die man den

Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ beilegen mag, für $\mathfrak{x}''$ mehrere Resultate liefern; im ersten Falle dehnt sich die Fläche in der Richtung der Ebene XAX' stets einfach aus; im andern Falle hingegen bildet sie, in dieser Richtung aufgefasst, gleichzeitig mehrere Flächenzüge, deren Anzahl von der Zahl der in $\varphi_{\mathfrak{x}}$ enthaltenen Formen abhängt. Wir werden zunächst blos den Fall ins Auge fassen, wo $\mathfrak{x}''$ durch $\varphi_{\mathfrak{x}}$ nur in einer einzigen Gestalt gegeben wird, und später den Fall folgen lassen, wo $\mathfrak{x}''$ durch $\varphi_{\mathfrak{x}}$ in mehreren Gestalten gegeben wird.

Da $\overset{111}{\partial}\mathfrak{K}_x$ die Ableitung von $\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x$ nach x'' ist für je zwei beliebige Werthe x und x', die jedoch als während des Ableitens sich nicht ändernd angenommen werden müssen, so erhält man umgekehrt aus der Gleichung (123. a.) mittelst der Integralrechnung auf die Weise wie in Nr. 135. gezeigt worden ist:

$$\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x = \int_{x_0''}^{x''} f_x\,, \qquad \textbf{(123. c.)}$$

wenn x_0'' den Werth von x'' anzeigt, unterhalb welchem man sich die Eigenschaft f_x als nicht mehr an dem Raume haftend vorstellt bei jeglichen Werthen x und x', welche man sich in der Gleichung (123. c.) vorhanden denken mag, wonach also die Bedeutung von x_0'' hier ganz verschieden von der ist, welche wir diesem Zeichen in den vorangegangenen Betrachtungen beigelegt haben. Erwägt man nun, dass bei unserer gegenwärtigen Untersuchung in Folge der der Eigenschaft f_x vorgeschriebenen Begrenzung, was auch die Werthe von x und x' sein mögen, nur solche Stellen des Raumes als mit der Eigenschaft f_x begabt gedacht werden können, welche zwischen der begrenzenden, durch die Gleichung (123. b.) gegebenen Fläche und zwischen der durch den beweglichen Punct O' mit der Coordinatenebene XAX' parallelen Ebene liegen, deren zur Axe AX'' gehörige Coordinate durch x'' vorgestellt wird, so sieht man sogleich ein, dass die Stelle der begrenzenden Fläche, welche den beliebig in jener Gleichung angenommenen Coordinatenwerthen x und x' entspricht, den Werth von x_0'' herzugeben habe, es wird nämlich x_0'' das $\mathfrak{x}''$ der Gleichung (123. b.), wenn man in dieser x und x' an die Stelle von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ setzt, so dass man also $x_0'' = \varphi_x$ zu nehmen hat, wodurch die Gleichung (123. c.) übergeht in:

$$\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x = \int_{x_0''=\varphi_x}^{x''} f_x \qquad \textbf{(123. d.)}$$

und es giebt $\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x$ nach den Erörterungen der eben erwähnten Nr. 135. des gegenwärtigen Abschnitts die über den vorgeschriebenen Raum von der Fläche bis zu der durch den beweglichen Punct O' mit XAX' parallel gelegten Ebene verbreiteten Eigenschaft, in so weit sie zu Puncten gehört, deren Coordinaten an den Axen AX und AX' des zu Grunde gelegten Coordinatensystems x und x' sind, zu erkennen, und zwar mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ genommen, je nachdem x_0'' kleiner oder grösser als x'' ist, d. h. je nachdem die Puncte der Fläche unterhalb oder oberhalb den Puncten der durch O' mit XAX' parallel gelegten Ebene liegen. Auf solche Weise hat man für $\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x$ eine Function von x, x', x'' gefunden, und um aus dieser $\mathfrak{K}_x$ zu erhalten, hat man den Regeln der Integralrechnung gemäss diese Function nach x und x' zu integriren, wobei man x'' als eine beliebige constante Grösse anzusehen hat; es ist daher von da ab $\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x$ wie eine Function der zwei Veränderlichen x und x' zu behandeln, die wir durch F_x vorstellen wollen, so dass die Gleichung (123. d.) wird:

$$\overset{\prime\prime}{\partial}\mathfrak{K}_x = F_x \,,$$

worin $\mathfrak{K}_x$ seine vorige Bedeutung völlig unverändert beibehält, nur dass man von der Veränderlichkeit des in ihm vorkommenden x'' gänzlich absieht, obgleich man diese Grösse noch immer als eine völlig beliebige von denen, welche eine vollständige Begrenzung möglich machen, anzusehen hat. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden. Es erstreckt sich entweder die durch den beweglichen Punct O' gelegte, mit XAX' parallele Begrenzungsebene bis zur Fläche hin, ohne einer neuen festen Begrenzung zu begegnen; dann giebt die Curve, in welcher die Fläche von dieser Begrenzungsebene geschnitten wird, in Verbindung mit den zwei Geraden, in welchen diese Begrenzungsebene von den zwei andern Begrenzungsebenen, welche den Coordinatenebenen XAX'' und $X'AX''$ parallel durch den beweglichen Punct O' gelegt werden, die Grenzen an, zwischen welchen die Werthe von x und x' eingeschlossen sind, wo man sich den Raum als mit der Eigenschaft F_x begabt zu denken hat. Da nun die Curve, in welcher die Fläche von der mit XAX' parallelen Begrenzungsebene geschnitten wird, durch die Gleichung

$$x'' = \varphi_{\mathfrak{x}}$$

gegeben ist, wenn x'' den vorhin bezeichneten beliebigen, aber constant gedachten Werth vorstellt, und diese Gleichung nach $\mathfrak{x}'$ aufgelöst die Form

(123. f.) $$\mathfrak{x}' = \psi_{\mathfrak{x}}$$

annehmen wird, wobei man sich $\psi_{\mathfrak{x}}$ als Function der einen Veränderlichen $\mathfrak{x}$ zu denken hat, so ist mithin unsere Aufgabe darauf zurückgeführt, den Betrag der über eine Ebene verbreiteten Eigenschaft F_x zu finden, welche einerseits durch die ebene Curve der Gleichung (123. f.) und andererseits durch die zwei Geraden begrenzt wird, welche durch den nur noch in dieser Ebene beweglich gedachten Punct O' parallel mit den Axen AX und AX' laufen. Diese Aufgabe ist aber genau die in Nr. 136. behandelte, und darum geschieht die weitere Behandlung hier ganz so, wie dort gezeigt worden ist.

Begegnet aber die durch den beweglichen Punct O' gelegte, mit XAX' parallele Begrenzungsebene ausser der bisher betrachteten Fläche und bevor sie diese trifft, noch einer neuen festen Begrenzung und bildet diese eine Cylinderfläche, deren Seiten mit der Coordinatenaxe AX'' parallel laufen, so dass in ihrer Gleichung die Coordinate x'' gar nicht zum Vorschein kommt, so bleibt noch Alles wie zuvor, nur dass die Ebene, auf welche die Eigenschaft F_x beschränkt wird, neben den Geraden, die durch den in ihr beweglichen Punct O' parallel mit den Axen AX und AX' gelegt werden, und neben der zur festen Begrenzung genommenen Curve, deren Gleichung (123. f.) ist, auch noch die Curve als einen Theil der jener Ebene angewiesenen festen Begrenzung erhält, in welcher die hier erwähnte Cylinderfläche von der mit XAX' parallelen Begrenzungsebene geschnitten wird, welche Cylinderfläche an allen mit XAX' parallelen Ebenen den gleichen Durchschnitt liefert. Immer aber wird die weitere Behandlung unserer jetzigen Aufgabe noch nach der in Nr. 136. oder Nr. 137. angezeigten Weise geschehen können, da dort gezeigt worden ist, wie sich der Betrag einer über eine beliebig wie begrenzte Ebene ausgebreiteten Eigenschaft ermitteln lässt. Ist hingegen die neu hinzugekommene Begrenzung keine Cylinderfläche, oder, wenn auch, doch keine solche, deren Seiten mit der Axe AX'' parallel laufen, so wird man doch immer die Aufgabe in der dort angezeigten Weise dadurch zu Ende führen können, dass man den vorgeschriebenen Raum

durch Cylinderflächen, deren Seiten mit der Coordinatenaxe AX'' parallel laufen, in mehrere Theile zerlegt, von denen jeder nur eine der mehrern Flächen in sich aufnimmt, und den auf jeden solchen Theil kommenden Betrag für sich aufsucht.

157) Wir betrachten jetzt noch den Fall, wo die Gleichung (123. b.), die der zur festen Begrenzung genommenen Fläche angehört, x'' in mehrern Formen giebt. In der Regel wird man nun hier zwar darauf angewiesen sein, aus den mehrern Formen diejenige herauszuheben, welche dem einfachen Flächenzuge angehört, der dem Raume zur festen Begrenzung dienen soll, und dann sind auf diese eine Form die verschiedenen in der vorigen Nummer angezeigten Operationen in Anwendung zu bringen. Bei mehrfachen Flächenzügen kann es jedoch auch geschehen, dass der Körperraum behandelt werden soll, welcher von zwei entgegengesetzten Seiten her zwei solche Flächenzüge als feste Grenzen, und von den übrigen Seiten mit den Coordinatenebenen XAX'' und $X'AX''$ parallele Ebenen als feste oder bewegliche Grenzen angewiesen bekommt, und dann treten hier wieder alle die Betrachtungen ein, welche denen in Nr. 137. bei Flächenräumen unter ähnlichen Umständen gegebenen analog sind. Denkt man sich nämlich eine mit XAX' parallele Ebene irgendwo gelegt, welche die der Axe AX'' parallelen Begrenzungsebenen oder deren Verlängerungen schneidet, und sind

$$x''=\varphi'_x \quad \text{und} \quad x''=\varphi''_x$$

die Gleichungen der beiden begrenzenden Flächenzüge, so sind

$$\int_{x''_0=\varphi'_x}^{x''} f_x \quad \text{und} \quad \int_{x''_0=\varphi''_x}^{x''} f_x$$

die ersten Integrale in Bezug auf die zwei Räume, von denen jeder einen der zwei Flächenzüge zur festen Grenze hat, uud ausserdem noch von den, mit den drei Coordinatenebenen parallelen Ebenen eingeschlossen wird. Jedes dieser beiden Integrale muss nun noch sowohl nach x' als nach x integrirt werden, und diese letzten Integrale sind bei beiden Räumen zwischen denselben Grenzen zu nehmen, weil alle ebenen Grenzen bei beiden dieselben sind; daher liefern diese dreifachen Integrale den Betrag der über ihre Räume verbreiteten Eigenschaft mit einerlei Vorzeichen, wenn die untern Grenzen φ'_x und φ''_x der ersten Integrale beide zugleich grösser oder kleiner als deren obere Grenze x'' ist, hingegen mit entgegengesetzten Vorzeichen, wenn die eine untere Grenze grösser, die andere kleiner als die obere ist, d. h. die dreifachen Integrale geben den Betrag der Eigenschaft mit entgegengesetzten oder mit einerlei Vorzeichen, je nachdem x'' zwischen φ'_x und φ''_x oder auf einer Seite von ihnen liegt. Eben desswegen erhält man aber, wo man sich auch die mit XAX' parallele Begrenzungsebene hindenken mag, den Betrag der Eigenschaft, soweit sie über den zwischen den beiden Flächenzügen und zwischen den Begrenzungsebenen liegenden Raum verbreitet ist, mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$, wenn man von der Differenz

$$\int_{x''_0=\varphi'_x}^{x''} f_x - \int_{x''_0=\varphi''_x}^{x''} f_x$$

das doppelte Integral nach x und nach x' zwischen denselben Grenzen nimmt; diese Differenz lässt sich aber auch so schreiben:

$$\int_{x''_0=\varphi'_x}^{x''=\varphi''_x} f_x,$$

und zeigt in dieser Gestalt, dass aus der gesuchten Function x'' verschwindet und sie daher nur noch die zwei Veränderlichen x und x' in sich trägt. Alles diess ist ganz so wie oben bei begrenzten Flächenräumen; wo aber dort die Grenzen von x in Puncte gelegt worden sind, in denen sich zwei Zweige begegneten, da müssen hier Cylinderflächen genommen werden, deren Seiten mit den Coordinatenaxen parallel durch die Durchschnittslinien der beiden Flächenzüge hindurch gehen. Die Gleichungen dieser Cylinderflächen ergeben sich aus den Gleichungen der beiden Flächenzüge durch Elimination derjenigen Coordinate, die der Axe angehört, mit welcher die Seiten der Cylinderfläche parallel laufen. Auch darf man hier den Raum nicht überschreiten, der zwischen zwei solchen unmittelbar auf einander folgenden Cylinderflächen liegt, und eben so wenig darf innerhalb des zu bestimmenden Raumes eine Kreuzung von zwei Cylinderflächen stattfinden.

Alles, was hier von zwei Zügen, die einer und derselben Fläche angehören, gesagt worden ist, gilt ganz eben so, wenn anstatt dieser beiden Flächenzüge die Züge genommen werden, welche zweien einander ganz fremden Flächen angehören; ja selbst, wenn die ebenen mit den Coordinatenebenen parallelen Begrenzungen durch krumme Flächen oder anders liegende Ebenen oder auch durch eine Verbindung von mehrern solchen ersetzt werden, ist es immer möglich, den so begrenzten Raum mittelst Cylinderflächen, deren Seiten mit den Coordinatenaxen parallel laufen, in mehr oder weniger Theile zu zerlegen, von denen sich jeder auf die bisher beschriebene Weise behandeln und bestimmen lässt, so dass man dergleichen Untersuchungen als in jedem möglichen Falle ausführbar zu erachten hat. Die ganze Schwierigkeit besteht stets darin, eine Function von einer Veränderlichen zu finden, deren Ableitung als Function derselben Veränderlichen gegeben ist, welches Geschäft der Integralrechnung angehört.

Noch mag hier die Bemerkung stehen, dass Alles, was über die Bestimmung der Grenzen in mehrfachen Integralen gesagt worden ist, ganz gleich wahr bleibt, die Gleichungen der Curven oder Flächen mögen in schiefen oder in senkrechten Coordinaten gegeben sein, wenn man im letztern Falle die ebenen Begrenzungen den Polar-Coordinatenebenen parallel laufend annimmt. Umgekehrt hat man je nach der Natur dieser ebenen Begrenzungen jene Gleichungen in schiefen oder senkrechten Coordinaten ausgedrückt sich zu verschaffen, um in jedem besondern Falle auf die einfachste Weise zum Ziele zu gelangen. Auch kann man, wo, wie bei der Bestimmung eines Körperinhalts $\overset{\prime\prime\prime}{\partial}\mathfrak{K}_x$ sowohl als $\overset{\prime\prime\prime}{\partial}\mathfrak{K}_u$ eine constante Grösse ist, diesen Körperinhalt gleich von vorn herein durch ein doppeltes Integral darstellen, ähnlich wie oben (§. 13. Nr. 138.) der Flächeninhalt durch ein einfaches Integral angegeben worden ist. Man hat zu diesem Ende nur einen der drei prismatischen Räume S, S', S'' ins Auge zu fassen, deren Grössen sich in Reihen, die nach Potenzen von x_0, x'_0, x''_0 fortlaufen, mittelst der Gleichungen (120. d. bis g.) ausdrücken lassen; hierauf die in ihm vorkommende krumme Begrenzungsfläche durch eine ebene zu ersetzen, welche einen Theil der zu einer ihrer Stellen gehörigen Berührungsebene der krummen Fläche ausmacht und auch den Inhalt dieses neuen Prisma's in x_0, x'_0, x''_0 ausgedrückt darzustellen, welches immer auf elementarem Wege geschehen kann; zuletzt hat man sich die Grössen x_0, x'_0, x''_0 unendlich klein zu denken, wo dann der Inhalt des einen Prisma mit krummer Begrenzungsfläche von dem des andern Prisma mit ebener Begrenzungsfläche sich nur noch um eine Grösse unterscheiden kann, die, mit ihrer eigenen verglichen, verschwindend klein wird, worauf der Satz (41. a. und b.) sogleich eine der Functionen

$\overset{110}{\partial}\mathfrak{K}_x$, $\overset{101}{\partial}\mathfrak{K}_x$, $\overset{011}{\partial}\mathfrak{K}_x$ an die Hand giebt, welche zur Auffindung von $\mathfrak{K}_x$ blos eine doppelte Integration erfordern. Eine ganz gleiche Bewandtniss hat es auch mit der Function $\mathfrak{K}_u$.

§. 15.

Von der doppelt gekrümmten Linie oder unebenen Curve.

158) Wenn die beiden auf die drei schiefen Coordinaten x, x′, x″ von Puncten bezogenen Gleichungen

$$\varphi_x = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_x = 0,$$

oder wenn die beiden auf die drei senkrechten Coordinaten u, u′, u″ von Puncten bezogenen Gleichungen

$$\psi_u = 0 \quad \text{und} \quad \Psi_u = 0$$

zwei von einander verschiedene Flächen darstellen und man fasst blos diejenigen Puncte ins Auge, deren Coordinaten gleichzeitig jeder Gleichung eines solchen Paares genügen, so sind diess solche Puncte, welche in jeder der zwei von einander verschiedenen Flächen liegen; es stellen daher so aufgefasste Gleichungspaare den Durchschnitt der beiden Flächen dar, welche durch jede Gleichung des Paares einzeln genommen gegeben sind. Die diesem Durchschnitte zugehörigen Puncte werden in der Regel nicht in einer und derselben Ebene liegen, und dann nennen wir ihn eine unebene Curve oder eine doppelt gekrümmte Linie. Auch hier, wie schon oben bei der Geraden, werden wir ein Gleichungspaar mit gemeinschaftlichen Veränderlichen, in welchem blos solche Werthe der Veränderlichen zugelassen werden sollen, die beiden Gleichungen des Paares gleichzeitig genügen, dadurch äusserlich kund geben, dass wir das Wörtchen mit zwischen seine beiden Gleichungen setzen, so dass also im Allgemeinen eine unebene Curve in folgender Weise dargestellt wird:

$$\varphi_x = 0 \quad \text{mit} \quad \Phi_x = 0 \qquad \textbf{(124. a.)}$$

oder

$$\psi_u = 0 \quad \text{mit} \quad \Psi_u = 0, \qquad \textbf{(124. b.)}$$

je nachdem deren Puncte durch schiefe oder senkrechte Coordinaten vorgestellt werden.

In besondern Fällen kann ein solches Gleichungspaar blos eine ebene Curve oder einen Verein von ebenen Curven darstellen. Enthält eine von den Gleichungen des Paares nur eine einzige der drei Coordinaten, so wird diese Coordinate durch die Gleichung völlig bestimmt; die Gleichung schreibt der Coordinate entweder einen oder mehrere ausser einander liegende Werthe vor, und stellt dann eben so viele, von einander getrennte, mit einer der Grund- oder Polar-Coordinatenebenen paral ele Ebenen dar, als solcher Werthe vorliegen, die in Verbindung mit der zweiten Gleichung lauter ebene Curven in derselben Anzahl liefern, welche ebene Curven, wenn die zweite Gleichung selber wieder nichts als Ebenen darstellt, Gerade werden. Es ist diess nur ein besonderer Fall des schon oben (§. 14. Nr. 139.) aufgeführten Umstandes, dass, wenn z. B.

$$\varphi_x = \varphi'_x \varphi''_x$$

ist, und φ'_x und φ''_x von einander unabhängige Factoren, d. h. solche sind, dass Werthe von x, x′, x″, welche den einen zu Null machen, den andern nicht auf die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ bringen,

man das durch die Gleichung $\varphi_x = 0$ dargestellte Gebilde immer als einen Verein der zwei durch die Gleichungen

$$\varphi'_x = 0 \quad \text{und} \quad \varphi''_x = 0$$

dargestellten und von einander völlig unabhängig bleibenden Gebilde ansehen kann. Der hier in seiner einfachsten Gestalt angegebene Satz lässt sich nämlich allgemein so geben: Ist $\varphi_x = \varphi'_x \varphi''_x \varphi'''_x \ldots$ und sind φ'_x, φ''_x, $\varphi'''_x, \ldots$ solche Factoren, dass die Werthe von x, x′, x″, welche den einen von ihnen zu Null machen, keinen der andern auf die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ bringen, so ist die Gleichung $\varphi_x = 0$ nichts anders, als ein Verein der Gleichungen

$$\varphi'_x = 0\,,\quad \varphi''_x = 0\,,\quad \varphi'''_x = 0\,,\quad \text{u. s. f.,}$$

welche gleichzeitig neben einander und völlig unabhängig von einander bestehen. Hieraus folgt nämlich, dass man jedesmal, wo sich der Ausdruck von einer der Gleichungen in gänzlich von einander unabhängige Factoren zerlegen lässt, nur zu untersuchen braucht, was die einzelnen der Null gleich gesetzten Factoren in Verbindung mit der zweiten Gleichung liefern. Die Summe aller dieser besondern Ergebnisse ist das vollständige, in dem ursprünglichen Gleichungspaare enthaltene Gebilde.

Da sich nach den Regeln der Algebra statt zweier Gleichungen mit drei Unbekannten eine Menge anderer Paare von Gleichungen angeben lassen, welche in Bezug auf diese Unbekannten mit jenen von völlig einerlei Inhalt sind, so sieht man sogleich ein, dass, wenn unter allen diesen Paaren eines sich vorfindet, dessen eine Gleichung einer Ebene angehört, oder auf die so eben angezeigte Weise in lauter Ebenen sich auflösen lässt, sämmtliche Gleichungspaare eine ebene Curve oder einen Verein von ebenen Curven darstellen werden, die unter Umständen Gerade werden können. Die hier erwähnte Substitution von äquivalenten Gleichungspaaren kann auch dazu benützt werden, das Gleichungspaar, wodurch eine unebene Curve dargestellt wird, in solcher Weise umzuformen, dass in jeder seiner Gleichungen nur zwei von den drei Coordinaten vorkommen. Man erreicht diesen Zweck jedesmal dadurch, dass man aus den zwei Gleichungen eines gegebenen Paares, das nicht schon die gewünschte Gestalt besitzt, zwei neue Gleichungen ableitet, eine durch Elimination von einer der drei Veränderlichen, und eine zweite durch Elimination von einer andern dieser drei Veränderlichen. Weil aber oben (§. 14. Nr. 139.) gezeigt worden ist, dass eine auf ein körperliches Coordinatensystem bezogene Gleichung, die nur zwei Coordinaten derselben Art in sich trägt, immer eine Cylinderfläche darstellt, deren Seiten mit einer der Grund-Coordinatenaxen parallel laufen, wenn die Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben ist, oder deren Seiten mit einer der Polar-Coordinatenaxen parallel laufen, wenn die Gleichung in senkrechten Coordinaten gegeben ist, so folgt, dass man unter allen Umständen berechtigt ist, die unebene Curve als den Durchschnitt zweier Cylinderflächen aufzufassen, deren Seiten entweder mit zweien Grundaxen oder mit zweien Polaraxen parallel laufen, und diess sagt im Grunde nichts anders, als dass man die unebene Curve immer als den Durchschnitt zweier Cylinderflächen sich vorstellen kann, deren Seiten mit zwei beliebigen nicht parallelen Geraden parallel laufen.

159) Weil die zu Puncten einer unebenen Curve gehörigen schiefen oder senkrechten drei Coordinaten stets von zwei Gleichungen, wie die (124. a.) oder (124. b.) sind, abhängig gemacht werden, und man daher zwei von ihnen jederzeit als Functionen der dritten anzusehen hat, so ist den in Paragraph 12. dieses Abschnitts (Nr. 115.) aufgestellten Gleichungen

(9. c.) zur Folge, wenn ξ, ξ', ξ'' die schiefen oder η, η', η'' die senkrechten Coordinaten von irgend einem Punct O der unebenen Curve vorstellen, und man sich durch diesen Punct drei neue Axen OX, OX', OX'' den ursprünglichen AX, AX', AX'' parallel und gleichläufig gelegt denkt, so dass (Abschn. I. Gleich. 7.)

$$x=\xi+x_0\,,\quad x'=\xi'+x_0'\,,\quad x''=\xi''+x_0'' \quad \text{oder} \quad u=\eta+u_0\,,\quad u'=\eta'+u_0'\,,\quad u''=\eta''+u_0'' \tag{125.}$$

wird, vorausgesetzt, dass x_0, x_0', x_0'' die schiefen oder u_0, u_0', u_0'' die senkrechten Coordinaten von irgend einem andern Puncte O' der unebenen Curve an den neuen Axen vorstellen, während x, x', x'' die schiefen oder u, u', u'' die senkrechten Coordinaten dieses zweiten Punctes an den ursprünglichen Axen bezeichnen:

$$x_0'=\partial\xi' x_0+\partial^2\xi'\frac{x_0^2}{1.2}+\ldots. \quad \text{mit} \quad x_0''=\partial\xi'' x_0+\partial\xi''\frac{x_0^2}{1.2}+\ldots. \tag{126. a.}$$

oder

$$u_0'=\partial\eta' u_0+\partial^2\eta'\frac{u_0^2}{1.2}+\ldots. \quad \text{mit} \quad u_0''=\partial\eta'' u_0+\partial\eta''\frac{u_0'}{1.2}+\ldots.. \tag{126. b.}$$

Diese Gleichungspaare enthalten wieder ebenso wie die (124. a.) und (124. b.) alle Puncte der unebenen Curve in sich, nur mit dem Unterschiede, dass die Coordinaten dieser Puncte hier auf die neuen, durch einen Punct O der Curve gelegten Axen OX, OX', OX'' bezogen werden, während dort die Coordinaten derselben Puncte auf die ganz beliebig angenommenen ursprünglichen Axen AX, AX', AX'' bezogen worden sind. Denkt man sich nun unter dem veränderlichen Puncte O' der Curve statt aller möglichen nur solche, welche dem zwar beliebigen, aber doch bestimmt hervorgehobenen O so nahe liegen, dass sich der zu ihnen gehörige Werth von x_0 oder u_0 durch kein endliches Maass mehr angeben lässt, so verschwindet, vorausgesetzt, dass die Grössen

$$\partial\xi',\ \partial^2\xi',\ldots. \quad \text{und} \quad \partial\xi'',\ \partial^2\xi'',\ldots.$$

oder

$$\partial\eta',\ \partial^2\eta',\ldots. \quad \text{und} \quad \partial\eta'',\ \partial^2\eta'',\ldots.$$

sämmtlich endlich darstellbare und bestimmte Werthe haben, auf der rechten Seite der Gleichungen (126. a.) oder (126. b.) jedes später folgende Glied neben einem wirklich vorhandenen frühern ganz und gar, so, dass man für jeden so äusserst nahe bei dem O liegenden Punct O' hat:

$$x_0'=\partial\xi' x_0 \quad \text{mit} \quad x_0''=\partial\xi'' x_0 \tag{127. a.}$$

oder

$$u_0'=\partial\eta' u_0 \quad \text{mit} \quad u_0''=\partial\eta'' u_0. \tag{127. b.}$$

Jedes dieser Gleichungspaare stellt aber eine Gerade dar; beide vereinigen sich sonach in der Aussage, dass sich die Puncte einer unebenen Curve an jeder ihrer Stellen, auf eine unendlich kleine Strecke weit, wie die einer geraden Linie an einander reihen, dass aber die Richtung, in welcher die Puncte sich neben einander lagern, an jeder andern Stelle der Curve, deren Abstand von der vorigen O ein endlich angebbarer, wenn auch noch so kleiner ist, eine andere sein kann, weil die Werthe $\partial\xi'$ und $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$ und $\partial\eta''$, von welchen diese Richtung abhängt, an jeder andern Stelle beliebig andere, durch das jedesmalige Gleichungspaar gegebene werden können. In den hier ausgesprochenen Eigenschaften ist der allgemeinste Character einer beliebigen unebenen Curve enthalten.

Die bis jetzt aus einem Gleichungspaare, das entweder die drei schiefen oder die drei senkrechten, auf ein beliebiges körperliches Coordinatensystem bezogenen Coordinaten in sich

aufnimmt, abgeleiteten Schlüsse ändern sich nicht, wenn eine oder mehrere der Grössen $\partial^2\xi'$, $\partial^3\xi'$,... und $\partial^2\xi''$, $\partial^3\xi''$,... oder $\partial^2\eta'$, $\partial^3\eta'$,.... und $\partial^2\eta''$, $\partial^3\eta''$,.... null werden. Ja sogar wenn von den Grössen $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$, $\partial\eta''$ eine oder auch jede null wird, bleibt doch alles vorhin Gesagte noch ganz eben so wahr; denn obgleich es z. B. scheinen möchte, dass man, wenn z. B. $\partial\xi'=0$ wäre, an die Stelle der ersten Gleichung (127. a.) die

$$x'_0=\tfrac{1}{2}\partial^2\xi'x_0^2$$

aus der ersten Gleichung (126. a.) sich ergebende zu setzen hätte, oder wohl gar, wenn auch noch $\partial^2\xi'=0$ wäre, x'_0 einem noch später folgenden Gliede der rechten Seite der zuletzt angeführten Gleichung gleich zu nehmen wäre, so überzeugt man sich doch bald, dass selbst in diesem Falle die durch die erste Gleichung (127. a.), welche jetzt $x'_0=0$ würde, dargestellte Ebene immer wieder die ist, welche zur Bestimmung der Lagerungsrichtung der Puncte der Curve an der hervorgehobenen Stelle O genommen werden muss. In der That wollte man unter solchen Umständen x'_0 dem Gliede $\frac{1}{2}\partial^2\xi'x_0^2$ oder einem der später folgenden, worin x_0 in einer noch höhern Potenz auftritt, gleich nehmen, so erhielte man für x'_0 einen Werth, der unvergleichlich kleiner als x_0 selbst wäre, und schon dieserwegen könnte die durch die Gleichung $x'_0=0$ dargestellte Ebene von der, welche durch den Punct O und eine unendlich nahe bei ihm liegende Seite der durch die Gleichung $x'_0=\frac{1}{2}\partial^2\xi'x_0^2$ dargestellten Cylinderfläche geht, nicht in einer endlich darstellbaren Weise verschieden sein, so dass diese beiden Ebenen bei endlichen Bestimmungen mit einander verwechselt werden können.

Wiewohl nun aber die Fälle, wo eines oder mehrere der vordersten auf einander folgenden Glieder der Gleichungen (126. a.) oder (126. b.) null werden, den allgemeinsten Character einer unebenen Curve nicht abändern, so giebt es doch andere Ausnahmen von der Regel, von denen man Kenntniss nehmen muss, weil erst sie volles Licht über den vorgeführten Gegenstand verbreiten. Wenn wir aus einem der Gleichungspaare (124.) durch das Auflösen ihrer Gleichungen zwei der in ihnen vorkommenden Coordinaten als Zusammensetzungen der dritten aufsuchen, indem wir jene beiden Grössen als Unbekannte, diese dagegen als Bekannte ansehen, so werden sich erstere häufig als mehrförmige Ausdrücke von dieser letztern zu erkennen geben, so dass man im Allgemeinen zu jedem für x oder u gewählten Werth so viele zu x′ und x″ oder zu u′ und u″ gehörige einzelne Darstellungen erhalten wird, als verschiedene Formen in den für sie erhaltenen allgemeinen Ausdrücken vorkommen. Je zwei solche einzelne zu einander gehörige Darstellungen können aber für sich allein wie ein Gleichungspaar aufgefasst werden, in welchem die Coordinaten x, x′, x″ oder u, u′, u″ auftreten, und auf welches sich dann alles vorhin Gesagte wieder unmittelbar anwenden lässt. In der That, da wir bei den vorhin ausgeführten Betrachtungen die Grössen ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' nur auf einen einzigen der unebenen Curve angehörigen Punct bezogen haben, und dieser in der Regel nur einer von den mehrern Formen entsprechen wird, so leuchtet von selber ein, dass jede der mehrern Formen für sich zu einem besondern Gebilde hinführen werde, das die Natur einer unebenen Curve in sich trägt, und das wir einen Z w e i g der mehrfachen unebenen Curve nennen werden. In besondern Fällen können jedoch zwei oder mehr von den neben einander liegenden Formen für denselben Werth von x oder u einerlei Werthe für x′ und x″ oder für u′ und u″ liefern, was an solchen Stellen geschehen wird, durch welche zwei oder mehrere Zweige der mehrfachen Curve hindurch gehen und hier zu Puncten Anlass geben, von denen aus die linienartige Verbreitung der Puncte in mehrfacher Weise statt findet. Obschon aber die solchen

Stellen entsprechenden Werthe von x, x′, x″ oder u, u′, u″ gleichzeitig mehrern einzelnen Formen angehören, so kann es doch geschehen, dass die denselben Stellen entsprechenden Werthe von $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$, $\partial\eta''$ an dieser Stelle in Bezug auf die verschiedenen durch sie hindurch gehenden Zweige verschieden ausfallen; dann durchschneiden sich die Zweige an der hervorgehobenen Stelle in Richtungen, die Winkel von endlicher Grösse mit einander bilden, und die mittelst der Gleichungen (127.) für solche Stellen aus den mehrerlei Formen sich ergebenden Geraden decken die Art und Weise auf, wie sich die mehrern Zweige an diesen Stellen durchkreuzen. Solche Zweige, welche an dergleichen Stellen auch noch für $\partial\xi'$ und $\partial\xi''$ oder für $\partial\eta'$ und $\partial\eta''$ einerlei Werthe besitzen, haben zunächst an diesen Stellen eine gemeinsame Richtung, welche durch die ihnen gemeinschaftlich angehörige, ihre Lagerungsweise daselbst bezeichnende Gerade ausgesprochen wird.

Ausserdem giebt es noch andere Umstände, welche machen können, dass der vorhin angegebene allgemeine Bau einer durch Gleichungspaare, wie die (124.) sind, dargestellten unebenen Curve an einzelnen Stellen eine Modification erleidet. Diess geschieht namentlich da, wo eine oder mehrere der specialisirten Ableitungen $\partial\xi'$, $\partial^2\xi'$, ... und $\partial\xi''$, $\partial^2\xi''$, ... oder $\partial\eta'$, $\partial^2\eta'$, ... und $\partial\eta''$, $\partial^2\eta''$, ... die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, und eben dadurch zu verstehen geben, dass an der hervorgehobenen Stelle die Reihen (126. a.) oder (126. b.) ihre Anwendbarkeit verlieren. Für solche Stellen, welche immer nur einzelne Ausnahmen von der Regel bilden, müssen dann auf die gleiche Weise, wie schon in der Lehre vom Grössten und Kleinsten unter ähnlichen Umständen geschieht, besondere diesen exceptionellen Stellen angemessene Entwickelungen aufgesucht und an die Stelle der Reihen (126. a.) oder (126. b.) gesetzt werden, aus denen man sodann die Eigenthümlichkeit der unebenen Curve an dergleichen Stellen zu entziffern hat. Gemeinhin zeigt es sich dabei, dass da, wo eine oder mehrere der specialisirten Ableitungen die Form $\frac{\alpha}{0}$ oder $\frac{0}{0}$ annehmen, diess entweder das plötzliche Aufhören eines Zweiges, das durch den Uebergang der Coordinatenwerthe vom Reellen ins Imaginäre bewirkt wird, oder eine plötzliche Richtungsänderung von einem endlichen Betrage, oder sonst eine Continuitätsunterbrechung anderer Art ankündige. Man pflegt die Beurtheilung aller an einzelnen Stellen auftretenden ungewöhnlichen Eigenschaften einer durch ein Gleichungspaar gegebenen unebenen Curve die Discussion dieses Gleichungspaares zu nennen. Die Discussion eines Gleichungspaares, dessen Veränderliche man als Coordinaten von Puncten aufzufassen hat, bleibt völlig die gleiche, man mag diese Coordinaten auf ein rechtwinkliges oder auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem beziehen.

Das eine unebene Curve darstellende Gleichungspaar ist entweder gegeben, und es sollen aus ihm die Eigenschaften der Curve hergeleitet werden, oder es wird die unebene Curve durch sie vollständig characterisirende Eigenschaften gegeben, gemäss welchen man das Gleichungspaar, welches die unebene Curve mit den verlangten Eigenschaften in sich aufnimmt, aufzusuchen hat. Beim Aufsuchen eines Gleichungspaares nun hat man keineswegs besonders darauf zu sehen, dass es lauter schiefe oder lauter senkrechte Coordinaten in sich aufnehme, vielmehr wird man in der Regel besser thun, gleichzeitig schiefe und senkrechte Coordinaten in Betrachtung zu ziehen, wie es gerade zur einfachsten Herleitungsweise der Gleichungen gefordert wird, da eine solche gemischte Gleichung völlig gleichen Werth mit der hat, in welcher die Coordinaten getrennt auftreten; denn erstlich kann man immer da, wo gleichzeitig schiefe und senk-

rechte Coordinaten vorkommen, entweder die einen oder die andern mittelst der zwischen beiden bestehenden im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen eliminiren und so ein gemischtes Gleichungspaar auf jede der in (124. a.) und (124. b.) angenommenen Formen zurückführen, sodann kann man aber auch die gemischte Gleichung zu fernern Zwecken benützen, in ähnlicher Weise, wie in §. 14. Nr. 140. bis Nr. 142. an einigen Beispielen gezeigt worden ist.

160) Zur Darstellung einer unebenen Curve reicht eines der in (124. a.) oder (124. b.) aufgestellten Gleichungspaare, von welchem das eine blos schiefe, das andere blos senkrechte Coordinaten der Puncte in sich aufnimmt, vollkommen aus. Es können jedoch auch zwei Gleichungspaare vorhanden sein, welche beide eine und dieselbe unebene Curve darstellen, dann nennen wir diese beiden Gleichungspaare, wie schon bei der Geraden geschehen ist, **combinirte Gleichungspaare**, und insbesondere werden wir uns dieser Benennung bei solchen Gleichungspaaren bedienen, von welchen das eine blos schiefe, das andere blos senkrechte Coordinaten in sich aufgenommen hat, von welcher Art die (124. a.) und (124. b.) sind. Da von zwei combinirten Gleichungspaaren das eine dieselben Puncte darstellt wie das andere, so kann man die in ihnen vorkommenden Veränderlichen x, x', x'' und u, u', u'' immer als die zu einem und demselben Puncte gehörigen schiefen und senkrechten Coordinaten ansehen, und dann finden zwischen ihnen die im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen (15. a.) und (48. a.) statt, denen gemäss ist:

(128. a.)
$$\begin{cases} u = x + x'\cos W + x''\cos W', \quad u' = x\cos W + x' + x''\cos W'', \quad u'' = x\cos W' + x'\cos W'' + x'' \\ \text{und} \\ \mathfrak{S}\,x = \mathfrak{A}\,u + \mathfrak{A}'\,u' + \mathfrak{A}''\,u'', \quad \mathfrak{S}_1'\,x' = \mathfrak{A}_1\,u + \mathfrak{A}_1'\,u' + \mathfrak{A}_1''\,u'', \quad \mathfrak{S}_2''\,x'' = \mathfrak{A}_2\,u + \mathfrak{A}_2'\,u' + \mathfrak{A}_2''\,u''. \end{cases}$$

Sowie die vorstehenden Relationen stets zwischen den in combinirten Gleichungspaaren vorkommenden Coordinaten statt finden, so können sie auch dazu dienen, wenn nur ein Gleichungspaar vorhanden ist, andere zu finden, welche zu diesem combinirte sind; man hat zu diesem Ende nur in das gegebene Gleichungspaar anstatt einer oder mehrerer Coordinaten der einen Art ihre durch die vorstehenden Relationen gegebenen Ausdrücke in Coordinaten der andern Art zu setzen. Drückt man auf solche Weise alle senkrechten Coordinaten in schiefen aus, so gelangt man zu dem in (124. a.) aufgeführten Gleichungspaare; drückt man hingegen alle schiefen Coordinaten in senkrechten aus, so gelangt man zu dem in (124. b.) vorgestellten Gleichungspaare, wesswegen man immer jene beiden als Typus der combinirten Gleichungspaare den Betrachtungen zum Grunde legen kann.

Selbst die combinirten Gleichungspaare (124. a.) und (124. b.) besitzen die Eigenschaft, dass ersteres in letzteres übergeht, wenn man in jenem an die Stelle von x, x', x'' ihre durch die untern Gleichungen (128. a.) gegebenen Werthe setzt, und letzteres geht in ersteres über, wenn man in jenem für u, u', u'' ihre durch die obern Gleichungen (128. a.) gegebenen Werthe setzt; es finden mithin zwischen diesen Gleichungspaaren alle jene Beziehungen statt, welche wir zwischen den im Paragraph 12. dieses Abschnitts Nr. 121. betrachteten zwei Gleichungspaaren obwalten liessen, wesswegen alle dort erhaltenen Resultate hier wieder ihre Anwendung finden, wenn man den abgeänderten Bezeichnungen gemäss folgende Substitutionen eintreten lässt:

$$\left.\begin{array}{l}\mu_0=0\,,\quad \mu_1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{E}}\,,\quad \mu_2=\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{E}}\,,\quad \mu_3=\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{E}}\,,\\ \mu_0'=0\,,\quad \mu_1'=\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{E}_1'}\,,\quad \mu_2'=\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{E}_1'}\,,\quad \mu_3'=\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{E}_1'}\,,\\ \mu_0''=0\,,\quad \mu_1''=\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{E}_2''}\,,\quad \mu_2''=\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{E}_2''}\,,\quad \mu_3''=\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{E}_2''}\end{array}\right\}$$

und

$$\begin{array}{l}\nu_0=0\,,\quad \nu_1=1\,,\quad \nu_2=\cos W\,,\quad \nu_3=\cos W'\,,\\ \nu_0'=0\,,\quad \nu_1'=\cos W\,,\quad \nu_2'=1\,,\quad \nu_3'=\cos W''\,,\\ \nu_0''=0\,,\quad \nu_1''=\cos W'\,,\quad \nu_2''=\cos W''\,,\quad \nu_3''=1\,.\end{array}$$

Mittelst dieser Substitutionen verwandeln sich die dortigen Gleichungen (38. a.) in:

$$\mathfrak{E}\,\partial x=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial u'+\mathfrak{A}''\partial u'',\quad \mathfrak{E}_1'\,\partial x'=\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_1'\partial u'+\mathfrak{A}_1''\partial u'',\quad \mathfrak{E}_2''\,\partial x''=\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_2'\partial u'+\mathfrak{A}_2''\partial u''$$

und die (38. b.) werden:

$$\partial u=1+\cos W\,\partial x'+\cos W'\,\partial x'',\quad \partial u'=\cos W+\partial x'+\cos W''\,\partial x'',\quad \partial u''=\cos W'+\cos W''\,\partial x'+\partial x''; \qquad \textbf{(128. b.)}$$

ferner gehen die dortigen Gleichungen (39. a. bis c.) über in:

$$\left.\begin{array}{l}\delta x\,\delta u=\frac{1}{\mathfrak{E}}(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial u'+\mathfrak{A}''\partial u'')(1+\cos W\,\partial x'+\cos W'\,\partial x'')=1\,,\\[2mm] \partial x'=\frac{\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_1'\partial u'+\mathfrak{A}_1''\partial u''}{\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial u'+\mathfrak{A}''\partial u''}\,\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_1'}\,,\quad \partial x''=\frac{\mathfrak{A}_2+\mathfrak{A}_2'\partial u'+\mathfrak{A}_2''\partial u''}{\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial u'+\mathfrak{A}''\partial u''}\,\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_2''}\,,\\[2mm] \partial u'=\frac{\cos W+\partial x'+\cos W''\,\partial x''}{1+\cos W\,\partial x'+\cos W'\,\partial x''}\,,\quad \partial u''=\frac{\cos W'+\cos W''\,\partial x'+\partial x''}{1+\cos W\,\partial x'+\cos W'\,\partial x''}\,,\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ \textbf{(128. c.)}$$

welche mittelst der Gleichungen (128. b.) auch so geschrieben werden können:

$$\partial x'=\frac{\delta x'}{\delta x}\,,\quad \partial x''=\frac{\delta x''}{\delta x}\quad \text{und}\quad \partial u'=\frac{\delta u'}{\delta u}\,,\quad \partial u''=\frac{\delta u''}{\delta u}\,; \qquad \textbf{(129. a.)}$$

und so lassen sich auch noch die zweiten Ableitungen der Coordinaten aus obigen Resultaten herholen. Wir bemerken jedoch hierbei, dass wir die in (128. b.) und (128. c.) gegebenen Resultate nur desswegen aus den oben gegebenen allgemeinen hergeleitet haben, um deren Stellung zu den abstracten Betrachtungen der Ableitungsrechnung recht augenfällig zu machen; sie lassen sich sämmtlich aus denen (128. a.) unmittelbar erhalten, indem man diese nach x oder u ableitet und die Ergebnisse mit einander in derselben Weise verbindet, wie oben geschehen ist.

In den vorstehenden Formeln ist immer entweder x oder u zur unabhängig Veränderlichen genommen worden, und die fünf übrigen Coordinaten müssen dann als Functionen dieser einen angesehen werden. Man kann aber auch alle sechs Coordinaten als abhängig von einer ausser ihnen liegenden beliebigen Grösse auffassen, die man nicht weiter zu bestimmen braucht; dann lassen sich den im Paragraph 12. (Nr. 118.) gegebenen Erörterungen gemäss die Ableitungen nach x oder u durch die Ableitungen nach der neuen Veränderlichen ausdrücken, man hat nämlich nach Aussage der dortigen Gleichungen (13. b.) oder (15. c.):

(129. a.) $$\begin{cases} \delta x = \frac{dx}{du}, \quad \delta x' = \frac{dx'}{du}, \quad \delta x'' = \frac{dx''}{du}, \quad \partial u' = \frac{du'}{du}, \quad \partial u'' = \frac{du''}{du} \\ \text{oder} \\ \delta u = \frac{du}{dx}, \quad \delta u' = \frac{du'}{dx}, \quad \delta u'' = \frac{du''}{dx}, \quad \partial x' = \frac{dx'}{dx}, \quad \partial x'' = \frac{dx''}{dx}, \end{cases}$$

wenn die Ableitungen nach der neuen Veränderlichen durch das Zeichen d vorgestellt werden. Hierdurch verwandeln sich aber die Gleichungen (128. b.) in:

(129. b.) $$\begin{cases} \mathfrak{C}\, dx = \mathfrak{A}\, du + \mathfrak{A}'\, du' + \mathfrak{A}''\, du'', \quad \mathfrak{C}_1'\, dx' = \mathfrak{A}_1\, du + \mathfrak{A}_1'\, du' + \mathfrak{A}_1''\, du'', \\ \mathfrak{C}_2''\, dx'' = \mathfrak{A}_2\, du + \mathfrak{A}_2'\, du' + \mathfrak{A}_2''\, du'' \\ \text{und} \\ du = dx + \cos W\, dx' + \cos W'\, dx'', \quad du' = \cos W\, dx + dx' + \cos W''\, dx'', \\ du'' = \cos W'\, dx + \cos W''\, dx' + dx'', \end{cases}$$

wodurch sich die Ableitungen von den Coordinaten der einen und der andern Art in einander überführen lassen. Vergleicht man diese letztern Gleichungen mit denen (128. a.), so wird man gewahr, dass in den jetzigen dx, dx', dx'' und du, du', du'' steht, wo in den vorigen x, x', x'' und u, u', u'' stand, woraus weiter folgt, dass es immer einen Punct im Raume giebt, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch dx, dx', dx'' und du, du', du'' vorgestellt werden können, und dass folglich von diesen Grössen alles das gilt, was von den Coordinaten eines beliebigen Punctes im Raume wahr ist. So ist namentlich nach Aussage der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichung (16.):

(129. c.) $$x\,du + x'\,du' + x''\,du'' = u\,dx + u'\,dx' + u''\,dx'',$$

welche Gleichung sich auch aus denen (129. b.) mit Zuziehung derer (128. a.) erweisen lässt. Dividirt man diese letzte Gleichung einmal mit du, ein andermal mit dx, jedesmal an die Stelle der Quotienten zwischen zwei Ableitungen ihre durch die Gleichungen (129. a.) gegebenen Werthe setzend, so findet man:

(129. d.) $$\begin{cases} x + x'\,\partial u' + x''\,\partial u'' = u\,\delta x + u'\,\delta x' + u''\,\delta x'' \\ \text{und} \\ x\,\delta u + x'\,\delta u' + x''\,\delta u'' = u + u'\,\partial x' + u''\,\partial x'', \end{cases}$$

welche Gleichungen in Bezug auf die Unabhängigen u und x das sind, was die (129. c.) in Bezug auf eine beliebige ausserhalb der Coordinaten liegende Unabhängige ist. Die zuletzt erhaltenen Gleichungen treten nur desswegen in einer weniger symmetrischen Form auf, weil die Ableitung der in ihnen zur unabhängig Veränderlichen genommenen Grösse 1 wird, und so dem Auge sich entzieht.

In der Gleichung (129. c.) spricht sich eine für das schiefwinklige Coordinatensystem höchst wichtige Eigenschaft aus, die sich noch weiter ausspinnen lässt. Leitet man nämlich die Gleichungen (129. b.) noch einmal nach der ausser den Coordinaten liegenden und völlig unbestimmt gelassenen Veränderlichen ab, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{C}\,d^2x = \mathfrak{A}\,d^2u + \mathfrak{A}'\,d^2u' + \mathfrak{A}''\,d^2u'', \quad \mathfrak{C}_1'\,d^2x' = \mathfrak{A}_1\,d^2u + \mathfrak{A}_1'\,d^2u' + \mathfrak{A}_1''\,d^2u'', \\ \mathfrak{C}_2''\,d^2x'' = \mathfrak{A}_2\,d^2u + \mathfrak{A}_2'\,d^2u' + \mathfrak{A}_2''\,d^2u'' \\ \text{und} \\ d^2u = d^2x + d^2x'\cos W + d^2x''\cos W', \quad d^2u' = d^2x\cos W + d^2x' + d^2x''\cos W'', \\ d^2u'' = d^2x\cos W' + d^2x'\cos W'' + d^2x'', \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (129.\ e.)$$

und aus dem gleichen Baue dieser Gleichungen und der (128. a.) geht hervor, dass es einen Punct im Raume giebt, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch d^2x, d^2x', d^2x'' und d^2u, d^2u', d^2u'' ausgedrückt werden können, und da diess auch von den Grössen dx, dx', dx'' und du, du', du'' in Bezug auf einen andern Punct des Raumes gilt, so zieht die so eben aus dem ersten Abschnitte angeführte Gleichung (16.) nach sich, dass immer

$$dx\,d^2u + dx'\,d^2u' + dx''\,d^2u'' = du\,d^2x + du'\,d^2x' + du''\,d^2x'' \quad (129.\ f.)$$

sein müsse. Diese Betrachtungen fortsetzend gelangt man zu dem allgemeinen Resultate, dass unter allen Umständen

$$d^mx\,d^nu + d^mx'\,d^nu' + d^mx''\,d^nu'' = d^mu\,d^nx + d^mu'\,d^nx' + d^mu''\,d^nx'' \quad (129.\ g.)$$

sein müsse, wenn m und n zwei beliebige ganze und positive Zahlen bedeuten.

161) Die beiden Gleichungspaare (127. a.) und (127. b.) gehören einer und derselben Geraden an, wenn die ihnen zum Grunde liegenden Gleichungspaare (124.) einer und derselben unebenen Curve angehören, d. h. combinirte Gleichungspaare sind. Diess liegt schon im Gange der Betrachtungen, aus welchen sie hervorgegangen sind; man kann sich aber auch hiervon noch direct auf die nachstehende Weise überzeugen. Man erhält nämlich sogleich aus dem Gleichungspaare (127. a.) die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 + x_0'\cos W + x_0''\cos W' = x_0\,(1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W') \\ x_0\cos W + x_0' + x_0''\cos W'' = x_0\,(\cos W + \partial\xi' + \partial\xi''\cos W'') \\ x_0\cos W' + x_0'\cos W'' + x_0'' = x_0\,(\cos W' + \partial\xi'\cos W'' + \partial\xi'') \end{array}\right.$$

oder, wenn man erwägt, dass man in den Gleichungen (128. a.) auch x_0, x_0', x_0'' an die Stelle von x, x', x'' und u_0, u_0', u_0'' an die Stelle von u, u', u'' setzen kann, da die neuen Axen OX, OX', OX'', welche den ursprünglichen parallel und gleichläufig sind, ebenfalls die Winkel W, W', W'' mit einander bilden:

$$\begin{array}{l} u_0 = x_0\,(1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W') \\ u_0' = x_0\,(\cos W + \partial\xi' + \partial\xi''\cos W'') \\ u_0'' = x_0\,(\cos W' + \partial\xi'\cos W'' + \partial\xi''); \end{array}$$

dividirt man daher die letzten zwei von diesen Gleichungen durch die erste, so findet man:

$$u_0' = u_0\,\frac{\cos W + \partial\xi' + \partial\xi''\cos W''}{1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W'}$$

$$u_0'' = u_0\,\frac{\cos W' + \partial\xi'\cos W'' + \partial\xi''}{1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W'},$$

und diese gehen nun mittelst der untern Gleichungen (128. c.), wenn man letztere auf den

hervorgehobenen Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, in Anwendung bringt, in das Gleichungspaar (127. b.) über. In ganz ähnlicher Weise lässt sich auch das Gleichungspaar (127. b.) in das (127. a.) überführen, und jede solche Ueberführung liefert den Beweis, dass beide Gleichungspaare eine und dieselbe Gerade darstellen.

Setzt man in die Gleichungspaare (127. a. und b.) für x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' ihre durch die Gleichungen (125.) gegebenen Werthe, so nehmen sie die folgende Form an:

$$\text{(130. a.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'-\xi'=(x-\xi)\,\partial\xi' \quad \text{mit} \quad x''-\xi''=(x-\xi)\,\partial\xi'' \\ \text{und} \\ u'-\eta'=(u-\eta)\,\partial\eta' \quad \text{mit} \quad u''-\eta''=(u-\eta)\,\partial\eta'', \end{array} \right.$$

und jedes dieser Gleichungspaare stellt an den ursprünglichen Axen dieselbe Gerade dar, welche von den Gleichungspaaren (127. a.) und (127. b.) an den neuen Axen dargestellt wird. Man nennt die durch jedes solche Gleichungspaar dargestellte Gerade, welche, wie wir gesehen haben, die Richtung anzeigt, in der sich die Puncte der unebenen Curve, welche zunächst bei dem hervorgehobenen Punct O liegen, an einander reihen, die **Tangente der unebenen Curve an der Stelle O.** Da sich die Ableitungen $\partial x'$ und $\partial x''$ oder $\partial u'$ und $\partial u''$, den im Paragraph 12. dieses Abschnitts gegebenen Nachweisungen zur Folge, durch die Ausdrücke φ_x und Φ_x oder ψ_u und Ψ_u, welche die Gleichungspaare (124. a. oder b.) bilden, angeben lassen, indem man den dortigen Gleichungen (7. b.) gemäss hat:

$$\text{(130. b.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial x'=\dfrac{\overset{100}{\partial}\varphi_x\,\overset{001}{\partial}\Phi_x-\overset{100}{\partial}\Phi_x\,\overset{001}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x\,\overset{010}{\partial}\Phi_x-\overset{001}{\partial}\Phi_x\,\overset{010}{\partial}\varphi_x}, \quad \partial x''=\dfrac{\overset{010}{\partial}\varphi_x\,\overset{100}{\partial}\Phi_x-\overset{010}{\partial}\Phi_x\,\overset{100}{\partial}\varphi_x}{\overset{001}{\partial}\varphi_x\,\overset{010}{\partial}\Phi_x-\overset{001}{\partial}\Phi_x\,\overset{010}{\partial}\varphi_x}, \\ \text{oder auch auf die gleiche Weise:} \\ \partial u'=\dfrac{\overset{100}{\partial}\psi_u\,\overset{001}{\partial}\Psi_u-\overset{100}{\partial}\Psi_u\,\overset{001}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u\,\overset{010}{\partial}\Psi_u-\overset{001}{\partial}\Psi_u\,\overset{010}{\partial}\psi_u}, \quad \partial u''=\dfrac{\overset{010}{\partial}\psi_u\,\overset{100}{\partial}\Psi_u-\overset{010}{\partial}\Psi_u\,\overset{100}{\partial}\psi_u}{\overset{001}{\partial}\psi_u\,\overset{010}{\partial}\Psi_u-\overset{001}{\partial}\Psi_u\,\overset{010}{\partial}\psi_u}, \end{array} \right.$$

und diese, auf den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, angewandt, geben:

$$\text{(130. c.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial \xi'=\dfrac{\overset{100}{\partial}\varphi_\xi\,\overset{001}{\partial}\Phi_\xi-\overset{100}{\partial}\Phi_\xi\,\overset{001}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi\,\overset{010}{\partial}\Phi_\xi-\overset{001}{\partial}\Phi_\xi\,\overset{010}{\partial}\varphi_\xi}, \quad \partial \xi''=\dfrac{\overset{010}{\partial}\varphi_\xi\,\overset{100}{\partial}\Phi_\xi-\overset{010}{\partial}\Phi_\xi\,\overset{100}{\partial}\varphi_\xi}{\overset{001}{\partial}\varphi_\xi\,\overset{010}{\partial}\Phi_\xi-\overset{001}{\partial}\Phi_\xi\,\overset{010}{\partial}\varphi_\xi} \\ \text{oder} \\ \partial \eta'=\dfrac{\overset{100}{\partial}\psi_\eta\,\overset{001}{\partial}\Psi_\eta-\overset{100}{\partial}\Psi_\eta\,\overset{001}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta\,\overset{010}{\partial}\Psi_\eta-\overset{001}{\partial}\Psi_\eta\,\overset{010}{\partial}\psi_\eta}, \quad \partial \eta''=\dfrac{\overset{010}{\partial}\psi_\eta\,\overset{100}{\partial}\Psi_\eta-\overset{010}{\partial}\Psi_\eta\,\overset{100}{\partial}\psi_\eta}{\overset{001}{\partial}\psi_\eta\,\overset{010}{\partial}\Psi_\eta-\overset{001}{\partial}\Psi_\eta\,\overset{010}{\partial}\psi_\eta}, \end{array} \right.$$

so kann man dadurch den Gleichungspaaren (130. a.) eine neue Gestalt geben, dass man in dieselben für $\partial\xi'$ und $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$ und $\partial\eta''$ ihre hier gegebenen Werthe setzt, wodurch sie werden:

$$\left.\begin{aligned}
&(\overset{001}{\partial}\varphi_\xi \overset{010}{\partial}\Phi_\xi - \overset{001}{\partial}\Phi_\xi \overset{010}{\partial}\varphi_\xi)(x'-\xi') = (\overset{100}{\partial}\varphi_\xi \overset{001}{\partial}\Phi_\xi - \overset{100}{\partial}\Phi_\xi \overset{001}{\partial}\varphi_\xi)(x-\xi) \quad \text{mit} \\
&(\overset{001}{\partial}\varphi_\xi \overset{010}{\partial}\Phi_\xi - \overset{001}{\partial}\Phi_\xi \overset{010}{\partial}\varphi_\xi)(x''-\xi'') = (\overset{010}{\partial}\varphi_\xi \overset{100}{\partial}\Phi_\xi - \overset{010}{\partial}\Phi_\xi \overset{100}{\partial}\varphi_\xi)(x-\xi) \\
\text{oder}\quad &(\overset{001}{\partial}\psi_\eta \overset{010}{\partial}\Psi_\eta - \overset{001}{\partial}\Psi_\eta \overset{010}{\partial}\psi_\eta)(u'-\eta') = (\overset{100}{\partial}\psi_\eta \overset{001}{\partial}\Psi_\eta - \overset{100}{\partial}\Psi_\eta \overset{001}{\partial}\psi_\eta)(u-\eta) \quad \text{mit} \\
&(\overset{001}{\partial}\psi_\eta \overset{010}{\partial}\Psi_\eta - \overset{001}{\partial}\Psi_\eta \overset{010}{\partial}\psi_\eta)(u''-\eta'') = (\overset{010}{\partial}\psi_\eta \overset{100}{\partial}\Psi_\eta - \overset{010}{\partial}\Psi_\eta \overset{100}{\partial}\psi_\eta)(u-\eta)\,.
\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(130. d.)}$$

Diese letztern Gleichungspaare zeigen, wie sich die Tangente der unebenen Curve an jeder Stelle unmittelbar aus den Gleichungen dieser Curve auffinden lässt. Ueberdiess geht aus dem, was im zweiten Abschnitte (§. 11. Nr. 95.) über die Gerade gesagt worden ist, hervor, dass sich auch die Projectionszahlen, welche eine mit der Tangente zusammenfallende Richtung an den Axen giebt, auffinden lassen; bezeichnen nämlich p, p', p'' die schiefen, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die senkrechten Projectionszahlen, welche die zur Stelle O gehörige Tangente der unebenen Curve an den Axen AX, AX', AX'' giebt, so ist den dortigen Gleichungen (25.) zur Folge:

$$p : p' : p'' = 1 : \partial\xi' : \partial\xi'' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' = 1 : \partial\eta' : \partial\eta'', \qquad \textbf{(130. e.)}$$

woraus sich die Grössen p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ finden lassen, und auch diesen Gleichungen kann man mit Zuziehung derer (130. c.) ein abgeändertes Ansehen geben.

162) Wir wollen noch eine andere Art, die Tangente einer unebenen Curve zu bestimmen, mittheilen, durch die man zu der Bedeutung von Ausdrücken hingeführt wird, welche in spätern Untersuchungen öfters zum Vorschein kommen. Ist nämlich die unebene Curve durch die combinirten Gleichungspaare (124. a. und b.) gegeben, von welchen das eine die schiefen Coordinaten x, x', x'', das andere die senkrechten Coordinaten u, u', u'' von jedem Puncte der Curve in sich trägt, und legen wir durch einen beliebigen, aber bestimmt hervorgehobenen Punct O der Curve, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, drei neue mit den ursprünglichen parallele und gleichläufige Axen OX, OX', OX'' so dass, wenn x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten an den neuen Axen von demjenigen beweglichen Puncte O′ der Curve bezeichnen, der an den ursprünglichen Axen die x, x', x'' und u, u', u'' hatte, auch hier wieder sowohl die Gleichungen (125.) als die (126. a.) und (126. b.) volle Gültigkeit behalten, so kann man auch auf folgendem Wege zur Kenntniss der zum Puncte O gehörigen Tangente gelangen.

Stellt R den Abstand des beweglichen Punctes O′ von dem unveränderlich gedachten O vor, so ist zufolge der oben (Abschn. I. §. 2.) mitgetheilten Gleichung (17.):

$$R^2 = x_0 u_0 + x'_0 u'_0 + x''_0 u''_0\,, \qquad \textbf{(131. a.)}$$

und legt man durch den Punct O eine vorläufig noch ganz unbestimmt bleibende Gerade, welche durch ein vom Puncte O′ aus auf sie gefälltes Loth im Puncte S geschnitten wird, so ist O′SO ein bei S rechtwinkliges Dreieck, und man hat, wenn die Länge OS durch Π, sowie der Winkel O′OS durch Θ bezeichnet wird:

$$R\cos\Theta = \Pi\,. \qquad \textbf{(131. b.)}$$

Bezeichnen nun p, p', p'' die schiefen, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ die senkrechten Projectionszahlen, welche die von O nach S hinzielende Richtung an den Axen des ursprünglichen sowohl wie des neuen Systems giebt, so ist den oben (Abschn. I. §. 2.) gegebenen Gleichungen (13.) gemäss:

(131. c.) $$R\cos\Theta = \Pi = \mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x_0' + \mathfrak{p}''x_0'' = p\,u_0 + p'u_0' + p''u_0''$$

und hieraus folgt durch Multiplication:

(131. d.) $$\Pi^2 = (\mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x_0' + \mathfrak{p}''x_0'')(p\,u_0 + p'u_0' + p''u_0'').$$

Bezeichnet man noch die Länge O′S durch E, so hat man, weil O′SO ein bei S rechtwinkliges Dreieck ist:

$$O'S^2 = O'O^2 - OS^2 \quad \text{oder} \quad E^2 = R^2 - \Pi^2,$$

und diess giebt in Folge der Gleichungen (131. a. und d.):

(131. e.) $$E^2 = x_0 u_0 + x_0' u_0' + x_0'' u_0'' - (\mathfrak{p}\,x_0 + \mathfrak{p}'x_0' + \mathfrak{p}''x_0'')(p\,u_0 + p'u_0' + p''u_0'').$$

Erwägt man jetzt, dass E^2 das Quadrat des Abstandes des beweglichen Curvenpunctes O′ von der durch O gelegten und noch nicht weiter bestimmten Geraden ist, und dass sich in diesem Quadrate die absolute Entfernung des Punctes O′ von dieser Geraden abspiegelt, so überzeugt man sich, dass nur die Gerade die Lagerungsweise der Curvenpuncte an der Stelle O zu erkennen geben und aus diesem Grunde die Tangente dieser Curve an dem Puncte O sein wird, welche die Eigenschaft besitzt, dass alle zunächst bei O liegende Puncte der Curve ihr so nahe wie möglich zu liegen kommen, oder mit andern Worten, dass alle solche Puncte O′ die möglichst kleinsten Werthe von E^2 in Bezug auf diese Gerade liefern.

Um die hierzu erforderlichen Bedingungen zu erhalten, setze man in die vorstehenden Gleichungen für x_0', x_0'' und u_0', u_0'' ihre durch die Gleichungen (126. a. und b.) gegebenen Werthe ein, denen gemäss

$$x_0'u_0' = x_0 u_0 [\partial\xi'\partial\eta' + \tfrac{1}{2}\partial\eta'\partial^2\xi' x_0 + \tfrac{1}{2}\partial\xi'\partial^2\eta' u_0$$
$$+ \tfrac{1}{6}\partial\eta'\partial^3\xi' x_0^2 + \tfrac{1}{4}\partial^2\xi'\partial^2\eta' x_0 u_0 + \tfrac{1}{6}\partial\xi'\partial^3\eta' u_0^2 + \ldots]$$

und

$$x_0''u_0'' = x_0 u_0 [\partial\xi''\partial\eta'' + \tfrac{1}{2}\partial\eta''\partial^2\xi'' x_0 + \tfrac{1}{2}\partial\xi''\partial^2\eta'' u_0$$
$$+ \tfrac{1}{6}\partial\eta''\partial^3\xi'' x_0^2 + \tfrac{1}{4}\partial^2\xi''\partial^2\eta'' x_0 u_0 + \tfrac{1}{6}\partial\xi''\partial^3\eta'' u_0^2 + \ldots]$$

ist, so verwandelt sich erstlich die Gleichung (131. a.) in:

$$R^2 = x_0 u_0 [1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' + \tfrac{1}{2} x_0 (\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'') + \tfrac{1}{2} u_0 (\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'')$$

(132. a.) $$+ \tfrac{1}{6} x_0^2 (\partial\eta'\partial^3\xi' + \partial\eta''\partial^3\xi'') + \tfrac{1}{4} x_0 u_0 (\partial^2\xi'\partial^2\eta' + \partial^2\xi''\partial^2\eta'') + \tfrac{1}{6} u_0^2 (\partial\xi'\partial^3\eta' + \partial\xi''\partial^3\eta'') + \ldots],$$

sodann lösen sich die Gleichungen (131. c.) durch die gleiche Substitution in die zwei folgenden auf:

(132. b.) $$\left\{\begin{aligned} \Pi &= x_0 [\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'' + \tfrac{1}{2} x_0 (\mathfrak{p}'\partial^2\xi' + \mathfrak{p}''\partial^2\xi'') \\ &\qquad + \tfrac{1}{6} x_0^2 (\mathfrak{p}'\partial^3\xi' + \mathfrak{p}''\partial^3\xi'') + \ldots] \text{ und} \\ \Pi &= u_0 [p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'' + \tfrac{1}{2} u_0 (p'\partial^2\eta' + p''\partial^2\eta'') \\ &\qquad + \tfrac{1}{6} u_0^2 (p'\partial^3\eta' + p''\partial^3\eta'') + \ldots], \end{aligned}\right.$$

welche durch Multiplication geben:

$$\left.\begin{aligned}\Pi^2 = x_0 u_0 [&(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'') \\ &+ \tfrac{1}{2} x_0 (p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'')(\mathfrak{p}'\partial^2\xi' + \mathfrak{p}''\partial^2\xi'') + \tfrac{1}{2} u_0 (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p'\partial^2\eta' + p''\partial^2\eta'') \\ &+ \tfrac{1}{6} x_0^2 (p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'')(\mathfrak{p}'\partial^3\xi' + \mathfrak{p}''\partial^3\xi'') + \tfrac{1}{4} x_0 u_0 (\mathfrak{p}'\partial^2\xi' + \mathfrak{p}''\partial^2\xi'')(p'\partial^2\eta' + p''\partial^2\eta'') \\ &+ \tfrac{1}{6} u_0^2 (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}''\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p'\partial^3\eta' + p''\partial^3\eta'') + \ldots];\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(132. c.)}$$

zuletzt erhält man, die Gleichung (132. c.) von der (132. a.) subtrahirend:

$$\left.\begin{aligned}E^2 = x_0 u_0 [&1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' - (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'') \\ &+ \tfrac{1}{2} x_0 [\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'' - (p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'')(\mathfrak{p}'\partial^2\xi' + \mathfrak{p}''\partial^2\xi'')] \\ &+ \tfrac{1}{2} u_0 [\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'' - (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p'\partial^2\eta' + p''\partial^2\eta'')] + \ldots].\end{aligned}\right\} \quad \textbf{(132. d.)}$$

In den Gleichungen (132. a.) und (132. c.) sind alle Glieder angeschrieben, die nicht von der fünften oder noch höhern Dimension in Bezug auf x_0 und u_0 sind, in den Gleichungen (132. b.) und (132. d.) hingegen fehlen die Glieder der vierten und der höhern Dimensionen bezüglich derselben Grössen.

Da nun, wenn die durch O gelegte und bis jetzt noch nicht weiter bestimmte Gerade die Tangente der unebenen Curve an dieser Stelle werden soll, der Werth von E^2 für alle zunächst bei O gelegene Puncte der Curve, (d. h. für alle solche Puncte, zu denen so kleine Werthe x_0 und u_0 gehören, dass sich dieselben durch ein endliches Maass nicht darstellen lassen), so klein wie möglich werden muss, und unter solchen Umständen die Glieder einer höhern Dimension neben denen einer niedrigern Dimension in jener Reihe verschwinden, so müssen auf der rechten Seite der Gleichung (132. d.) so viele Glieder der niedrigsten Dimension, als sich überhaupt thun lässt, durch die zu findende Tangente vernichtet werden. Man hat sonach zuvörderst an die Tangente die nachstehende Bedingung zu stellen:

$$1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' - (\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'\partial\xi' + \mathfrak{p}''\partial\xi'')(p + p'\partial\eta' + p''\partial\eta'') = 0,$$

welcher Bedingung man durch Wegschaffung der Klammern die andere Gestalt geben kann:

$$\begin{aligned}1 - \mathfrak{p}p + \partial\xi'\partial\eta'(1 - \mathfrak{p}'p') + \partial\xi''\partial\eta''(1 - \mathfrak{p}''p'') - p\mathfrak{p}'\partial\xi' - p\mathfrak{p}''\partial\xi'' \\ - \mathfrak{p}p'\partial\eta' - \mathfrak{p}p''\partial\eta'' - p'\mathfrak{p}''\partial\eta'\partial\xi'' - \mathfrak{p}'p''\partial\xi'\partial\eta'' = 0.\end{aligned}$$

Bedenkt man aber, dass in Gemässheit der im ersten Abschnitte aufgestellten Richtungsgleichung (11.)

$$1 = p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}''$$

ist, und dass man daher an die Stelle der Differenzen $1 - \mathfrak{p}p$, $1 - \mathfrak{p}'p'$, $1 - \mathfrak{p}''p''$ in der vorigen Gleichung die Summen $p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}''$, $p\mathfrak{p} + p''\mathfrak{p}''$, $p\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}'$ setzen kann, so wird man, nachdem diess geschehen ist, der vorstehenden Bedingung die folgende Form geben können:

$$(p\partial\xi' - p')(\mathfrak{p}\partial\eta' - \mathfrak{p}') + (p\partial\xi'' - p'')(\mathfrak{p}\partial\eta'' - \mathfrak{p}'') + (p''\partial\xi' - p'\partial\xi'')(\mathfrak{p}''\partial\eta' - \mathfrak{p}'\partial\eta'') = 0. \quad \textbf{(133. a.)}$$

Diese letzte Gleichung wird aber nur erfüllt, wenn entweder

(133. b.)
$$\begin{cases} p\,\mathfrak{d}\xi' - p' = 0\,, \quad p\,\mathfrak{d}\xi'' - p'' = 0\,, \quad p''\,\mathfrak{d}\xi' - p'\,\mathfrak{d}\xi'' = 0\,, \\ \text{oder wenn} \\ \mathfrak{p}\,\mathfrak{d}\eta' - \mathfrak{p}' = 0\,, \quad \mathfrak{p}\,\mathfrak{d}\eta'' - \mathfrak{p}'' = 0\,, \quad \mathfrak{p}''\,\mathfrak{d}\eta' - \mathfrak{p}'\,\mathfrak{d}\eta'' = 0 \end{cases}$$

ist, und da die dritte Gleichung in jeder dieser zwei Reihen schon aus den beiden ersten folgt, so braucht man blos zwei Gleichungen von jeder Reihe zu berücksichtigen; besser thut man aber, sie so zu schreiben:

(133. c.)
$$p : p' : p'' = 1 : \mathfrak{d}\xi' : \mathfrak{d}\xi'' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{p} : \mathfrak{p}' : \mathfrak{p}'' = 1 : \mathfrak{d}\eta' : \mathfrak{d}\eta'',$$

wo sie nun mit den Gleichungen (130. c.) zusammenfallen. Da durch die Gleichungen (133. c.) die Projectionszahlen p, p', p'' oder $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ völlig bestimmt werden (Abschn. I. Nr. 21.) und durch diese die Richtung der durch O zu legenden Tangente gegeben ist, so ist diese Tangente selber völlig bestimmt, und man kann daher über keine folgenden Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (132. d.) zur weiteren Bestimmung der Tangente mehr verfügen, so dass die Bedingungen (133. c.) alles zur Bestimmung der Tangente Erforderliche in sich fassen.

Wer es bedenklich finden wollte, dass wir die Bedingung (133. a.) in die Bedingungen (133. b.) aufgelöst haben, da ja eine Summe null geben kann, ohne dass ihre einzelnen Summanden null zu sein brauchen, der kann sich von der Rechtmässigkeit unseres Verfahrens noch besonders auf die folgende Art überzeugen. Man kann nämlich die drei Zahlen 1, $\mathfrak{d}\xi'$, $\mathfrak{d}\xi''$ immer als die drei schiefen Coordinaten an den Axen AX, AX′, AX″ eines Punctes P im Raume ansehen, und da den untersten Gleichungen (128. c.) zur Folge, wenn man dieselben auf den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, in Anwendung bringt,

$$\mathfrak{d}\eta' = \frac{\cos W + \mathfrak{d}\xi' + \cos W''\,\mathfrak{d}\xi''}{1 + \cos W\,\mathfrak{d}\xi' + \cos W'\,\mathfrak{d}\xi''}\,, \quad \mathfrak{d}\eta'' = \frac{\cos W' + \cos W''\,\mathfrak{d}\xi' + \mathfrak{d}\xi''}{1 + \cos W\,\mathfrak{d}\xi' + \cos W'\,\mathfrak{d}\xi''}\,,$$

sonach auch

$$1 : \mathfrak{d}\eta' : \mathfrak{d}\eta'' = 1 + \cos W\,\mathfrak{d}\xi' + \cos W'\,\mathfrak{d}\xi'' : \cos W + \mathfrak{d}\xi' + \cos W''\,\mathfrak{d}\xi'' : \cos W' + \cos W''\,\mathfrak{d}\xi' + \mathfrak{d}\xi''$$

ist, die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens stehenden Glieder in diesen Verhältnissen aber ihrer Ordnung nach die senkrechten Coordinaten des Punctes P an den Axen AX, AX′, AX″ sind, den im ersten Abschnitt gegebenen Gleichungen (15. a.) gemäss, weil 1, $\mathfrak{d}\xi'$, $\mathfrak{d}\xi''$ die schiefen Coordinaten dieses Punctes sind, so sieht man ein, dass die Grössen 1, $\mathfrak{d}\eta'$, $\mathfrak{d}\eta''$ den senkrechten Coordinaten des Punctes P proportional sind, dass also diese Coordinaten selber durch s, $s\,\mathfrak{d}\eta'$, $s\,\mathfrak{d}\eta''$ vorgestellt werden können. Nennt man nun r die Entfernung des Punctes P von der Coordinatenspitze A, und bezeichnen a, a', a'' die schiefen, c, c', c'' die senkrechten Projectionszahlen, welche die von A nach P hinzielende Richtung an den Axen AX, AX′, AX″ giebt, so ist den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (5.) zur Folge:

(134. a.)
$$\frac{1}{r} = a\,, \quad \frac{\mathfrak{d}\xi'}{r} = a'\,, \quad \frac{\mathfrak{d}\xi''}{r} = a'' \quad \text{und} \quad \frac{s}{r} = c\,, \quad \frac{s\,\mathfrak{d}\xi'}{r} = c'\,, \quad \frac{s\,\mathfrak{d}\eta''}{r} = c''.$$

Multiplizirt man jetzt die Bedingungen (133. a.) mit $\frac{s}{r^2}$, so verwandeln sich dieselben mittelst der Gleichungen (134. a.) in:

(134. b.)
$$(p\,a' - p'a)(\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c) + (p\,a'' - p''a)(\mathfrak{p}\,c'' - \mathfrak{p}''c) + (p''a' - p'a'')(\mathfrak{p}''c' - \mathfrak{p}'c'') = 0\,;$$

es ist aber nach Anleitung der im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (76.):

$$(p\,a' - p'a)\,h^2 = (\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c) + (\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'')\cos W'' + (\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c')\cos W',$$
$$(p''a - p\,a'')\,h^2 = (\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c)\cos W'' + (\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'') + (\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c')\cos W,$$
$$(p'a'' - p''a')\,h^2 = (\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c)\cos W' + (\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'')\cos W + (\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c'),$$

und setzt man die für $p\,a' - p'a$, $p''a - p\,a''$, $p'a'' - p''a'$ gegebenen Werthe in die Gleichung (134. b.), so geht diese über in:

$$\frac{1}{h^2}\big[(\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c)^2 + (\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'')^2 + (\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c')^2 + 2(\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c)(\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'')\cos W''$$
$$+ 2(\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c)(\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c')\cos W' + 2(\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'')(\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c')\cos W\big] = 0,$$

und da $\frac{1}{h^2}$ nie null sein kann, so wird diese Gleichung nur dadurch befriedigt, dass der in den eckigen Klammern stehende Factor null wird. Nun stellt aber dieser Factor, der im ersten Abschnitte gegebenen Gleichung (53.) gemäss, das Quadrat der Entfernung eines Punctes, dessen schiefe Coordinaten an den Axen AX, AX', AX'' durch $\mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c'$, $\mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c''$, $\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c$ vorgestellt werden, von der Coordinatenspitze A vor, und da die Entfernung eines Punctes von der Coordinatenspitze nur dann null werden kann, wenn dessen drei Coordinaten sämmtlich null sind, so kann die zuletzt angeschriebene Gleichung nur dann erfüllt werden, wenn gleichzeitig

$$\mathfrak{p}\,c' - \mathfrak{p}'c = 0, \quad \mathfrak{p}''c - \mathfrak{p}\,c'' = 0, \quad \mathfrak{p}'c'' - \mathfrak{p}''c' = 0 \qquad \textbf{(134. c.)}$$

ist. Setzt man nun in diese Bedingungen wieder für c, c', c'' ihre Werthe aus den Gleichungen (134. a.) ein, so werden sie:

$$\mathfrak{p}\,\partial\eta' - \mathfrak{p}' = 0, \quad \mathfrak{p}'' - \mathfrak{p}\,\partial\eta'' = 0, \quad \mathfrak{p}'\partial\eta'' - \mathfrak{p}''\partial\eta' = 0,$$

und diese sind keine andern als die untern (133. b.) Auf eine ganz ähnliche Weise kann man aber auch zu den obern Gleichungen (133. b.) gelangen, und wiewohl an die Stelle solcher Beweise kürzere gesetzt werden können, so sind sie doch aller Beachtung werth, da sie innig mit der Natur des schiefwinkligen Coordinatensystems zusammenhängen.

163) Bevor wir weiter gehen, wollen wir den bis jetzt vorgekommenen Ausdrücken eine abgeänderte Gestalt geben. Die Gleichungen (133. b.) oder (133. c.) geben:

$$p' = p\,\partial\xi', \quad p'' = p\,\partial\xi'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{p}\,\partial\eta', \quad \mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}\,\partial\eta''; \qquad \textbf{(135. a.)}$$

setzt man aber diese Werthe von p', p'' und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ in die Gleichungen (132. b. und c.), so erhält man:

$$\Pi = x_0\,\mathfrak{p}\big[1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' + \tfrac{1}{2}x_0(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'') + \tfrac{1}{6}x_0^2(\partial\eta'\partial^3\xi' + \partial\eta''\partial^3\xi'') + \ldots\big],$$
$$\Pi = u_0\,p\big[1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' + \tfrac{1}{2}u_0(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'') + \tfrac{1}{6}u_0^2(\partial\xi'\partial^3\eta' + \partial\xi''\partial^3\eta'') + \ldots\big],$$
$$\Pi^2 = x_0 u_0\,p\,\mathfrak{p}\,\big[(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')^2$$
$$+ (1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')\big[\tfrac{1}{2}x_0(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'') + \tfrac{1}{2}u_0(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'')\big]$$
$$+ \tfrac{1}{6}x_0^2(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')(\partial\eta'\partial^3\xi' + \partial\eta''\partial^3\xi'')$$
$$+ \tfrac{1}{4}x_0 u_0(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'')(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'')$$
$$\ldots + \tfrac{1}{6}u_0^2(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')(\partial\xi'\partial^3\eta' + \partial\xi''\partial^3\eta'') + \ldots\big]. \qquad \textbf{(135. b.)}$$

Dieselben Werthe von p', p'' und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ verwandeln ferner die schon vorhin angegebene Richtungsgleichung $1 = p\,\mathfrak{p} + p'\mathfrak{p}' + p''\mathfrak{p}''$ in:

(135. c.) $$1 = p\,\mathfrak{p}\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta''),$$

und da den im ersten Abschnitt aufgestellten Gleichungen (12.) gemäss

$$\mathfrak{p} = p + p'\cos W + p''\cos W'$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (135. a.):

$$\mathfrak{p} = p\,(1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W')$$

ist, die auf den Punct O angewandte erste auf zweiter Zeile stehende Gleichung (128. b.) aber

$$\delta\eta = 1 + \partial\xi'\cos W + \partial\xi''\cos W'$$

liefert, wodurch die vorige

$$\mathfrak{p} = p\,\delta\eta$$

oder auch, weil der auf den Punct O angewandten ersten Gleichung (128. c.) zur Folge $\delta\xi\,\delta\eta = 1$ ist,

$$p = \mathfrak{p}\,\delta\xi$$

wird, so lassen sich hieraus und aus der Gleichung (135. c.) die Werthe p und $\mathfrak{p}$ und dann noch mittelst der Gleichungen (135. a.) die p', p'' und $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ wie folgt angeben:

(135. d.) $$\begin{cases} p = [\delta\eta\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}} & \text{und } \mathfrak{p} = [\delta\xi\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}}, \\ p' = \partial\xi'\,[\delta\eta\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}} & \text{und } \mathfrak{p}' = \partial\eta'\,[\delta\xi\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}}, \\ p'' = \partial\xi''\,[\delta\eta\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}} & \text{und } \mathfrak{p}'' = \partial\eta''\,[\delta\xi\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

und durch diese Werthe nehmen die Gleichungen (135. b.) die folgende Gestalt an:

(135. e.) $$\begin{cases} \Pi = x_0\,[\delta\xi\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}}\,[1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' + \frac{1}{2}x_0(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'') \\ \qquad + \frac{1}{6}x_0^2(\partial\eta'\partial^3\xi' + \partial\eta''\partial^3\xi'') + \ldots], \\ \Pi = u_0\,[\delta\eta\,(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')]^{-\frac{1}{2}}\,[1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'' + \frac{1}{2}u_0(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'') \\ \qquad + \frac{1}{6}u_0^2(\partial\xi'\partial^3\eta' + \partial\xi''\partial^3\eta'') + \ldots], \\ \Pi^2 = x_0 u_0\,[(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'') + \frac{1}{2}x_0(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'') + \frac{1}{2}u_0(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'') \\ \qquad + \frac{1}{6}x_0^2(\partial\eta'\partial^3\xi' + \partial\eta''\partial^3\xi'') + \frac{1}{6}u_0^2(\partial\xi'\partial^3\eta' + \partial\xi''\partial^3\eta'') \\ \qquad + \frac{1}{4}x_0 u_0\,\frac{(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'')(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'')}{1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta''} + \ldots]. \end{cases}$$

Zieht man die letzte Π^2 darstellende Gleichung von der (132. a.) ab, so erhält man, weil $E^2 = R^2 - \Pi^2$ ist:

(135. f.) $$E^2 = \frac{1}{4}x_0^2 u_0^2\,[\partial^2\xi'\partial^2\eta' + \partial^2\xi''\partial^2\eta'' - \frac{(\partial\eta'\partial^2\xi' + \partial\eta''\partial^2\xi'')(\partial\xi'\partial^2\eta' + \partial\xi''\partial^2\eta'')}{1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta''} + \ldots],$$

welches zeigt, dass in der Reihe (132. d.) durch die Annullirung ihres ersten Gliedes, welches von der zweiten Dimension in Bezug auf x_0 und u_0 war, zugleich auch das folgende die dritte Dimension aufweisende verschwunden ist.

Man kann alle bisherigen Ausdrücke sehr einfach darstellen, wenn man

$$1+\partial x'\partial u'+\partial x''\partial u''=\chi_{x,u} \qquad (136.\ a.)$$

setzt, und unter $\chi_{x,u}$ die Function von x und u versteht, in welche $1+\partial x'\partial u'+\partial x''\partial u''$ übergeht, wenn man $\partial x'$ und $\partial x''$ als die Functionen von x ansieht, zu denen das Gleichungspaar (124. a.) hinführt, und ebenso $\partial u'$ und $\partial u''$ als diejenigen Functionen von u, zu denen das Gleichungspaar (124. b.) hinführt. Leitet man in diesem Sinne die Gleichung (136. a.) einmal nach x und ein andermal nach u ab, so erhält man:

$$\partial^2 x'\partial u'+\partial^2 x''\partial u''=\overset{10}{\partial}\chi_{x,u} \quad \text{und} \quad \partial x'\partial^2 u'+\partial x''\partial^2 u''=\overset{01}{\partial}\chi_{x,u} \qquad (136.\ b.)$$

und durch nochmaliges Ableiten einer jeden dieser beiden Gleichungen in derselben Weise findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \partial^3 x'\partial u'+\partial^3 x''\partial u''=\overset{20}{\partial}\chi_{x,u}, \quad \partial^2 x'\partial^2 u'+\partial^2 x''\partial^2 u''=\overset{11}{\partial}\chi_{x,u}, \\ \qquad \partial x'\partial^3 u'+\partial x''\partial^3 u''=\overset{02}{\partial}\chi_{x,u}, \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (136.\ c.)$$

welche Gleichungen, wenn man sie auf den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, in Anwendung bringt, geben: erstlich

$$1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta''=\chi_{\xi,\eta}, \qquad (136.\ d.)$$

sodann

$$\partial\eta'\partial^2\xi'+\partial\eta''\partial^2\xi''=\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta} \quad \text{und} \quad \partial\xi'\partial^2\eta'+\partial\xi''\partial^2\eta''=\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}, \qquad (136.\ e.)$$

hierauf

$$\left.\begin{array}{l} \partial\eta'\partial^3\xi'+\partial\eta''\partial^3\xi''=\overset{20}{\partial}\chi_{\xi,\eta}, \quad \partial^2\xi'\partial^2\eta'+\partial^2\xi''\partial^2\eta''=\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta}, \\ \qquad \partial\xi'\partial^3\eta'+\partial\xi''\partial^3\eta''=\overset{02}{\partial}\chi_{\xi,\eta}. \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (136.\ f.)$$

Mittelst der in (136. d.) festgesetzten Bezeichnung lassen sich nun zunächst die Gleichungen (135. d.) so schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} p=\dfrac{1}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\eta}, \quad p'=\dfrac{\partial\xi'}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\eta}, \quad p''=\dfrac{\partial\xi''}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\eta} \\ \text{und} \\ \mathfrak{p}=\dfrac{1}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\xi}, \quad \mathfrak{p}'=\dfrac{\partial\eta'}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\xi}, \quad \mathfrak{p}''=\dfrac{\partial\eta''}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}}\,\partial\xi}, \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (137.\ a.)$$

sodann nimmt mittelst der Relationen (136. d. bis f.) die Gleichung (132. a.) nachfolgende Gestalt an:

$$R^2=x_0u_0\left[\chi_{\xi,\eta}+\tfrac{1}{2}x_0\overset{10}{\partial}\chi+\tfrac{1}{2}u_0\overset{01}{\partial}\chi+\tfrac{1}{6}x_0^2\overset{20}{\partial}\chi+\tfrac{1}{4}x_0u_0\overset{11}{\partial}\chi+\tfrac{1}{6}u_0^2\overset{02}{\partial}\chi+\ldots\right]; \qquad (137.\ b.)$$

die Gleichungen (135. e.) gehen mittelst derselben Relationen über in:

(137. c.)

$$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \frac{x_0}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}\,\partial\xi}}\left[\chi_{\xi,\eta} + \frac{1}{2}x_0\overset{10}{\partial}\chi + \frac{1}{6}x_0^2\overset{20}{\partial}\chi + \ldots\right], \\ \Pi &= \frac{u_0}{\sqrt{\chi_{\xi,\eta}\,\partial\eta}}\left[\chi_{\xi,\eta} + \frac{1}{2}u_0\overset{01}{\partial}\chi + \frac{1}{6}u_0^2\overset{02}{\partial}\chi + \ldots\right], \\ \Pi^2 &= x_0 u_0\left[\chi_{\xi,\eta} + \frac{1}{2}x_0\overset{10}{\partial}\chi + \frac{1}{2}u_0\overset{01}{\partial}\chi + \frac{1}{6}x_0^2\overset{20}{\partial}\chi + \frac{1}{4}x_0 u_0\frac{\overset{10}{\partial}\chi\overset{01}{\partial}\chi}{\chi} + \frac{1}{6}u_0^2\overset{02}{\partial}\chi + \ldots\right]; \end{aligned}\right.$$

die Gleichung (135. f.) endlich wird:

$$E^2 = \frac{1}{4}x_0^2 u_0^2\left[\overset{11}{\partial}\chi - \frac{\overset{10}{\partial}\chi\overset{01}{\partial}\chi}{\chi_{\xi,\eta}} + \ldots\right]$$

oder

(137. d.)

$$E^2 = \frac{1}{4}x_0^2 u_0^2\left[\frac{\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi - \overset{10}{\partial}\chi\overset{01}{\partial}\chi}{\chi_{\xi,\eta}} + \ldots\right],$$

und man kann diese Reihen in derselben Weise fortsetzen, soweit man will.

Die Reihen (137. b. bis d.) geben den Abstand R eines jeden beliebigen Punctes O′ der unebenen Curve von dem bestimmt hervorgehobenen O der gleichen Curve; die Länge E des von dem Puncte O′ auf die durch O gelegte Tangente gefällten Lothes, oder den senkrechten Abstand jenes Punctes von dieser Tangente; so wie auch das von O bis zu diesem Lothe reichende Stück Π dieser Tangente. Fasst man aber von allen möglichen Puncten O′ der unebenen Curve nur solche ins Auge, welche dem O so nahe liegen, dass sich die diesen Puncten zukommenden Werthe von x_0 und u_0 durch ein endliches Maass nicht mehr aussprechen lassen, und desswegen alle später kommenden Glieder in jenen Reihen, falls diese Reihen überhaupt zulässig sind, gegen ein früheres ganz und gar verschwinden, so ziehen sich jene Reihen sämmtlich auf ihr erstes Glied zurück, und geben, wenn man beachtet, dass $\partial\xi\,\partial\eta = 1$ ist:

(138.)

$$\left\{\begin{aligned} & R_0^2 = \Pi_0^2 = x_0 u_0 \chi_{\xi,\eta}, \quad \Pi_0 = x_0\sqrt{\chi_{\xi,\eta}\,\partial\eta}, \quad \Pi_0 = u_0\sqrt{\chi_{\xi,\eta}\,\partial\xi}, \\ & E_0^2 = \frac{1}{4}x_0^2 u_0^2\frac{\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi - \overset{10}{\partial}\chi\overset{01}{\partial}\chi}{\chi_{\xi,\eta}}, \end{aligned}\right.$$

wobei wir den Buchstaben R, Π und E den Index 0 beigegeben haben, zum Zeichen, dass sie sich auf möglichst nahe bei dem O liegende Puncte O′ beziehen. Die Gleichungen (138.) geben zu erkennen, dass die Entfernung so naher Puncte O′ von dem O gleich wird dem Stücke der zu letzterem Puncte gehörigen Tangente, welches zwischen O und dem Lothe liegt, das von ihnen auf diese Tangente gefällt wird.

164) Die Tangenten der unebenen Curven haben mit denen der ebenen Curven alle jene Eigenschaften gemein, welche in diesem Abschnitte (§. 13. Nr. 128.) angezeigt worden sind, wie jetzt noch dargethan werden soll. Nach dem bisher Vorgebrachten wird die Tangente einer unebenen Curve an dem Puncte O durch die Gleichungen (127. a.) oder (127. b.), nämlich:

(139. a.) $\quad x_0' = \partial\xi' x_0, \quad x_0'' = \partial\xi'' x_0 \quad$ oder $\quad u_0' = \partial\eta' u_0, \quad u_0'' = \partial\eta'' u_0$

völlig bestimmt, während die unebene Curve selber durch die Gleichungen (126. a). oder (126. b.), nämlich:

$$x'_0 = \partial\xi' x_0 + Z', \quad x''_0 = \partial\xi'' x_0 + Z'' \quad \text{oder} \quad u'_0 = \partial\eta' u_0 + \mathfrak{Z}', \quad u''_0 = \partial\eta'' u_0 + \mathfrak{Z}'' \qquad \textbf{(139. b.)}$$

gegeben ist, wobei wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}x_0^2\,\partial^2\xi' + \frac{1}{6}x_0^3\,\partial^3\xi' + \ldots = Z', \quad \frac{1}{2}x_0^2\,\partial^2\xi'' + \frac{1}{6}x_0^3\,\partial^3\xi'' + \ldots = Z'' \\ \text{und} \\ \frac{1}{2}u_0^2\,\partial^2\eta' + \frac{1}{6}u_0^3\,\partial^3\eta' + \ldots = \mathfrak{Z}', \quad \frac{1}{2}u_0^2\,\partial^2\eta'' + \frac{1}{6}u_0^3\,\partial^3\eta'' + \ldots = \mathfrak{Z}'' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \textbf{(139. c.)}$$

gesetzt haben. Die Gleichungen (139. a.) liefern für jeden Werth von x_0 oder u_0 die zu dieser einen Coordinate gehörigen zwei andern x'_0, x''_0 oder u'_0, u''_0 von einem in der Tangente an O liegenden Puncte, die (139. b.) hingegen liefern für jeden Werth von x_0 oder u_0 die zu dieser einen Coordinate gehörigen beiden andern x'_0, x''_0 oder u'_0, u''_0 von einem in der unebenen Curve liegenden Puncte. Denkt man sich nun in der unebenen Curve zwei von dem O verschiedene Puncte O_1 und O_2 ausgewählt, und bezeichnet man die schiefen und senkrechten Coordinaten, welche diese Puncte an den Axen OX, OX', OX'' liefern, durch x_1, x'_1, x''_1; x_2, x'_2, x''_2 und u_1, u'_1, u''_1 und u_2, u'_2, u''_2, so hat man in Bezug auf den Punct O_1:

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = \partial\xi' x_1 + Z'_1, \quad x''_1 = \partial\xi'' x_1 + Z''_1 \quad \text{oder} \quad u'_1 = \partial\eta' u_1 + \mathfrak{Z}'_1, \quad u''_1 = \partial\eta'' u_1 + \mathfrak{Z}''_1 \\ \text{und in Bezug auf den Punct } O_2: \\ x'_2 = \partial\xi' x_2 + Z'_2, \quad x''_2 = \partial\xi'' x_2 + Z''_2 \quad \text{oder} \quad u'_2 = \partial\eta' u_2 + \mathfrak{Z}'_2, \quad u''_2 = \partial\eta'' u_2 + \mathfrak{Z}''_2 \end{array}\right\} \ldots \textbf{(139. d.)}$$

den Gleichungen (139. b.) gemäss, wenn Z'_1, Z''_1, $\mathfrak{Z}'_1$, $\mathfrak{Z}''_1$, sowie Z'_2, Z''_2, $\mathfrak{Z}'_2$, $\mathfrak{Z}''_2$ das bedeuten, was aus Z', Z'', $\mathfrak{Z}'$, $\mathfrak{Z}''$ wird, wenn in die Gleichungen (139. c.) x_1 oder u_1, sowie x_2 oder u_2 für x_0 oder u_0 gesetzt wird. Zieht man die über einander stehenden Gleichungen (139. d.) von einander ab, so erhält man:

$$x'_2 - x'_1 = \partial\xi'(x_2 - x_1) + Z'_2 - Z'_1, \quad x''_2 - x''_1 = \partial\xi''(x_2 - x_1) + Z''_2 - Z''_1$$

oder

$$u'_2 - u'_1 = \partial\eta'(u_2 - u_1) + \mathfrak{Z}'_2 - \mathfrak{Z}'_1, \quad u''_2 - u''_1 = \partial\eta''(u_2 - u_1) + \mathfrak{Z}''_2 - \mathfrak{Z}''_1,$$

denen man auch die folgende Gestalt geben kann:

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\left(\partial\xi' + \frac{Z'_2 - Z'_1}{x_2 - x_1}\right), \quad x''_2 - x''_1 = (x_2 - x_1)\left(\partial\xi'' + \frac{Z''_2 - Z''_1}{x_2 - x_1}\right)$$

oder

$$u'_2 - u'_1 = (u_2 - u_1)\left(\partial\eta' + \frac{\mathfrak{Z}'_2 - \mathfrak{Z}'_1}{u_2 - u_1}\right), \quad u''_2 - u''_1 = (u_2 - u_1)\left(\partial\eta'' + \frac{\mathfrak{Z}''_2 - \mathfrak{Z}''_1}{u_2 - u_1}\right);$$

bringt man diese Gleichungen auf die andere Form:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 - x_1 : x'_2 - x'_1 : x''_2 - x''_1 = 1 : \left(\partial\xi' + \frac{Z'_2 - Z'_1}{x_2 - x_1}\right) : \left(\partial\xi'' + \frac{Z''_2 - Z''_1}{x_2 - x_1}\right) \\ \text{oder} \\ u_2 - u_1 : u'_2 - u'_1 : u''_2 - u''_1 = 1 : \left(\partial\eta' + \frac{\mathfrak{Z}'_2 - \mathfrak{Z}'_1}{u_2 - u_1}\right) : \left(\partial\eta'' + \frac{\mathfrak{Z}''_2 - \mathfrak{Z}''_1}{u_2 - u_1}\right), \end{array}\right\} \ldots\ldots \textbf{(139. e.)}$$

und erwägt man, dass zufolge der Bezeichnungen (139. c.) Z' und Z'' oder $\mathfrak{Z}'$ und $\mathfrak{Z}''$ Ausdrücke sind, welche x_1, x_2 oder u_1, u_2 von der zweiten und höhern Dimension enthalten, und demgemäss $Z'_2 - Z'_1$ und $Z''_2 - Z''_1$ oder $\mathfrak{Z}'_2 - \mathfrak{Z}'_1$ und $\mathfrak{Z}''_2 - \mathfrak{Z}''_1$ Ausdrücke von mindestens der zweiten Dimension in Bezug auf x_2 und x_1 oder u_2 und u_1 sind, so überzeugt man sich, dass

$\frac{Z_2' - Z_1'}{x_2 - x_1}$ und $\frac{Z_2'' - Z_1''}{x_2 - x_1}$ oder $\frac{\mathfrak{Z}_2' - \mathfrak{Z}_1'}{u_2 - u_1}$ und $\frac{\mathfrak{Z}_2'' - \mathfrak{Z}_1''}{u_2 - u_1}$ doch immer noch Ausdrücke von mindestens der ersten Dimension in Bezug auf x_2 und x_1 oder u_2 und u_1 sind; lässt man daher die beiden Puncte O_1 und O_2 dem O so nahe rücken, dass die ihnen entsprechenden Werthe von x_1 und x_2 oder u_1 und u_2 durch kein endliches Maass mehr angezeigt werden können, so verschwinden die Werthe der zuletzt genannten Ausdrücke in Vergleich zu den in den Gleichungen (139. e.) neben ihnen stehenden Grössen $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$, $\partial\eta''$, welche weder x_1, x_2 noch u_1, u_2 enthalten; für so nahe an O gelegene Puncte O_1 und O_2 verwandeln sich daher jene Gleichungen in:

$$\textbf{(139. f.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_1 : x_2' - x_1' : x_2'' - x_1'' = 1 : \partial\xi' : \partial\xi'' \\ \text{oder} \\ u_2 - u_1 : u_2' - u_1' : u_2'' - u_1'' = 1 : \partial\eta' : \partial\eta''. \end{array} \right.$$

Es verhalten sich aber die Coordinatenunterschiede $x_2 - x_1$, $x_2' - x_1'$, $x_2'' - x_1''$ oder $u_2 - u_1$, $u_2' - u_1'$, $u_2'' - u_1''$ den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (3.) zur Folge, wie die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen einer durch die Puncte O_1 und O_2 hindurch gehenden Richtung, also mit Rücksicht auf die Gleichungen (130. e.) gerade so wie die der Richtung, welche mit der Tangente an O übereinstimmt, woraus ferner folgt, dass die durch zwei so nahe an O gelegene Puncte O_1 und O_2 hindurch gehende Gerade parallel läuft mit der zu O gehörigen Tangente, und diess beweist, dass die unebene Curve auf jede unendlich kleine Strecke eine und dieselbe Richtung einhält und auf eine so geringe Ausdehnung, wenigstens so lange die Gleichungen (126. a.) oder (126. b.) auf sie anwendbar bleiben, zu keinem Zickzack Anlass giebt.

Aus dieser der unebenen Curve vindicirten Eigenschaft lässt sich nun mit voller Strenge und grosser Leichtigkeit schon durch die einfachsten Sätze der Elementar-Geometrie der folgende Satz herleiten:

> Geht in grösster Nähe eines Punctes O der unebenen Curve eine Gerade vorbei, welche die Curve, so wie auch deren dem Puncte O angehörige Tangente unter einem endlichen Winkel schneidet, so unterscheiden sich die von O aus bis zu dieser Geraden genommenen Längen der Curve und der Tangente nicht um eine Grösse von einander, die mit diesen Längen selbst vergleichbar wäre.

Im Gefolge der Eigenschaften einer die unebene Curve an einer ihrer Puncte O berührenden Geraden zeigt sich noch eine andere Eigenschaft, die in Folgendem besteht: Läuft nämlich eine der Coordinatenaxen AX, AX', AX'' z. B. die AX mit der Tangente an dem Puncte O parallel, so sind die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche eine von den beiden Richtungen der Tangente an den genannten Coordinatenaxen giebt

$$1,\ 0,\ 0 \quad \text{und} \quad 1,\ \cos W,\ \cos W'$$

und da diese Projectionszahlen nach Aussage des durch die Gleichung (130. e.) ausgesprochenen Satzes auch den Zahlen

$$1,\ \partial\xi',\ \partial\xi'' \quad \text{und} \quad 1,\ \partial\eta',\ \partial\eta''$$

proportional sind, wenn ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' die Coordinaten des Punctes O vorstellen, so

folgt, dass diese besondere Stellung der zu O gehörigen Tangente gegen das Coordinatensystem die Gleichungen

$$\partial\xi' = 0\,,\quad \partial\xi'' = 0 \quad \text{und} \quad \partial\eta' = \cos W\,,\quad \partial\eta'' = \cos W' \qquad \textbf{(140. a.)}$$

nach sich zieht; steht daher noch überdiess die Axe AX senkrecht auf den beiden andern AX' und AX'', so dass W und W' rechte Winkel werden, so ist

$$\partial\xi' = 0\,,\quad \partial\xi'' = 0 \quad \text{und} \quad \partial\eta' = 0\,,\quad \partial\eta'' = 0\,. \qquad \textbf{(140. b.)}$$

Läuft hingegen eine der Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ z. B. die $A\mathfrak{X}$ mit der zu O gehörigen Tangente parallel, so sind die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche eine von den beiden Richtungen der Tangente an den Axen AX, AX', AX'' giebt:

$$\mathfrak{A}\,,\quad \mathfrak{A}'\,,\quad \mathfrak{A}'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}\,,\quad 0\,,\quad 0\,,$$

und da diese Projectionszahlen, wie so eben angezeigt worden ist, auch den Zahlen

$$1\,,\quad \partial\xi'\,,\quad \partial\xi'' \quad \text{und} \quad 1\,,\quad \partial\eta'\,,\quad \partial\eta''$$

proportional sind, so folgt, dass diese besondere Stellung der Tangente gegen das Coordinatensystem die Gleichungen

$$\partial\xi' = \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}\,,\quad \partial\xi'' = \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} \quad \text{und} \quad \partial\eta' = 0\,,\quad \partial\eta'' = 0 \qquad \textbf{(140. c.)}$$

nach sich zieht; weil aber den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (45. a.) zur Folge $\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} = \frac{\sin W' \cos \mathfrak{W}}{\sin W''}$, $\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} = \frac{\sin W \cos \mathfrak{W}'}{\sin W''}$, so sieht man, dass wenn noch ausserdem die Polaraxe $A\mathfrak{X}$ senkrecht auf den beiden andern $A\mathfrak{X}'$ und $A\mathfrak{X}''$ steht, in welchem Falle $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ rechte Winkel sind, man haben werde:

$$\partial\xi' = 0\,,\quad \partial\xi'' = 0 \quad \text{und} \quad \partial\eta' = 0\,,\quad \partial\eta'' = 0\,. \qquad \textbf{(140. d.)}$$

Die Gleichungen (140. d.) sind dieselben wie die (140. b.), was daher kommt, dass wenn $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ rechte Winkel sind, auch W und W' es werden, und daher jener Fall doch immer wieder dem besondern System angehört, wo die Axe AX senkrecht auf den beiden andern AX' und AX'' steht.

165) Man nennt die durch einen beliebig hervorgehobenen Punct O der unebenen Curve gehende Ebene, welche senkrecht auf der demselben Puncte angehörigen Tangente steht, die Normalebene der unebenen Curve an der Stelle O. Da dieser Definition der Normalebene zufolge die schiefen oder senkrechten Projectionszahlen einer auf der Normalebene senkrechten Richtung an den Axen AX, AX', AX'' dieselben sind, wie die einer Richtung, welche mit der Tangente an der gleichen Stelle zusammen fällt, und sich daher zu einander verhalten wie die Zahlen

$$1\,,\quad \partial\xi'\,,\quad \partial\xi'' \quad \text{oder} \quad 1\,,\quad \partial\eta'\,,\quad \partial\eta''\,,$$

andererseits aber im zweiten Abschnitt (§. 10. Nr. 86.) erwiesen worden ist, dass sich in der Gleichung einer Ebene zwischen den schiefen Coordinaten x, x', x'' ihrer Puncte die zu diesen Coordinaten gehörigen Coeffizienten zu einander verhalten, wie die senkrechten Projectionszahlen einer auf der Ebene senkrechten Richtung, und wie die schiefen Projectionszahlen dieser Richtung, wenn die Gleichung der Ebene zwischen den senkrechten Coordinaten u, u' u''

ihrer Puncte vorliegt, so folgt sogleich, dass die Gleichung der Normalebene an dem Puncte O jede von den zwei folgenden ist:

(141. a.) $x-\xi+\partial\eta'(x'-\xi')+\partial\eta''(x''-\xi'')=0$ oder $u-\eta+\partial\xi'(u'-\eta')+\partial\xi''(u''-\eta'')=0$,

in welchen x, x′, x″ die schiefen, oder u, u′, u″ die senkrechten Coordinaten von jedem beliebigen Puncte der Normalebene vorstellen. Diesen Gleichungen kann man dadurch, dass man in sie an die Stelle von $\partial\eta'$, $\partial\eta''$ oder $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ ihre in den Gleichungen (7. b.) ausgesprochenen Werthe setzt, die nachfolgende Gestalt geben

(141. b.)

$$\left\{\begin{aligned}&(\overset{001}{\partial}\psi_\eta\overset{010}{\partial}\Psi_\eta-\overset{001}{\partial}\Psi_\eta\overset{010}{\partial}\psi_\eta)(x-\xi)+(\overset{100}{\partial}\psi_\eta\overset{001}{\partial}\Psi_\eta-\overset{100}{\partial}\Psi_\eta\overset{001}{\partial}\psi_\eta)(x'-\xi')\\&\qquad+(\overset{010}{\partial}\psi_\eta\overset{100}{\partial}\Psi_\eta-\overset{010}{\partial}\Psi_\eta\overset{100}{\partial}\psi_\eta)(x''-\xi'')=0\\&\text{oder}\\&(\overset{001}{\partial}\varphi_\xi\overset{010}{\partial}\Phi_\xi-\overset{001}{\partial}\Phi_\xi\overset{010}{\partial}\varphi_\xi)(u-\eta)+(\overset{100}{\partial}\varphi_\xi\overset{001}{\partial}\Phi_\xi-\overset{100}{\partial}\Phi_\xi\overset{001}{\partial}\varphi_\xi)(u'-\eta')\\&\qquad+(\overset{010}{\partial}\varphi_\xi\overset{100}{\partial}\Phi_\xi-\overset{010}{\partial}\Phi_\xi\overset{100}{\partial}\varphi_\xi)(u''-\eta'')=0,\end{aligned}\right.$$

und zeigen so, wie man die Gleichung der Normalebene unmittelbar aus jedem der in (124. a.) oder (124. b.) gegebenen Gleichungspaare erhalten kann.

166) Bis hierher liefen die Betrachtungen an unebenen und an ebenen Curven vollkommen parallel neben einander fort; von jetzt an aber, wo wir jene Eigenthümlichkeiten der unebenen Curve, welche die Art ihres Krummseins angehen, zur Sprache bringen werden, wird dieser Parallelismus grossentheils verschwinden, und eine Behandlung eintreten, die sowohl von jener bei ebenen Curven als von der bei krummen Flächen angewandten verschieden ist. Die unebene Curve liegt in dieser Beziehung in der Mitte zwischen der ebenen Curve und der krummen Fläche. Wo bei der ebenen Curve die Richtungsänderungen an den verschiedensten Stellen stets in einer und derselben Ebene geschehen und bei der krummen Fläche an einer und derselben Stelle schon in den verschiedensten Ebenen vorfallen, da geschehen sie bei der unebenen Curve an verschiedenen Stellen in verschiedenen Ebenen, an einer Stelle aber in einer und derselben Ebene. Das natürlichste Maass für die Krümmung einer unebenen Curve bietet der Kreiscylinder dar, dessen Oberfläche in den auf seiner Axe senkrechten Ebenen wieder nur die Kreiskrümmung aufweisst, diese aber zu beiden Seiten der Axe parallel ausgebreitet, wodurch sie eben fähig wird, die aus einer Ebene heraustretenden Richtungsänderungen der unebenen Curve von verschiedenen Seiten her an sich heranzuziehen und mit sich zu vergleichen. Die natürliche Berechtigung des Kreiscylinders, zum Maass der Krümmung einer unebenen Curve sich aufzuwerfen, geht vielleicht noch klarer aus folgender Betrachtung hervor. Wir haben in Nummer 158. dieses Abschnitts angezeigt, wie sich jede unebene Curve immer als der Durchschnitt zweier Cylinderflächen betrachten lässt, deren Seiten mit zweien Axen des Coordinatensystems parallel laufen, oder überhaupt mit zweien Geraden, die einen Winkel von endlicher Grösse einschliessen, da diese immer als zwei von den drei Axen eines beliebigen Coordinatensystems angesehen werden können. Nun lässt sich die Krümmung einer beliebigen Cylinderfläche an jeder ihrer Stellen mit der einer Kreiscylinderfläche, wenn die Seiten beider mit einander parallel laufen, gerade so vergleichen wie die Krümmung einer beliebigen ebenen Curve mit der einer Kreislinie, weil jene Vergleichung auch nur auf die Ver-

gleichung zweier auf den Seiten der Cylinderflächen senkrechten Schnitte beruht, von welchen der eine eine Kreislinie ist. Die Krümmung der Cylinderfläche, in welcher die unebene Curve liegt, in einer auf ihren Seiten senkrechten Ebene betrachtet, giebt aber zugleich auch die Krümmung der unebenen Curve auf diese Ebene bezogen zu erkennen, oder die Stärke der Biegung, welche die unebene Curve mit der Cylinderfläche zugleich eingeht, und man sieht leicht ein, dass die eigentliche Krümmung der unebenen Curve aus den beiden Biegungen hervorgeht, die den beiden Cylinderflächen eigenthümlich sind, deren Durchschnitt sie ist. Weil aber die Seitenrichtungen der beiden Cylinderflächen, deren Durchschnitt eine gegebene unebene Curve werden soll, ganz nach Belieben gewählt werden können, so ist es nicht zweifelhaft, dass man die Richtung der Seiten oder der Axe des Kreiscylinders mit dessen Biegung die Biegung der unebenen Curven verglichen werden soll, ganz nach Willkühr vorschreiben könne, und so wie die unebene Curve durch zwei sich schneidende beliebige Cylinderflächen gegeben ist, so lässt sich deren Krümmung aus den beiden Biegungen dieser Cylinderflächen an jeder Stelle erkennen. Wir nennen nun denjenigen Kreiscylinder mit vorgeschriebener Axenrichtung, an dessen Oberfläche sich die in grösster Nähe bei einer bestimmten Stelle liegenden Puncte der unebenen Curve besser anschmiegen, als an die Oberfläche irgend eines andern Kreiscylinders von derselben Axenrichtung, den dieser Axenrichtung entsprechenden Biegungscylinder der unebenen Curve an der aus ihr hervorgehobenen Stelle. Die vorgeschriebene Axenrichtung des Biegungscylinders werden wir auch die Biegungsrichtung nennen, und unter dem einer gegebenen Biegungsrichtung entsprechenden Biegungshalbmesser der unebenen Curve an der aus ihr hervorgehobenen Stelle werden wir den Radius des Kreisschnittes verstehen, der dem dieser Biegungsrichtung und Stelle entsprechenden Biegungscylinder angehört.

167) Um den einer vorgeschriebenen Biegungsrichtung entsprechenden Biegungsradius der unebenen Curve an einer aus ihr hervorgehobenen Stelle O zu finden, stellen wir uns die unebene Curve durch die in (124. a.) und (124. b.) angezeigten combinirten Gleichungspaare gegeben vor, in deren einem die schiefen Coordinaten x, x', x'', so wie in deren anderm die senkrechten Coordinaten u, u', u'' vorkommen, welche irgend ein Punct O′ der Curve an den Axen AX, AX′, AX″ eines beliebigen Coordinatensystems giebt; ferner denken wir uns durch den hervorgehobenen Punct O, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch ξ, ξ', ξ'' und η, η' η'' bezeichnet werden, drei neue Axen OX, OX′, OX″ gelegt, welche den vorigen parallel und gleichläufig sind, und bezeichnen durch x_0, x_0', x_0'' die schiefen, durch u_0, u_0', u_0'' die senkrechten Coordinaten, welche der beliebige und beweglich gedachte Punct O′ an diesen neuen Axen giebt. Dann finden zwischen den beiderlei Coordinaten eines jeden Punctes O′ wieder die Gleichungen (125.) statt, und die Gleichungen (126. a.) und (126. b.) stellen die combinirten Gleichungspaare der unebenen Curve an den neuen Axen vor in so fern die Form dieser Gleichungen an der bestimmt hervorgehobenen Stelle zulässig ist. Denkt man sich nun durch die hervorgehobene Stelle O einen Kreiscylinder von gegebener Axenrichtung, aber noch unbestimmten Kreisschnitte gelegt, und verlangt man von diesem Kreiscylinder, dass er der Biegungscylinder der unebenen Curve an der Stelle O werde, so sind die noch unbestimmten Elemente jenes Kreisschnittes der Definition des Biegungscylinders gemäss so zu bestimmen, dass alle zunächst an O gelegenen Puncte der unebenen Curve möglichst nahe an der Oberfläche des zu bestimmenden Kreiscylinders anliegen.

Stellt ϱ die noch unbekannte Länge vom Radius des Kreisschnittes vor, der senkrecht auf der Axe des durch O gelegten Kreiscylinders steht, und bezeichnen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die auf die Axen OX, OX′, OX″ bezogenen schiefen und senkrechten Coordinaten vom Mittelpunct dieses Kreisschnittes vor; stellen ferner q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen vor, welche die gegebene Axenrichtung des durch O hindurch gelegten Kreiscylinders sowohl an den neuen wie an den alten Axen giebt: so hat man in Gemässheit der im ersten Abschnitte erwiesenen auf das neue Coordinatensystem übergetragenen Gleichung (17.):

(142. a.) $$\varrho^2 = \mathfrak{x}\mathfrak{u} + \mathfrak{x}'\mathfrak{u}' + \mathfrak{x}''\mathfrak{u}'',$$

und weil die von dem hervorgehobenen Puncte O nach dem Mittelpuncte des erwähnten Kreisschnittes gezogene Gerade senkrecht auf der gegebenen Axenrichtung des durch O gelegten Kreiscylinders steht, so hat man noch in Gemässheit der dort aufgestellten Gleichungen (13.):

(142. b.) $$\mathfrak{q}\mathfrak{x} + \mathfrak{q}'\mathfrak{x}' + \mathfrak{q}''\mathfrak{x}'' = 0 \quad \text{und} \quad q\mathfrak{u} + q'\mathfrak{u}' + q''\mathfrak{u}'' = 0.$$

Denken wir uns jetzt irgend einen Punct O′ der unebenen Curve, dessen auf die neuen Axen bezogene Coordinaten x_0, x_0', x_0'' und u_0, u_0', u_0'' sind, so liegt nach den weiter vorn im Paragraph 14. dieses Abschnitts (Nr. 142.) gefundenen Eigenschaften der Kreiscylinderfläche der kleinste Abstand des Punctes O′ von der durch O hindurch gelegten Kreiscylinderfläche in der Richtung, die man sich von O′ senkrecht gegen die Axe dieser Cylinderfläche gezogen vorstellt; bezeichnet man daher durch $\mathfrak{R}$ die senkrechte Entfernung des Punctes O′ von der genannten Axe, so ist auf dieselbe Weise wie so eben den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (20.) und (18.) gemäss:

(142. c.) $$\mathfrak{R}^2 = (x_0 - \mathfrak{x}_1)(u_0 - \mathfrak{u}_1) + (x_0' - \mathfrak{x}_1')(u_0' - \mathfrak{u}_1') + (x_0'' - \mathfrak{x}_1'')(u_0'' - \mathfrak{u}_1''),$$

so wie

(142. d.) $$\mathfrak{q}(x_0 - \mathfrak{x}_1) + \mathfrak{q}'(x_0' - \mathfrak{x}_1') + \mathfrak{q}''(x_0'' - \mathfrak{x}_1'') = 0 \quad \text{und} \quad q(u_0 - \mathfrak{u}_1) + q'(u_0' - \mathfrak{u}_1') + q''(u_0'' - \mathfrak{u}_1'') = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_1''$, und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_1''$ die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen OX, OX′, OX″ von demjenigen Puncte anzeigen, in welchem die von O′ aus senkrecht gegen die Axe der Kreiscylinderfläche gezogene Gerade diese Axe trifft. Da die beiden Puncte, deren Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_1''$ oder $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_1''$ sind, in der Axe des zu bestimmenden Kreiscylinders liegen, und die schiefen und senkrechten Projectionszahlen dieser Axe durch q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ vorgestellt worden sind, so hat man, wenn r den Abstand der gedachten Puncte von einander bezeichnet, nach Anleitung der im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (3.):

(142. e.) $$\pm q = \frac{\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}}{r}, \ \pm q' = \frac{\mathfrak{x}_1' - \mathfrak{x}'}{r}, \ \pm q'' = \frac{\mathfrak{x}_1'' - \mathfrak{x}''}{r} \quad \text{und} \quad \pm \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}}{r}, \ \pm \mathfrak{q}' = \frac{\mathfrak{u}_1' - \mathfrak{u}'}{r}, \ \pm \mathfrak{q}'' = \frac{\mathfrak{u}_1'' - \mathfrak{u}''}{r},$$

und es sind in allen diesen Gleichungen entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen zu nehmen. Dabei zeigt r offenbar den Abstand der beiden durch die Puncte O und O′ gehenden und senkrecht auf der Axe des Kreiscylinders stehenden Ebenen von einander an, d. h. den Abstand der beiden Kreisschnitte dieses Cylinders, welche durch die Puncte O und O′ gehen. Setzt man die aus den Gleichungen (142. e.) für $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_1'$, $\mathfrak{x}_1''$ und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_1'$, $\mathfrak{u}_1''$ sich ergebenden Werthe in die Gleichungen (142. c.) und (142. d.), so erhält man:

(143. a.) $$\mathfrak{R}^2 = [x_0 - (\mathfrak{x} \pm q r)][u_0 - (\mathfrak{u} \pm \mathfrak{q} r)] + [x_0' - (\mathfrak{x}' \pm q' r)][u_0' - (\mathfrak{u}' \pm \mathfrak{q}' r)] + [x_0'' - (\mathfrak{x}'' \pm q'' r)][u_0'' - (\mathfrak{u}'' \pm \mathfrak{q}'' r)],$$

so wie

$$q[x_0-(\mathfrak{x}\pm q\mathfrak{r})]+q'[x'_0-(\mathfrak{x}'\pm q'\mathfrak{r})]+q''[x''_0-(\mathfrak{x}''\pm q''\mathfrak{r})]=0$$

und

$$q[u_0-(\mathfrak{u}\pm q\mathfrak{r})]+q'[u'_0-(\mathfrak{u}'\pm q'\mathfrak{r})]+q''[u''_0-(\mathfrak{u}''\pm q''\mathfrak{r})]=0\,.$$

Beachtet man, dass die Richtungsgleichung $qq+q'q'+q''q''=1$ giebt, so wird man bewogen die beiden letzten Gleichungen so zu schreiben:

$$\mp\mathfrak{r}=q(\mathfrak{x}-x_0)+q'(\mathfrak{x}'-x'_0)+q''(\mathfrak{x}''-x''_0) \text{ und } \mp\mathfrak{r}=q(\mathfrak{u}-u_0)+q'(\mathfrak{u}'-u'_0)+q''(\mathfrak{u}''-u''_0)\,, \quad \textbf{(143. b.)}$$

und zieht man diese von denen (142. b.) der Ordnung nach ab, so erhält man noch:

$$\pm r=q x_0+q'x'_0+q''x''_0 \quad \text{und} \quad \pm r=q u_0+q'u'_0+q''u''_0\,, \quad \textbf{(143. c.)}$$

und es sind in allen diesen Gleichungen entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen zu nehmen. Giebt man jetzt der Gleichung (143. a.) die Form:

$$\mathfrak{R}^2=(x_0-\mathfrak{x})(u_0-\mathfrak{u})+(x'_0-\mathfrak{x}')(u'_0-\mathfrak{u}')+(x''_0-\mathfrak{x}'')(u''_0-\mathfrak{u}'')+(qq+q'q'+q''q'')\mathfrak{r}^2$$
$$\mp\mathfrak{r}[q(x_0-\mathfrak{x})+q'(x'_0-\mathfrak{x}')+q''(x''_0-\mathfrak{x}'')+q(u_0-\mathfrak{u})+q'(u'_0-\mathfrak{u}')+q''(u''_0-\mathfrak{u}'')]\,,$$

so wird man gewahr, dass sie in Folge der eben erwähnten Richtungsgleichung und der Gleichungen (143. b.) wird:

$$\mathfrak{R}^2=(x_0-\mathfrak{x})(u_0-\mathfrak{u})+(x'_0-\mathfrak{x}')(u'_0-\mathfrak{u}')+(x''_0-\mathfrak{x}'')(u''_0-\mathfrak{u}'')-\mathfrak{r}^2\,, \quad \textbf{(143. d.)}$$

zu welcher Gleichung man auch unmittelbar durch eine einfache geometrische Betrachtung gelangen kann. Aus dieser letzten Gleichung findet man

$$\mathfrak{R}-\varrho=[(x_0-\mathfrak{x})(u_0-\mathfrak{u})+(x'_0-\mathfrak{x}')(u'_0-\mathfrak{u}')+(x''_0-\mathfrak{x}'')(u''_0-\mathfrak{u}'')-\mathfrak{r}^2]^{\frac{1}{2}}-\varrho\,,$$

und es ist $\mathfrak{R}-\varrho$ der kleinste Abstand des Punctes O' von der durch O gelegten Kreiscylinderfläche, weil $\mathfrak{R}$ den senkrechten Abstand des Punctes O' von der Axe des Kreiscylinders vorstellt; soll daher dieser Cylinder der Biegungscylinder der unebenen Curve an der Stelle O werden, so muss der gefundene kleinste Abstand $\mathfrak{R}-\varrho$ so vollständig wie möglich null werden für alle zunächst an O liegende Puncte O' der unebenen Curve. Diess geschieht aber offenbar, wenn die Gleichung

$$(x_0-\mathfrak{x})(u_0-\mathfrak{u})+(x'_0-\mathfrak{x}')(u'_0-\mathfrak{u}')+(x''_0-\mathfrak{x}'')(u''_0-\mathfrak{u}'')-\mathfrak{r}^2=\varrho^2 \quad \textbf{(143. e.)}$$

durch alle solche Puncte O' so genau wie möglich wahr gemacht wird, und deshalb sind die Bedingungen des Biegungscylinders aus der Gleichung (143. e.) in der Weise zu schöpfen, dass alle in grösster Nähe bei dem O liegende Puncte der unebenen Curve sie möglichst gut befriedigen müssen.

Durch Wegschaffung der Klammern und unter Zuziehung der in (142. a.) ausgesprochenen Relation nimmt die Gleichung (143. e.) die folgende Form an:

$$\mathfrak{x}u_0+\mathfrak{x}'u'_0+\mathfrak{x}''u''_0+\mathfrak{u}x_0+\mathfrak{u}'x'_0+\mathfrak{u}''x''_0+\mathfrak{r}^2-(x_0u_0+x'_0u'_0+x''_0u''_0)=0\,,$$

und da

$$\mathfrak{x}u_0+\mathfrak{x}'u'_0+\mathfrak{x}''u''_0=\mathfrak{u}x_0+\mathfrak{u}'x'_0+\mathfrak{u}''x''_0$$

in Gemässheit der im ersten Abschnitte aufgestellten und auf die neuen Axen bezogenen Gleichung (16.), so wie zufolge derer (143. c.)

$$r^2=(qx_0+q'x'_0+q''x''_0)^2 \quad \text{und} \quad r^2=(qu_0+q'u'_0+q''u''_0)^2$$

ist, so lässt sich die zuletzt erhaltene Gleichung auf jede der zwei nachfolgenden Weisen schreiben:

(144. a.)
$$\begin{cases} 2(\mathfrak{u}\,x_0+\mathfrak{u}'x_0'+\mathfrak{u}''x_0'')+(\mathfrak{q}\,x_0+\mathfrak{q}'x_0'+\mathfrak{q}''x_0'')^2-(x_0u_0+x_0'u_0'+x_0''u_0'')=0 \\ \text{und} \\ 2(\mathfrak{x}\,u_0+\mathfrak{x}'u_0'+\mathfrak{x}''u_0'')+(\mathfrak{q}\,u_0+\mathfrak{q}'u_0'+\mathfrak{q}''u_0'')^2-(x_0u_0+x_0'u_0'+x_0''u_0'')=0; \end{cases}$$

setzt man aber in die einzelnen Theile dieser Gleichungen für x_0' und x_0'', so wie für u_0' und u_0'' ihre durch die Gleichungen (126. a.) und (126. b.) gegebenen Ausdrücke in x_0 und u_0, so findet man, dass

(144. b.)
$$\begin{cases} 2(\mathfrak{u}\,x_0+\mathfrak{u}'x_0'+\mathfrak{u}''x_0'')=2x_0(\mathfrak{u}+\mathfrak{u}'\partial\xi'+\mathfrak{u}''\partial\xi'')+x_0^2(\mathfrak{u}'\partial^2\xi'+\mathfrak{u}''\partial^2\xi'')+\ldots, \\ 2(\mathfrak{x}\,u_0+\mathfrak{x}'u_0'+\mathfrak{x}''u_0'')=2u_0(\mathfrak{x}+\mathfrak{x}'\partial\eta'+\mathfrak{x}''\partial\eta'')+u_0^2(\mathfrak{x}'\partial^2\eta'+\mathfrak{x}''\partial^2\eta'')+\ldots, \\ \mathfrak{q}\,x_0+\mathfrak{q}'x_0'+\mathfrak{q}''x_0''=x_0(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\xi'+\mathfrak{q}''\partial\xi'')+\frac{1}{2}x_0^2(\mathfrak{q}'\partial^2\xi'+\mathfrak{q}''\partial^2\xi'')+\ldots, \\ \mathfrak{q}\,u_0+\mathfrak{q}'u_0'+\mathfrak{q}''u_0''=u_0(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\eta'+\mathfrak{q}''\partial\eta'')+\frac{1}{2}u_0^2(\mathfrak{q}'\partial^2\eta'+\mathfrak{q}''\partial^2\eta'')+\ldots, \\ x_0u_0+x_0'u_0'+x_0''u_0''=x_0u_0[(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')+\frac{1}{2}x_0(\partial\eta'\partial^2\xi'+\partial\eta''\partial^2\xi'') \\ \qquad +\frac{1}{2}u_0(\partial\xi'\partial^2\eta'+\partial\xi''\partial^2\eta'')+\ldots] \end{cases}$$

ist. Ferner geben die vordern Gleichungen (128. a.), wenn man sie auf das neue Coordinatensystem in Anwendung bringt:

$$u_0=x_0+x_0'\cos W+x_0''\cos W' \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}\,x_0=\mathfrak{A}\,u_0+\mathfrak{A}'u_0'+\mathfrak{A}''u_0'',$$

und diese werden in Folge derselben Ausdrücke von x_0' und x_0'', so wie von u_0' und u_0'':

$$u_0=x_0(1+\partial\xi'\cos W+\partial\xi''\cos W')+\frac{1}{2}x_0^2(\partial^2\xi'\cos W+\partial^2\xi''\cos W')+\ldots$$

und

$$\mathfrak{E}\,x_0=u_0(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial\eta'+\mathfrak{A}''\partial\eta'')+\frac{1}{2}u_0^2(\mathfrak{A}'\partial^2\eta'+\mathfrak{A}''\partial^2\eta'')\ldots,$$

welche sich einfacher so schreiben lassen:

(144. c.)
$$u_0=x_0\,\delta\eta+\frac{1}{2}x_0^2\delta^2\eta+\ldots \quad \text{und} \quad x_0=u_0\,\delta\xi+\frac{1}{2}u_0^2\delta^2\xi+\ldots,$$

weil die auf das neue Coordinatensystem angewandten vordern Gleichungen (128. b.) geben:

$$\mathfrak{E}\,\delta x=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial u'+\mathfrak{A}''\partial u'' \quad \text{und} \quad \delta u=1+\partial x'\cos W+\partial x''\cos W'$$

und man aus diesen durch Ableiten nach u und x erhält:

$$\mathfrak{E}\,\delta^2x=\mathfrak{A}'\partial^2u'+\mathfrak{A}''\partial^2u'' \quad \text{und} \quad \delta^2u=\partial^2x'\cos W+\partial^2x''\cos W',$$

diese Gleichungen aber, auf den Punct O, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, angewandt, zeigen, dass

$$\mathfrak{E}\,\delta\xi=\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'\partial\eta'+\mathfrak{A}''\partial\eta'' \quad \text{und} \quad \delta\eta=1+\partial\xi'\cos W+\partial\xi''\cos W',$$
$$\mathfrak{E}\,\delta^2\xi=\mathfrak{A}'\partial^2\eta'+\mathfrak{A}''\partial^2\eta'' \quad \text{und} \quad \delta^2\eta=\partial^2\xi'\cos W+\partial^2\xi''\cos W'$$

ist. — Mittelst der Gleichungen (144. c.) kann man $x_0 u_0$ in den folgenden zwei Formen darstellen:

$$x_0 u_0 = x_0^2 \delta\eta + \frac{1}{2} x_0^3 \delta^2 \eta + \dots \quad \text{und} \quad x_0 u_0 = u_0^2 \delta\xi + \frac{1}{2} u_0^3 \delta^2 \xi + \dots$$

und dadurch nimmt die letzte Gleichung (144. b.) jede der zwei folgenden Gestalten an:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 u_0 + x_0' u_0' + x_0'' u_0'' = x_0^2 \delta\eta (1 + \partial\xi' \partial\eta' + \partial\xi'' \partial\eta'' + \dots) \\ \text{und} \\ x_0 u_0 + x_0' u_0' + x_0'' u_0'' = u_0^2 \delta\xi (1 + \partial\xi' \partial\eta' + \partial\xi'' \partial\eta'' + \dots). \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad \mathbf{(144.\ d.)}$$

In allen diesen Entwickelungen sind blos solche Glieder nicht angeschrieben worden, die von der dritten oder einer noch höhern Dimension in Bezug auf x_0 und u_0 sind. Die Gleichungen (144. a.) gehen, wenn man statt ihrer Theile die in den vier ersten Gleichungen (144. b.) und in den Gleichungen (144. d.) dafür gegebenen Entwickelungen in sie einsetzt, über in:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_0(u + u'\partial\xi' + u''\partial\xi'') + x_0^2[(q + q'\partial\xi' + q''\partial\xi'')^2 + u'\partial^2\xi' + u''\partial^2\xi'' - \delta\eta(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')] + \dots = 0 \\ \text{und} \\ 2u_0(r + r'\partial\eta' + r''\partial\eta'') + u_0^2[(q + q'\partial\eta' + q''\partial\eta'')^2 + r'\partial^2\eta' + r''\partial^2\eta'' - \delta\xi(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'')] + \dots = 0, \end{array}\right\} \mathbf{(144.\ e.)}$$

in welchen wieder nur solche Glieder nicht angeschrieben worden sind, die x_0 oder u_0 in der dritten oder einer noch höhern Potenz enthalten. Jede dieser beiden Gleichungen ist eine blose Umformung der Gleichung (143. e.), und schliesst daher die Bedingungen des Biegungscylinders der unebenen Curve an der Stelle O in sich, so zwar, dass nur derjenige Kreiscylinder es sein kann, welcher die Eigenschaft besitzt, dass alle in grösster Nähe bei O gelegenen Puncte der unebenen Curve jene Gleichungen möglichst genau befriedigen.

Um nun aus diesen Gleichungen die Bedingungen für den Biegungscylinder zu erhalten, hat man zu bedenken, dass für so nahe an O gelegene Puncte O′ die ihnen zugehörigen x_0 oder u_0 kleiner werden, als dass sie sich durch ein endliches Maass darstellen liessen, und dass dann jedes Glied der Reihen (144. e.), welches eine höhere Potenz von x_0 oder u_0 in sich trägt, neben einem solchen, das zu einer niedrigern Potenz gehört, ganz und gar verschwindet, vorausgesetzt, dass die Stelle O Entwickelungen von der Form wie die (126. a.) oder (126. b.) sind, gestattet. So dicht an O gelegene Puncte O′ erfüllen mithin die Gleichungen (144. e.) in dem Maasse vollständiger als mehr Glieder der niedrigsten Dimensionen in Bezug auf x_0 oder u_0 wahrhaft null werden. Man erhält daher zur Bestimmung des Biegungscylinders an der Stelle O erstlich die Bedingung:

$$u + u'\partial\xi' + u''\partial\xi'' = 0 \quad \text{oder} \quad r + r'\partial\eta' + r''\partial\eta'' = 0, \qquad \mathbf{(145.\ a.)}$$

hierauf die

$$\left.\begin{array}{l} (q + q'\partial\xi' + q''\partial\xi'')^2 + u'\partial^2\xi' + u''\partial^2\xi'' - \delta\eta(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'') = 0 \\ \text{oder} \\ (q + q'\partial\eta' + q''\partial\eta'')^2 + r'\partial^2\eta' + r''\partial^2\eta'' - \delta\xi(1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta'') = 0, \end{array}\right\} \dots\dots \quad \mathbf{(145.\ b.)}$$

und so müsste man die Coeffizienten von mehr der nächst folgenden Glieder der Null gleich setzen, wenn es sich nicht zeigte, dass der Biegungscylinder durch die in (145. a.) und (145. b.) enthaltenen Bedingungen schon vollständig bestimmt wird. Stellen A, A′, A″ und C, C′, C″ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen vor, welche die von O aus senkrecht gegen die Axe des Biegungscylinders laufende Richtung an den Axen AX, AX′, AX″

oder an den Axen OX, OX', OX'' die den vorigen parallel und gleichläufig sind, giebt, so hat man, weil $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die schiefen und senkrechten Coordinaten an den neuen Axen von dem Puncte sind, in welchem die ebengenannte Richtung die Axe des Biegungscylinders schneidet, und ϱ die Entfernung dieses Durchschnittspunctes von dem O ist:

(146. a.) $$A=\frac{\mathfrak{x}}{\varrho}\,,\quad A'=\frac{\mathfrak{x}'}{\varrho}\,,\quad A''=\frac{\mathfrak{x}''}{\varrho}\quad\text{und}\quad C=\frac{\mathfrak{u}}{\varrho}\,,\quad C'=\frac{\mathfrak{u}'}{\varrho}\,,\quad C''=\frac{\mathfrak{u}''}{\varrho}$$

und setzt man die hieraus hervorgehenden Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ in die Gleichungen (145. a.) und zugleich für $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ und $\partial\eta'$, $\partial\eta''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (127. a. und b.) ein, so verwandelt sich die Bedingung (145. a.) in:

(146. b.) $$pC+p'C'+p''C''=0\quad\text{oder}\quad \mathfrak{p}A+\mathfrak{p}'A'+\mathfrak{p}''A''=0$$

Jede der Bedingungen (145. a.) sagt also nichts anders aus als, dass die von O aus senkrecht auf die Axe des zu dieser Stelle gehörigen Biegungscylinders gezogene Gerade mit der Tangente der unebenen Curve an O einen rechten Winkel bildet, sonach in der zu dieser Stelle gehörigen Normalebene liegt. Man sieht hieraus, dass der in O endigende Biegungshalbmesser nicht nur senkrecht auf der Axe des zu dieser Stelle gehörigen Biegungscylinders, sondern zugleich auch senkrecht auf der zu O gehörigen Tangente der unebenen Curve steht, dass sich also die Gerade angeben lässt, worin der gedachte Biegungshalbmesser liegt, sobald die Axe des zu suchenden Biegungscylinders gegeben und nicht der Tangente an O parallel ist. Zu der Bedeutung der in (145. b.) enthaltenen Bedingungen gelangt man auf die nachstehende Weise. Setzt man in die ersten Theile der dortigen Ausdrücke für $\partial\xi'$, $\partial\xi''$ oder $\partial\eta'$, $\partial\eta''$ ihre aus den Gleichungen (127. a. und b.) sich ergebenden Werthe, so findet man, dass

$$(q+q'\partial\xi'+q''\partial\xi'')^2=\frac{1}{p^2}(pq+p'q'+p''q'')^2$$

und

$$(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\eta'+\mathfrak{q}''\partial\eta'')^2=\frac{1}{\mathfrak{p}^2}(\mathfrak{q}\mathfrak{p}+\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}''\mathfrak{p}'')^2$$

ist, während die im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichungen (9. a. und b.) aussagen, dass

$$pq+p'q'+p''q''=\mathfrak{q}\mathfrak{p}+\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}''\mathfrak{p}''=\cos\theta$$

ist, wenn θ den Winkel vorstellt, den die gegebene Axenrichtung des Biegungscylinders mit der Tangente an O macht, weil die schiefen und senkrechten Projectionszahlen p, p', p'' und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}''$ der Tangente an O, die q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ der Axe des zu derselben Stelle gehörigen Biegungscylinders angehören. Es ist demnach:

$$(q+q'\partial\xi'+q''\partial\xi'')^2=\frac{\cos^2\theta}{p^2}\quad\text{und}\quad(\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\eta'+\mathfrak{q}''\partial\eta'')^2=\frac{\cos^2\theta}{\mathfrak{p}^2}$$

oder wenn man für p und $\mathfrak{p}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (135. d.) einsetzt:

(146. c.) $$\begin{cases}(q+q'\partial\xi'+q''\partial\xi'')^2=\delta\eta\,(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\cos^2\theta\\ \text{und}\\ (\mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\eta'+\mathfrak{q}''\partial\eta'')^2=\delta\xi\,(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\cos^2\theta;\end{cases}$$

in Folge dieser Ausdrücke aber verwandelt sich die Bedingung (145. b.) in:

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{u}'\partial^2\xi'+\mathfrak{u}''\partial^2\xi''=\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta\\ \text{oder}\\ \mathfrak{r}'\partial^2\eta'+\mathfrak{r}''\partial^2\eta''=\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (146.\ d.)$$

und geht, wenn man für $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ oder $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ ihre aus den Gleichungen (146. a.) entnommenen Werthe setzt, über in:

$$\varrho(C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi'')=\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta$$

oder

$$\varrho(A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta'')=\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta,$$

woraus man findet:

$$\varrho=\frac{\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta}{C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi''} \quad \text{oder} \quad \varrho=\frac{\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')\sin^2\theta}{A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta''} \quad (146.\ e.)$$

und da $\delta\xi\,\delta\eta=1$ ist, so erhält man noch durch Multiplication der beiden letzten Gleichungen:

$$\varrho^2=\frac{(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')^2\sin^4\theta}{(C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi'')(A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta'')}. \quad (146.\ f.)$$

Jede der Gleichungen (146. e) und (146. f.) giebt die Länge ϱ des Biegungsradius an die Hand, uud da, wie wir gesehen haben, die Bedingungen (145. a.), welche eins mit denen (146. b.) sind, die Lage des in O endigenden Biegungsradius vorschreibt, so wird durch diese beiden Angaben der zu findende Biegungscylinder für die Stelle O der unebenen Curve, wenn die Lage seiner Axe gegeben ist, vollkommen bestimmt. Die Grössen C', C'' und A', A'' haben wir zwar nicht als unmittelbar gegeben vorausgesetzt, allein sie lassen sich, wenn q, q', q'' und $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{q}''$ unmittelbar gegeben sind, aus diesen und der Lage der Tangente an O mittelst der Gleichungen (146. b.) und der andern

$$A\mathfrak{q}+A'\mathfrak{q}'+A''\mathfrak{q}''=0 \quad \text{oder} \quad C\mathfrak{q}+C'\mathfrak{q}'+C''\mathfrak{q}''=0 \quad (146.\ g.)$$

finden.

168) Da θ der Winkel ist, den die vorgeschriebene Axenrichtung des Biegungscylinders mit der Tangente an O macht, so zeigen die Gleichungen (146. e.) und (146. f.), dass man da, wo die Axenrichtung des Biegungscylinders in der Normalebene an O liegend und also mit der Tangente an O einen rechten Winkel bildend vorausgesetzt wird, $\sin\theta=1$ zu nehmen habe. Bezeichnet man die Radien der so beschränkten Biegungscylinder durch ϱ_1, so geben die Gleichungen (146. e.):

$$\varrho_1=\frac{\delta\eta(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')}{C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi''} \quad \text{oder} \quad \varrho_1=\frac{\delta\xi(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')}{A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta''} \quad (147.\ a.)$$

und die Gleichung (146. f.) wird:

$$\varrho_1^2=\frac{(1+\partial\xi'\partial\eta'+\partial\xi''\partial\eta'')^2}{(C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi'')(A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta'')}; \quad (147.\ b.)$$

zugleich aber wird in diesem Falle die Richtung des Biegungscylinders beschränkt, indem deren Projectionszahlen jetzt den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{q}p+\mathfrak{q}'p'+\mathfrak{q}''p''=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}\mathfrak{p}+\mathfrak{q}'\mathfrak{p}'+\mathfrak{q}''\mathfrak{p}''=0\\ \text{oder}\\ \mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\xi'+\mathfrak{q}''\partial\xi''=0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}+\mathfrak{q}'\partial\eta'+\mathfrak{q}''\partial\eta''=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (147.\ c.)$$

unterworfen sind. Wir werden **Biegungscylinder**, deren Axen in der Normalebene des hervorgehobenen Punctes der doppelt gekrümmten Curve liegen, **beschränkte** so wie die Radien solcher Biegungscylinder **beschränkte Biegungshalbmesser** nennen. Während also bei jedem Biegungscylinder sein in O endigender Biegungshalbmesser in der zu dieser Stelle gehörigen Normalebene liegt, liegt nur bei dem beschränkten auch dessen Axe in dieser Normalebene; die Axen von nicht beschränkten Biegungscylindern hingegen können die Normalebene unter jedem beliebigen Winkel durchschneiden, je mehr sich aber dieser Winkel einem rechten nähert, desto kleiner wird der Biegungshalbmesser, welcher zuletzt gänzlich verschwindet, wenn die Axe des Biegungscylinders senkrecht auf der Normalebene steht, oder parallel mit der Tangente an der hervorgehobenen Stelle läuft. Es ist nämlich immer

(147. d.) $$\varrho = \varrho_1 \sin^2 \theta ,$$

wenn ϱ den Halbmesser des Biegungscylinders vorstellt, dessen Axe mit der Tangente an O den Winkel θ macht, und ϱ_1 den Halbmesser desjenigen beschränkten Biegungscylinders, dessen in O sich endigender Biegungshalbmesser in dieselbe Gerade fällt, wie der in O sich endigende Halbmesser des vorigen Biegungscylinders. Diess geht unmittelbar aus dem blosen Zusammenhalten der Gleichungen (146. e.) und (147. a.) oder der (146. f.) und (147. b.) hervor.

Obgleich aber die Axen der beschränkten Biegungscylinder immer in der Normalebene der Stelle, deren Biegung sie bestimmen sollen, liegen, so giebt es doch für jede Stelle der unebenen Curve unzählich viele beschränkte Biegungscylinder; man kann daher die Frage aufwerfen, welche von ihnen zur grössten oder kleinsten Biegung hinführen, ähnlich wie bei der kummen Fläche unter allen durch eine und dieselbe Stelle der Fläche gemachten normalen Schnitten die aufgesucht worden sind, welche die grösste oder kleinste Krümmung an dieser Stelle haben. Die Gleichung (147. d.) giebt zu verstehen, dass die in O sich endigenden Radien von Biegungscylindern, deren Axen eine unveränderliche Neigung gegen die Tangente an O behalten, in denselben Lagen grösste oder kleinste Werthe annehmen, wo es die zu den beschränkten Biegungscylindern gehörigen thun, weshalb es bei der Aufsuchung der grössten und kleinsten Biegungshalbmesser gleichgültig ist, ob man dabei blos beschränkte Biegungscylinder oder Biegungscylinder, deren Axen stets die gleiche Neigung gegen die Tangente behaupten, zu Grunde legt. Es kommt nämlich bei dieser Untersuchung, wo die der Curve angehörigen Grössen $\delta\xi$, $\delta\eta$ und $1 + \partial\xi'\partial\eta' + \partial\xi''\partial\eta''$ als unveränderlich angesehen werden müssen, blos darauf an, (man mag dabei von den Ausdrücken (147. a.) oder von denen (146. e.) unter der Voraussetzung ausgehen, dass θ einen unveränderlichen Werth hat,) zu bestimmen, welche Werthe von C′, C″ oder von A′, A″ den Ausdruck

$$C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'' \quad \text{oder den} \quad A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta''$$

zu einem Kleinsten oder Grössten machen; will man aber dabei von den Ausdrücken (147. b.) oder (146. f.) ausgehen, so hat man zu bestimmen, welche Werthe von C′, C″ und A′, A″ den Ausdruck

$$(C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'')(A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'')$$

zu einem Kleinsten oder Grössten machen. In jedem dieser Fälle hat man die nach C′, C″ und A′, A″ genommenen Ableitungen des betreffenden Ausdrucks der Null gleich zu setzen, und aus den so sich ergebenden Gleichungen die Werthe C′, C″ und A′, A″ herzuholen, wie die Lehre vom Grössten und Kleinsten es verlangt.

Bei diesem Geschäfte hat man zu erwägen, dass die Grössen C, C', C'' und A, A', A'' nicht unabhängig von einander sind, da zwischen ihnen erstlich die im vorigen Paragraphen angegebenen Gleichungen (109. a. und b.) bestehen, welche indessen blos vier von einander unabhängige Gleichungen bilden, da die auf erster und zweiter Zeile stehenden (109. a.) sich in einander überführen lassen; sodann aber auch noch die in (146. b.) aufgeführten, nämlich

$$p\,C + p'\,C' + p''\,C'' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}\,A + \mathfrak{p}'\,A' + \mathfrak{p}''\,A'' = 0$$

oder, wenn man in diese für p', p'' und $\mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (130. e.) einsetzt:

$$C + C'\,\partial\xi' + C''\,\partial\xi'' = 0 \quad \text{und} \quad A + A'\,\partial\eta' + A''\,\partial\eta'' = 0, \qquad \textbf{(148. a.)}$$

welche beide Gleichungen sich wieder in einander überführen lassen und daher nur einer einzigen gleich zu achten sind, wie es dort mit den Gleichungen (109. c.) der Fall war. Es werden also hier wie dort die sechs Grössen A, A', A'' und C, C', C'' durch fünf Gleichungen von einander abhängig gemacht, wesshalb nur eine von ihnen nach Willkühr gewählt werden kann, die übrigen aber aus dieser einen durch die zwischen ihnen vorhandenen Gleichungen bestimmt werden müssen. Statt aber eine von diesen sechs Grössen zur unabhängig Veränderlichen zu machen, und die übrigen als Functionen dieser einen anzusehen, kann man auch, wie dort geschehen ist, alle sechs von einer ausser ihnen liegenden Grösse, die nicht weiter bestimmt zu werden braucht, abhängig machen. Thut man diess und deutet man unserer Gewohnheit gemäss Ableitungen von A, A', A'' und C, C', C'', nach dieser fremden Unabhängigen genommen, durch das Ableitungszeichen d an, so erhält man auf dieselbe Weise, wie man im vorigen Paragraphen zu den Gleichungen (110. a. und b.) gekommen ist, auch hier wieder

$$\left.\begin{array}{l} dC = dA + dA'\cos W + dA''\cos W', \quad dC' = dA\cos W + dA' + dA''\cos W'', \\ \qquad dC'' = dA\cos W' + dA'\cos W'' + dA'' \\ \text{oder} \\ \mathfrak{C}\,dA = \mathfrak{A}\,dC + \mathfrak{A}'\,dC' + \mathfrak{A}''\,dC'', \quad \mathfrak{C}'_1\,dA' = \mathfrak{A}_1\,dC + \mathfrak{A}'_1\,dC' + \mathfrak{A}''_1\,dC'', \\ \qquad \mathfrak{C}''_2\,dA'' = \mathfrak{A}_2\,dC + \mathfrak{A}'_2\,dC' + \mathfrak{A}''_2\,dC'' \\ \text{und} \\ A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' + C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA'' = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots \textbf{(148. b.)}$$

und es lässt sich hier wie dort erweisen, dass

$$A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' = C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA''$$

ist, so dass die zuletzt geschriebene Gleichung in die zwei andern zerfällt:

$$A\,dC + A'\,dC' + A''\,dC'' = 0 \quad \text{und} \quad C\,dA + C'\,dA' + C''\,dA'' = 0; \qquad \textbf{(148. c.)}$$

anstatt der dortigen Gleichungen (110. b.) erhält man aber hier aus den kurz vorher angezeigten Gleichungen (148. a.) die:

$$dC + \partial\xi'\,dC' + \partial\xi''\,dC'' = 0 \quad \text{und} \quad dA + \partial\eta'\,dA' + \partial\eta''\,dA'' = 0. \qquad \textbf{(148. d.)}$$

Aus den vordern Gleichungen (148. c. und d.) findet man durch successive Elimination der einzelnen in ihnen enthaltenen Ableitungen, dass

$$\left.\begin{array}{l} dC : dC' : dC'' = A'\,\partial\xi'' - A''\,\partial\xi' : A'' - A\,\partial\xi'' : A\,\partial\xi' - A' \\ \text{und aus den hintern auf die gleiche Weise, dass} \\ dA : dA' : dA'' = C'\,\partial\eta'' - C''\,\partial\eta' : C'' - C\,\partial\eta'' : C\,\partial\eta' - C' \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(148. e.)}$$

ist.

Nun geben aber die Ableitungen der Ausdrücke

$$C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'' \quad \text{und} \quad A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'',$$

nach der fremden Veränderlichen genommen und der Null gleich gesetzt:

$$d\,C'\partial^2\xi' + d\,C''\partial^2\xi'' = 0 \quad \text{und} \quad d\,A'\partial^2\eta' + d\,A''\partial^2\eta'' = 0,$$

und diese Gleichungen gehen, wenn man für d C′, d C″ und d A′, d A″ ihre in d A und d C ausgedrückten, aus den Gleichungen (148. e.) sich ergebenden Werthe in sie einsetzt über in:

(148. f.)

$$\begin{cases} A(\partial\xi'\partial^2\xi'' - \partial\xi''\partial^2\xi') - A'\partial^2\xi' + A''\partial^2\xi = 0 \\ \text{und} \\ C(\partial\eta'\partial^2\eta'' - \partial\eta''\partial^2\eta') - C'\partial^2\eta'' + C''\partial^2\eta' = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen nun geben in Verbindung mit denen (148. a.) und der Richtungsgleichung $AC + A'C' + A''C'' = 1$ die dem grössten oder kleinsten Biegungshalbmesser zugehörigen Werthe von A, A′, A″, und C, C′, C″, und dann auch diesen Biegungshalbmesser selber an die Hand, wie in der nächsten Nummer gezeigt werden soll.

Bevor wir jedoch zu diesem Geschäfte übergehen, will ich noch vor Augen legen, wie man zu den gleichen Bedinguugen (148. f.) hingeführt worden wäre, wenn man bei dieser Untersuchung, anstatt von einer der Gleichungen (146. e.) auszugehen und dabei einen der Ausdrücke $C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi''$ oder $A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta''$ zu einem Grössten oder Kleinsten zu machen, die Gleichung (146. f.) zu Grunde gelegt hätte, wo dann der Ausdruck

$$(C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'')(A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'')$$

zu einem Grössten oder Kleinsten zu machen gewesen wäre. Setzt man die Ableitung dieses Ausdrucks in dem Sinne genommen, dass C′, C″ und A′, A″ als veränderliche Grössen angesehen werden, der Null gleich, so findet man:

(149. a.) $$(C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'')(d\,A'\partial^2\eta' + d\,A''\partial^2\eta'') + (A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'')(d\,C'\partial^2\xi' + d\,C''\partial^2\xi'') = 0;$$

es sollte aber schwer halten, aus dieser Gleichung jene Bedingungen herzuleiten, ohne die folgende Eigenschaft der Ausdrücke $C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi''$ und $A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta''$ zu kennen.

Es ist oben zu Ende der Nr. 160. gezeigt worden, dass man immer die Ableitungen d^2x, d^2x', d^2x'' und d^2u, d^2u', d^2u'' als die schiefen und senkrechten Coordinaten eines Punctes im Raume ansehen könne, wenn sich das Ableitungszeichen d auf eine gänzlich unbestimmt gelassene Unabhängige bezieht. Lässt man x diese Unabhängige sein, so verwandeln sich diese Grössen in

$$0,\ \partial^2x',\ \partial^2x'' \quad \text{und} \quad \delta^2u,\ \delta^2u',\ \delta^2u''$$

und nimmt man u zur Unabhängigen, so verwandeln sie sich in

$$\delta^2x,\ \delta^2x',\ \delta^2x'' \quad \text{und} \quad 0,\ \partial^2u',\ \partial^2u'';$$

diess zieht aber zufolge der im ersten Abschnitte aufgefundenen und für jeden Punkt und jede Richtung gültigen Gleichung (14.) nach sich, dass sowohl

(149. b.)

$$\begin{cases} C'\partial^2x' + C''\partial^2x'' = A\,\delta^2u + A'\delta^2u' + A''\delta^2u'' \\ \text{als auch} \\ A'\partial^2u' + A''\partial^2u'' = C\,\delta^2x + C'\,\delta^2x' + C''\delta^2x'' \end{cases}$$

ist, wenn A, A', A'' und C, C', C'' die schiefen und senkrechten Projectionszahlen von irgend einer bestimmten Richtung vorstellen. Die hier erhaltenen beiden Gleichungen gehen, wenn man beachtet, dass nach Analogie der im Paragraph 12. dieses Abschnitts mitgetheilten Gleichungen (11. a.)

$$\delta x' = \partial x' \delta x\,,\quad \delta x'' = \partial x'' \delta x \quad\text{und}\quad \delta u' = \partial u' \delta u\,,\quad \delta u'' = \partial u'' \delta u$$

ist, woraus man durch nochmalige Ableitung nach u oder x

$$\delta^2 x' = \partial^2 x' \delta x^2 + \partial x' \delta^2 x\,,\quad \delta^2 x'' = \partial^2 x'' \delta x^2 + \partial x'' \delta^2 x$$

und

$$\delta^2 u' = \partial^2 u' \delta u^2 + \partial u' \delta^2 u\,,\quad \delta^2 u'' = \partial^2 u'' \delta u^2 + \partial u'' \delta^2 u$$

findet, über in:

$$\left.\begin{array}{l} C'\partial^2 x' + C''\partial^2 x'' = \delta^2 u\,(A + A'\partial u' + A''\partial u'') + \delta u^2\,(A'\partial^2 u' + A''\partial^2 u'') \\ \text{und} \\ A'\partial^2 u' + A''\partial^2 u'' = \delta^2 x\,(C + C'\partial x' + C''\partial x'') + \delta x^2\,(C'\partial^2 x' + C''\partial^2 x''). \end{array}\right\} \quad \textbf{(149. c.)}$$

Wendet man diese für jeden bestimmten Punct und jede bestimmte Richtung gültigen Gleichungen auf den Punct O an, dessen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' sind, und auf die Richtung des in O sich endigenden Halbmessers des beschränkten Biegungscylinders, so werden sie mit Rücksichtsnahme auf die für diesen Punct und diese Richtung bestehenden Gleichungen (148. a.):

$$\left.\begin{array}{l} C'\partial^2 \xi' + C''\partial^2 \xi'' = \delta\eta^2\,(A'\partial^2 \eta' + A''\partial^2 \eta'') \\ \text{und} \\ A'\partial^2 \eta' + A''\partial^2 \eta'' = \delta\xi^2\,(C'\partial^2 \xi' + C''\partial^2 \xi''), \end{array}\right\} \quad \textbf{(149. d.)}$$

von welchen sich die eine leicht in die andere überführen lässt. Nimmt man nun von diesen Gleichungen die Ableitungen in Bezug auf die fremde Veränderliche, von welcher die Grössen A', A'' und C', C'' abhängig gedacht worden sind, so kommt:

$$\left.\begin{array}{l} d A'\partial^2 \eta' + d A''\partial^2 \eta'' = \delta\xi^2\,(d C'\partial^2 \xi' + d C''\partial^2 \xi'') \\ \text{und} \\ d C'\partial^2 \xi' + d C''\partial^2 \xi'' = \delta\eta^2\,(d A'\partial^2 \eta' + d A''\partial^2 \eta'') \end{array}\right\} \quad \textbf{(149. e.)}$$

und durch Multiplication dieser mit den vorigen und berücksichtigend dass $\delta\xi\,\delta\eta = 1$ ist, findet man

$$(C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'')(d A'\partial^2\eta' + d A''\partial^2\eta'') = (A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'')(d C'\partial^2\xi' + d C''\partial^2\xi''); \quad \textbf{(149. f.)}$$

in Folge dieser Gleichung aber zerfällt die (149. a.) in jede der zwei andern:

$$(C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'')(d A'\partial^2\eta' + d A''\partial^2\eta'') = 0 \quad\text{und}\quad (A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta'')(d C'\partial^2\xi' + d C''\partial^2\xi'') = 0,$$

in welchen wieder die zwei Bedingungen enthalten sind, welche zu den Gleichungen (148. f.) geführt haben.

169) Jetzt machen wir uns an die Bestimmung der dem grössten oder kleinsten in O sich endigenden Biegungshalbmesser entsprechenden Werthe von A, A', A'' und C, C', C'', die wir zur bessern Unterscheidung durch A_0, A'_0, A''_0 und C_0, C'_0, C''_0 bezeichnen wollen. Zu dieser Bestimmung haben wir ausser den Gleichungen (148. f.), welche in den neuen Zeichen so aussehen:

$$
\textbf{(150. a.)} \quad \left\{\begin{array}{l}
A_0(\delta\xi'\delta^2\xi''-\delta\xi''\delta^2\xi')-A'_0\delta^2\xi''+A''_0\delta^2\xi'=0 \\
\text{und} \\
C_0(\delta\eta'\delta^2\eta''-\delta\eta''\delta^2\eta')-C'_0\delta^2\eta''+C''_0\delta^2\eta'=0, \\
\text{noch die (148. a.), welche in den neuen Zeichen so aussehen:} \\
A_0+A'_0\delta\eta'+A''_0\delta\eta''=0 \quad \text{und} \quad C_0+C'_0\delta\xi'+C''_0\delta\xi''=0,
\end{array}\right.
$$

und hieraus findet man durch successive Elimination von A''_0 und A'_0 oder C''_0 und C'_0, dass

$$
\textbf{(150. b.)} \quad \left\{\begin{array}{l}
A_0 : A'_0 : A''_0 = \delta\eta'\delta^2\xi'+\delta\eta''\delta^2\xi'' : \delta\xi'(\delta\eta'\delta^2\xi'+\delta\eta''\delta^2\xi'')-\delta^2\xi'(1+\delta\xi'\delta\eta'+\delta\xi''\delta\eta'') \\
\qquad : \delta\xi''(\delta\eta'\delta^2\xi'+\delta\eta''\delta^2\xi'')-\delta^2\xi''(1+\delta\xi'\delta\eta'+\delta\xi''\delta\eta'') \\
\text{und} \\
C_0 : C'_0 : C''_0 = \delta\xi'\delta^2\eta'+\delta\xi''\delta^2\eta'' : \delta\eta'(\delta\xi'\delta^2\eta'+\delta\xi''\delta^2\eta'')-\delta^2\eta'(1+\delta\xi'\delta\eta'+\delta\xi''\delta\eta'') \\
\qquad : \delta\eta''(\delta\xi'\delta^2\eta'+\delta\xi''\delta^2\eta'')-\delta^2\eta''(1+\delta\xi'\delta\eta'+\delta\xi''\delta\eta'').
\end{array}\right.
$$

Man kann diese letzten Gleichungen mittelst der oben in Nr. 163. eingeführten Grösse $\chi_{x,u}$ sehr einfach darstellen; es lassen sich nämlich in Folge der dort angegebenen Relationen (136. d. bis f.) die Gleichungen (150. b.) so schreiben:

$$
\textbf{(150. c.)} \quad \left\{\begin{array}{l}
A_0 : A'_0 : A''_0 = \overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta} : \delta\xi'\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\delta^2\xi'\chi_{\xi,\eta} : \delta\xi''\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\delta^2\xi''\chi_{\xi,\eta} \\
\text{und} \\
C_0 : C'_0 : C''_0 = \overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta} : \delta\eta'\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\delta^2\eta'\chi_{\xi,\eta} : \delta\eta''\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\delta^2\eta''\chi_{\xi,\eta}.
\end{array}\right.
$$

Mittelst dieser Gleichungen findet man:

$$
\textbf{(150. d.)} \quad \left\{\begin{array}{l}
C'_0\delta^2\xi'+C''_0\delta^2\xi''=\dfrac{\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\delta}\chi_{\xi,\eta}}{\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}}C_0 \\
\text{und} \\
A'_0\delta^2\eta'+A''_0\delta^2\eta''=\dfrac{\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\delta}\chi_{\xi,\eta}}{\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}}A_0,
\end{array}\right.
$$

und setzt man die hier für $C'_0\delta^2\xi'+C''_0\delta^2\xi''$ und $A'_0\delta^2\eta'+A''_0\delta^2\eta''$ erhaltenen Ausdrücke an die Stelle von $C'\delta^2\xi'+C''\delta^2\xi''$ und $A'\delta^2\eta'+A''\delta^2\eta''$ in die Gleichungen (147. a. und b.) ein, so liefern diese den grössten oder kleinsten zu den beschränkten Biegungscylindern gehörigen Biegungshalbmesser; bezeichnen wir daher diesen kleinsten oder grössten Biegungshalbmesser durch ϱ_0 so ist mit Rücksicht auf die eingeführte Grösse $\chi_{\xi,\eta}$:

$$
\textbf{(150. e.)} \quad \varrho_0=\frac{\delta\eta\,\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\dfrac{1}{C_0}}{\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\delta}\chi_{\xi,\eta}} \quad \text{oder} \quad \varrho_0=\frac{\delta\xi\,\chi_{\xi,\eta}\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\dfrac{1}{A_0}}{\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\delta}\chi_{\xi,\eta}}
$$

und

$$
\textbf{(150. f.)} \quad \varrho_0^2=\frac{\chi^2_{\xi,\eta}\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\dfrac{1}{A_0C_0}}{(\overset{10}{\delta}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\delta}\chi_{\xi,\eta}-\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\delta}\chi_{\xi,\eta})^2}.
$$

Durch die Gleichungen (150. c.) und (150. e. und f.) ist die Aufsuchung der Grösse und Richtung des kleinsten oder grössten in O sich endigenden Biegungsradius auf die zwei einzigen Grössen A_0 und C_0 zurückgeführt worden, und um auch diese noch zu erhalten, beachte man, dass

$$A_0 C_0 + A'_0 C'_0 + A''_0 C''_0 = 1$$

ist, oder

$$1 + \frac{A'_0 C'_0}{A_0 C_0} + \frac{A''_0 C''_0}{A_0 C_0} = \frac{1}{A_0 C_0},$$

welche Gleichung, wenn man statt der in ihr vorkommenden Quotienten deren aus den Gleichungen (150. c.) geschöpfte Werthe setzt, übergeht in:

$$\left.\begin{aligned} &1 + \frac{\left(\partial \xi' \overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} - \partial^2 \xi' \chi_{\xi,\eta}\right)\left(\partial \eta' \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta} - \partial^2 \eta' \chi_{\xi,\eta}\right)}{\overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}} \\ &+ \frac{\left(\partial \xi'' \overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} - \partial^2 \xi'' \chi_{\xi,\eta}\right)\left(\partial \eta'' \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta} - \partial^2 \eta'' \chi_{\xi,\eta}\right)}{\overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}} = \frac{1}{A_0 C_0}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(151. d.)}$$

und diese verwandelt sich mit Berüchsichtigung der Relationen (136. d. bis f.) in:

$$\frac{1}{A_0 C_0} = \chi_{\xi,\eta} \frac{\chi_{\xi,\eta} \overset{11}{\partial} \chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}}{\overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}}. \qquad \textbf{(151. a.)}$$

Ferner hat man, den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (12.) und (47. a) zur Folge:

$$C_0 = A_0 + A'_0 \cos W + A''_0 \cos W' \quad \text{und} \quad \mathfrak{C} A_0 = \mathfrak{A} C_0 + \mathfrak{A}' C'_0 + \mathfrak{A}'' C''_0;$$

dividirt man daher die erste dieser Gleichungen mit A_0, die zweite mit C_0 und setzt für $\frac{A'_0}{A_0}, \frac{A''_0}{A_0}$ und $\frac{C'_0}{C_0}, \frac{C''_0}{C_0}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (150. c.), so kommt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{C_0}{A_0} = \frac{\overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta} (1 + \partial \xi' \cos W + \partial \xi'' \cos W') - \chi_{\xi,\eta} (\partial^2 \xi' \cos W + \partial^2 \xi'' \cos W')}{\overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta}} \\ &\text{und} \\ &\mathfrak{C} \frac{A_0}{C_0} = \frac{\overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta} (\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \partial \eta' + \mathfrak{A}'' \partial \eta'') - \chi_{\xi,\eta} (\mathfrak{A}' \partial^2 \eta' + \mathfrak{A}'' \partial^2 \eta'')}{\overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \textbf{(151. b.)}$$

Da nun den ersten Gleichungen (128. b.) gemäss:

$$\mathfrak{C} \partial x = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \partial u' + \mathfrak{A}'' \partial u'' \quad \text{und} \quad \partial u = 1 + \partial x' \cos W + \partial x'' \cos W'$$

und wenn man die erste nach u, die zweite nach x ableitet:

$$\mathfrak{C} \partial^2 x = \mathfrak{A}' \partial^2 u' + \mathfrak{A}'' \partial^2 u'' \quad \text{und} \quad \partial^2 u = \partial^2 x' \cos W + \partial^2 x'' \cos W'$$

ist, und diese auf den hervorgehobenen Punct O angewandt geben:

$$\mathfrak{G}\,\delta\,\xi = \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'\,\partial\,\eta' + \mathfrak{A}''\,\partial\,\eta'' \quad \text{und} \quad \delta\,\eta = 1 + \partial\,\xi' \cos W + \partial\,\xi'' \cos W',$$

so wie

$$\mathfrak{G}\,\delta^2\xi = \mathfrak{A}'\,\partial^2\,\eta' + \mathfrak{A}''\,\partial^2\,\eta'' \quad \text{und} \quad \delta^2\eta = \partial^2\xi' \cos W + \partial^2\xi'' \cos W',$$

so lassen sich die Gleichungen (151. b.) auch so schreiben:

(151. c.)
$$\frac{C_0}{A_0} = \frac{\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta}{\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}} \quad \text{und} \quad \frac{A_0}{C_0} = \frac{\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi}{\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}$$

und durch Multiplication einer jeden dieser Gleichungen mit der (151. a.) findet man:

(151. d.)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{A_0^2} &= \frac{\chi_{\xi,\eta}\left(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)\left(\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta\right)}{\left(\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^2\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}} \\ &\text{und} \\ \frac{1}{C_0^2} &= \frac{\chi_{\xi,\eta}\left(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)\left(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi\right)}{\left(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^2\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}. \end{aligned}\right.$$

Setzt man die jetzt gefundenen Werthe A_0 und C_0 in die Gleichungen (150. e. und f.), so erhält man:

(151. e.)
$$\left\{\begin{aligned} \varrho_0 &= \frac{-\left(\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi\right)^{\frac{1}{2}}\delta\eta}{\left(\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{1}{2}}}, \\ \varrho_0 &= \frac{-\left(\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta\right)^{\frac{1}{2}}\delta\xi}{\left(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right.$$

und

(151. f.)
$$\varrho_0^2 = \frac{\left(\chi_{\xi,\eta}\right)^3}{\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}.$$

Der letzten an sich schon sehr einfachen Formel kann man eine noch einfachere Gestalt auf folgende Weise geben. Bezeichnet nämlich Log $\chi_{x,u}$ den natürlichen Logerithmen der Function $\chi_{x,u}$, so erhält man nach u ableitend:

$$\overset{01}{\partial}\operatorname{Log}\chi_{x,u} = \frac{\overset{01}{\partial}\chi_{x,u}}{\chi_{x,u}},$$

und leitet man diese Gleichung nach x ab, so wird:

$$\overset{11}{\partial}\operatorname{Log}\chi_{x,u} = \frac{\chi_{x,u}\overset{11}{\partial}\chi_{x,u} - \overset{10}{\partial}\chi_{x,u}\overset{01}{\partial}\chi_{x,u}}{\left(\chi_{x,u}\right)^2},$$

woraus folgt, dass man die Gleichung (151. f.) auch so schreiben kann

$$\varrho_0^2 = \frac{\chi_{\xi,\eta}}{\overset{11}{\partial}\operatorname{Log}\chi_{\xi,\eta}}\,. \qquad \textbf{(151. g.)}$$

170) Obschon durch die in der vorigen Nummer aufgefundenen Formeln die Richtung sowohl als die Länge des kleinsten oder grössten in O sich endigenden Biegungshalbmessers gegeben worden ist, so wollen wir doch, bevor wir weiter gehen, einen Blick auf die dortigen Ergebnisse zurückwerfen, um die eigenthümlichen Vereinfachungen kennen zu lernen, zu welchen sie hinleiten. Da nämlich die drei in (151. e.) und (151. f.) enthaltenen Gleichungen offenbar einen und denselben Werth für ϱ_0 liefern müssen, so folgt aus der Vergleichung des in (151. f.) für ϱ_0 erhaltenen Ausdruckes mit den beiden in (151. e.) stehenden, dass man haben müsse:

$$(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi)\,\delta\eta^2 = \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta} \quad \text{und} \quad (\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta)\,\delta\xi^2 = \overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\,. \qquad \textbf{(152. a.)}$$

In Folge dieser Gleichungen ziehen sich nämlich die Gleichungen (151. e.) in die eine (151. f.) zurück, wie die Natur der Sache verlangt; zugleich aber dienen sie zur Vereinfachung der in (151. d.) erhaltenen Ausdrücke von $\frac{1}{A_0^2}$ und $\frac{1}{C_0^2}$, indem sie zeigen, dass

$$\frac{1}{A_0^2} = \frac{\chi_{\xi,\eta}(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta})}{\delta\xi^2(\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta})^2}\,, \quad \frac{1}{C_0^2} = \frac{\chi_{\xi,\eta}(\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta})}{\delta\eta^2(\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta})^2} \qquad \textbf{(152. b.)}$$

ist, und nun kann man die Projectionszahlen A_0 und C_0, mittelst der Grösse ϱ_0 höchst einfach wie folgt ausdrücken:

$$\frac{1}{A_0} = \frac{(\chi_{\xi,\eta})^2}{\varrho_0\,\delta\xi\,\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{C_0} = \frac{(\chi_{\xi,\eta})^2}{\varrho_0\,\delta\eta\,\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}$$

oder

$$A_0 = \frac{\varrho_0\,\delta\xi\,\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}{(\chi_{\xi,\eta})^2} \quad \text{und} \quad C_0 = \frac{\varrho_0\,\delta\eta\,\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}{(\chi_{\xi,\eta})^2}\,. \qquad \textbf{(152. c.)}$$

Ferner geben die Gleichungen (150. c.) in Folge der in (152. a.) ausgesprochenen Relationen für A_0', A_0'' und C_0', C_0'' folgende Werthe:

$$A_0' = \frac{\varrho_0\,\delta\xi}{(\chi_{\xi,\eta})^2}(\delta\xi'\,\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \delta^2\xi'\,\chi_{\xi,\eta})\,, \quad A_0'' = \frac{\varrho_0\,\delta\xi}{(\chi_{\xi,\eta})^2}(\delta\xi''\,\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \delta^2\xi''\,\chi_{\xi,\eta})$$

und

$$C_0' = \frac{\varrho_0\,\delta\eta}{(\chi_{\xi,\eta})^2}(\delta\eta'\,\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \delta^2\eta'\,\chi_{\xi,\eta})\,, \quad C_0'' = \frac{\varrho_0\,\delta\eta}{(\chi_{\xi,\eta})^2}(\delta\eta''\,\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \delta^2\eta''\,\chi_{\xi,\eta})\,, \qquad \textbf{(152. d.)}$$

und man kann die vorstehenden Projectionszahlen auch auf die folgende noch einfachere Gestalt bringen:

$$(152.\ e.) \cdots\cdots \left\{\begin{array}{l} A_0 = -\varrho_0\,\delta\xi\,\overset{10}{\eth}\Big(\frac{1}{\chi_{\xi,\eta}}\Big)\,,\quad A'_0 = -\varrho_0\,\delta\xi\,\overset{10}{\eth}\Big(\frac{\eth\xi'}{\chi_{\xi,\eta}}\Big)\,,\quad A''_0 = -\varrho_0\,\delta\xi\,\overset{10}{\eth}\Big(\frac{\eth\xi''}{\chi_{\xi,\eta}}\Big) \\ \text{und} \\ C_0 = -\varrho_0\,\delta\eta\,\overset{01}{\eth}\Big(\frac{1}{\chi_{\xi,\eta}}\Big)\,,\quad C'_0 = -\varrho_0\,\delta\eta\,\overset{01}{\eth}\Big(\frac{\eth\eta'}{\chi_{\xi,\eta}}\Big)\,,\quad C''_0 = -\varrho_0\,\delta\eta\,\overset{01}{\eth}\Big(\frac{\eth\eta''}{\chi_{\xi,\eta}}\Big)\,, \end{array}\right.$$

worin $\eth\xi'$, $\eth\xi''$ als Functionen von ξ, $\eth\eta'$, $\eth\eta''$ hingegen als Functionen von η aufzufassen sind. Aus diesen Projectionszahlen findet man durch Multiplication mit ϱ_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten vom Krümmungsmittelpunct.

Die Relationen (152. a.) lassen sich directe aus den Gleichungen (151. c.) wie folgt ableiten. Zuerst geben diese Gleichungen durch Multiplication:

$$\overset{10}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\overset{01}{\eth}\chi_{\xi,\eta} = (\overset{10}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta)(\overset{01}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi - \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi)$$

und nun nach Wegschaffung der Klammern und Weglassung des allen nach Benützung der Relation $\delta\eta\,\delta\xi = 1$ übrigbleibenden Gliedern gemeinschaftlichen Factors $\chi_{\xi,\eta}$:

$$(153.\ a.)\qquad \overset{10}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta\,\delta^2\xi + \overset{01}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi\,\delta^2\eta = \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta\,\delta^2\xi\,,$$

aus welcher Gleichung sich jene Relationen sogleich ergeben, wenn man beachtet, dass nach Anleitung der im ersten Paragraphen dieses Abschnitts mitgetheilten Gleichungen (10. c. und d.)

$$\delta^2\eta\,\delta\xi + \delta^2\xi\,\delta\eta^2 = 0 \quad \text{und} \quad \delta^2\xi\,\delta\eta + \delta^2\eta\,\delta\xi^2 = 0$$

ist; denn setzt man einmal $-\delta^2\xi\delta\eta^2$ für $\delta^2\eta\delta\xi$ und ein andermal $-\delta^2\eta\delta\xi^2$ für $\delta^2\xi\delta\eta$, so erhält man:

$$(153.\ b.)\qquad \overset{10}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta - \overset{01}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\eta^2 = \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\eta \quad \text{und} \quad -\overset{10}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi^2 + \overset{01}{\eth}\chi_{\xi,\eta}\,\delta\xi = \chi_{\xi,\eta}\,\delta^2\xi\,,$$

und diese gehen mittelst der Relation $\delta\xi\,\delta\eta = 1$ ohne weiteres in die (152. a.) über.

171) Die Gleichungen (151. e.) oder (151. f.) liefern für ϱ_0 nur einen einzigen Werth, und es ist leicht einzusehen, dass dieser unter allen derselben Stelle angehörigen den kleinsten Biegungshalbmesser hergiebt. Die Gleichungen (147. a.) geben nämlich zu verstehen, dass die beschränkten Biegungshalbmesser an einer und derselben Stelle, wo die Zähler ihrer rechten Seiten stets den gleichen Werth behalten, um so grösser ausfallen je mehr die Nenner in den für ϱ_1 erhaltenen Ausdrücken abnehmen, und unendlich gross werden, wenn diese Nenner null werden, was stets geschehen kann. Bezeichnet man die besondern Werthe von C, C', C'' oder A, A', A'', welche diesem unendlich grossen Biegungshalbmesser entsprechen, durch C_{00}, C'_{00}, C''_{00} oder A_{00}, A'_{00}, A''_{00}, so hat man zu deren Bestimmung:

$$(154.\ a.)\qquad C'_{00}\,\eth^2\xi' + C''_{00}\,\eth^2\xi'' = 0 \quad \text{oder} \quad A'_{00}\,\eth^2\eta' + A''_{00}\,\eth^2\eta'' = 0\,.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass der unendlich grosse in O sich endigende Biegungshalbmesser senkrecht steht auf dem zu derselben Stelle gehörigen kleinsten, dessen Projectionszahlen A_0, A'_0, A''_0 und C_0, C'_0, C''_0 sind. Die für diese Projectionszahlen in den Gleichungen (152. c.) und (152. d.) erhaltenen Werthe nämlich liefern:

$$A_0 C_{00} + A'_0 C'_{00} + A''_0 C''_{00} = \frac{\varrho_0 \delta \xi \overset{10}{\partial} \chi_{\xi,\eta}}{\chi^2_{\xi,\eta}} (C_{00} + C'_{00} \partial \xi' + C''_{00} \partial \xi'') - \frac{\varrho_0 \delta \xi}{\chi_{\xi,\eta}} (C'_{00} \partial^2 \xi' + C''_{00} \partial^2 \xi'')$$

und

$$C_0 A_{00} + C'_0 A'_{00} + C''_0 A''_{00} = \frac{\varrho_0 \delta \eta \overset{01}{\partial} \chi_{\xi,\eta}}{\chi^2_{\xi,\eta}} (A_{00} + A'_{00} \partial \eta' + A''_{00} \partial \eta'') - \frac{\varrho_0 \delta \eta}{\chi_{\xi,\eta}} (A'_{00} \partial^2 \eta' + A''_{00} \partial^2 \eta''),$$

und da zufolge der einem jeden in O sich endigenden Biegungshalbmesser angehörigen Gleichungen (148. a.)

$$C_{00} + C'_{00} \partial \xi' + C''_{00} \partial \xi'' = 0 \quad \text{und} \quad A_{00} + A'_{00} \partial \eta' + A''_{00} \partial \eta'' = 0, \qquad \textbf{(154. b.)}$$

so wie zufolge der Gleichungen (154. a.)

$$C'_{00} \partial^2 \xi' + C''_{00} \partial^2 \xi'' = 0 \quad \text{und} \quad A'_{00} \partial^2 \eta' + A''_{00} \partial^2 \eta'' = 0$$

ist, so zeigen die vorigen Gleichungen, dass

$$A_{00} C_0 + A'_{00} C'_0 + A''_{00} C''_0 = 0 \quad \text{und} \quad C_{00} A_0 + C'_{00} A'_0 + C''_{00} A''_0 = 0$$

ist, oder dass die Richtungen des kleinsten und des unendlich grossen Biegungshalbmessers, deren schiefe und senkrechte Projectionszahlen A_0, A'_0, A''_0; A_{00}, A'_{00}, A''_{00} und C_0, C'_0, C''_0; C_{00}, C'_{00}, C''_{00} sind, senkrecht aufeinander stehen, wenn sie beschränkten Biegungscylindern, d. h. solchen angehören, deren Axen stets die gleiche Neigung zur Tangente an O einhalten. Da die Fläche eines Kreiscylinders, dessen Radius unendlich gross wird, in eine Ebene übergeht, und diese die gänzliche Abwesenheit einer Biegung anzeigt, so ist man zu der Einsicht gelangt, dass die unebene Curve zunächst an der Stelle O von der Seite her, welche durch die Richtung des unendlich grossen Biegungshalbmessers gegeben wird, ohne alle Biegung ist, dass man also alle zunächst bei O liegenden Puncte der unebenen Curve als in der Ebene liegend anzusehen berechtigt ist, welche durch den Punct O senkrecht auf die Richtung des hier sich endigenden unendlich grossen Biegungshalbmessers gelegt wird, welche Ebene stets durch die Tangente an O und durch den hier sich endigenden kleinsten Biegungshalbmesser geht, da wir gezeigt haben, dass dieser senkrecht auf dem unendlich grossen steht. Es springt in die Augen, dass der kleinste Biegungshalbmesser ϱ_0 nichts anders ist als der Krümmungshalbmesser für diese in genannter Ebene liegende unendlich kleine Strecke der unebenen Curve, in dem Sinne, wie er in §. 13. dieses Abschnitts für ebene Curven gefunden worden ist; daher nennen wir den kleinsten Biegungshalbmesser ϱ_0 an jeder Stelle der unebenen Curve, ihren dieser Stelle entsprechenden Krümmungshalbmesser, so wie wir die Ebene, in welcher alle zunächt bei der hervorgehobenen Stelle liegenden Puncte der unebenen Curve liegen, ihre dieser Stelle entsprechende Krümmungsebene nennen werden. Da die zu einer hervorgehobenen Stelle O gehörige Krümmungsebene senkrecht auf dem in O sich endigenden unendlich grossen Biegungshalbmesser steht, so wird die zu O gehörige Krümmungsebene den im zweiten Abschnitte §. 10. geschehenen Betrachtungen zur Folge durch jede der nachstehenden Gleichungen dargestellt

$$C_{00}(x-\xi) + C'_{00}(x'-\xi') + C''_{00}(x''-\xi'') = 0 \quad \text{und} \quad A_{00}(u-\eta) + A'_{00}(u'-\eta') + A''_{00}(u''-\eta'') = 0, \qquad \textbf{(154. c.)}$$

in welchen ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' die schiefen und senkrechten Coordinaten der hervorgehobenen Stelle O, x, x', x'' und u, u', u'' dagegen die eines beliebigen Punctes der Krümmungsebene vorstellen.

Zur Bestimmung der Grössen C_{00}, C'_{00}, C''_{00} und A_{00}, A'_{00}, A''_{00} dienen die Gleichungen (154. a. und b.) aus welchen sich ergiebt, dass

(154. d.) $$\begin{cases} C_{00} : C'_{00} : C''_{00} = (\partial\xi' \, \partial^2\xi'' - \partial\xi'' \, \partial^2\xi') : -\partial^2\xi'' : \partial^2\xi' \\ \text{und} \\ A_{00} : A'_{00} : A''_{00} = (\partial\eta' \, \partial^2\eta'' - \partial\eta'' \, \partial^2\eta') : -\partial^2\eta'' : \partial^2\eta' \end{cases}$$

ist, und mittelst dieser Verhältnisszahlen kann man den Gleichungen (154. c.) die nachfolgende Gestalt geben:

(154. e.) $$\begin{cases} (\partial\xi' \, \partial^2\xi'' - \partial\xi'' \, \partial^2\xi')(x-\xi) - \partial^2\xi''(x'-\xi') + \partial^2\xi'(x''-\xi'') = 0 \\ \text{und} \\ (\partial\eta' \, \partial^2\eta'' - \partial\eta'' \, \partial^2\eta')(u-\eta) - \partial^2\eta''(u'-\eta') + \partial^2\eta'(u''-\eta'') = 0, \end{cases}$$

von denen jede die zur Stelle O gehörige Krümmungsebene der doppelt gekrümmten Linie darstellt.

Der durch die Gleichung (151. f.) gegebene Krümmungshalbmesser der unebenen Curve an der Stelle O wird, wenn man an die Stelle von $\chi_{\xi,\eta}$, $\overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}$, $\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}$ und $\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta}$ wieder ihre in Nr. 163. durch die Gleichungen (136. e. und f.) angezeigten Aequivalente schreibt, aus der nachstehenden Gleichung gefunden:

(154. f.) $$\varrho_0^2 = \frac{(1+\partial\xi'\,\partial\eta' + \partial\xi''\,\partial\eta'')^3}{(1+\partial\xi'\,\partial\eta' + \partial\xi''\,\partial\eta'')(\partial^2\eta'\,\partial^2\xi' + \partial^2\eta''\,\partial^2\xi'') - (\partial\eta'\,\partial^2\xi' + \partial\eta''\,\partial^2\xi'')(\partial\xi'\,\partial^2\eta' + \partial\xi''\,\partial^2\eta'')},$$

welche mittelst einer leicht durchzuführenden Umformung übergeht in:

(154. g.) $$\varrho_0^2 = \frac{(1+\partial\xi'\,\partial\eta' + \partial\xi''\,\partial\eta'')^3}{(\partial\xi'\,\partial^2\xi'' - \partial\xi''\,\partial^2\xi')(\partial\eta'\,\partial^2\eta'' - \partial\eta''\,\partial^2\eta') + \partial^2\xi'\,\partial^2\eta' + \partial^2\xi''\,\partial^2\eta''}.$$

172) Der Krümmungshalbmesser von unebenen Curven lässt sich ähnlich wie in §. 13. dieses Abschnitts (Nr. 131.) bei ebenen Curven geschehen ist, durch die Grössen R_0 und E_0 darstellen, auf welche wir in diesem Paragraphen (Nr. 163.) bei der Bestimmung ihrer Tangenten gestossen sind. Aus den in Nr. 163. aufgestellten Gleichungen (138.) ersieht man nämlich sogleich, dass

$$\frac{\Pi_0^4}{E_0^2} = \frac{4(\chi_{\xi,\eta})^3}{\chi_{\xi,\eta}\overset{11}{\partial}\chi_{\xi,\eta} - \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta}\overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta}}$$

ist, und dieses Resultat verglichen mit der oben erhaltenen Gleichung (151. f.) giebt zu verstehen, dass

$$\frac{\Pi_0^4}{E_0^2} = 4\varrho_0^2$$

ist, woraus man findet

(155. a.) $$\frac{\Pi_0^2}{E_0} = 2\varrho_0,$$

wenn man unter E_0 und ϱ_0 immer nur positive Zahlen sich denkt. Dabei bezeichnet den in Nr. 162. eingeführten Bezeichnungen gemäss E die Länge O'S, wenn O' einen beliebigen Punct der unebenen Curve vorstellt und S den Punct in der zu dem hervorgehobenen Punct O ge-

hörigen Tangente anzeigt, in welchem diese von einem aus O′ auf sie gefällten Lothe getroffen wird, während Π das Stück O S dieser Tangente anzeigt, welche Grössen in E_0 und Π_0 übergehen, wenn der Punct O′ dem O so nahe kommt, dass sich der Abstand beider, welcher dort im Allgemeinen durch R bezeichnet worden ist, durch kein endliches Maass mehr angeben lässt, in welchem Falle wir ihn durch R_0 vorstellen. Liegt aber der Punct O′ so nahe bei dem O, so ist in Gemässheit der Gleichungen (138.) $R_0 = \Pi_0$, und man kann daher die vorige Gleichung auch so schreiben

$$\frac{R_0^2}{E_0} = 2\varrho_0\,; \qquad \textbf{(155. b.)}$$

es ist aber, wo immer auch der Punct O′ in der Curve angenommen werden mag, $\frac{E}{R}$ der Sinus des Winkels den die von O nach O′ zielende Richtung mit der zu O gehörigen Tangente bildet, welcher Winkel aber durch Θ bezeichnet worden ist, so dass man also allgemein hat:

$$\frac{E}{R} = \sin\Theta\,.$$

Bezeichnet man durch Θ_0 das was aus Θ wird, wenn E und R in E_0 und R_0 übergehen, d. h. wenn der Abstand zwischen O′ und O durch kein endliches Maass sich mehr angeben lässt, so ist

$$\frac{E_0}{R_0} = \sin\Theta_0$$

in Bezug auf jeden so nahe bei dem O liegenden Punct O′, dem die Grössen E_0, R_0, Θ_0 angehören; mittelst dieser Relation geht aber die Gleichung (155. b.) über in:

$$\frac{R_0}{2\varrho_0} = \sin\Theta_0 \quad \text{oder} \quad 2\varrho_0 = \frac{R_0}{\sin\Theta_0}\,. \qquad \textbf{(155. c.)}$$

Den spitzen Winkel Θ_0, den die Tangente an O mit einer Geraden macht, die von O aus nach einem unendlich nahen Puncte O′ der unebenen Curve geht, werden wir den der Entfernung O O′ entsprechenden Krümmungswinkel der unebenen Curve an der Stelle O nennen. Dem zu einer Stelle der unebenen Curve gehörigen Krümmungswinkel kommen nach Aussage der Gleichungen (155. c.) die folgenden Eigenschaften zu:

a) da R_0 die unendlich kleine Entfernung vorstellt, um welche der Punct O′ von dem O abliegend gedacht wird, so ist an jeder Stelle O der unebenen Curve, bei welcher ϱ_0 nicht selber unendlich klein ist, $\sin\Theta_0$ eine unbestimmbar kleine Grösse, weswegen man in der Gleichung (155. c.) auch blos Θ_0 setzen kann, wo $\sin\Theta_0$ steht;

b) der Werth $\sin\Theta_0$ ändert sich bei einer bestimmten Curvenstelle O mit der Grösse R_0, der er proportional ist, was nichts anders sagt, als dass die Neigungen der von O aus nach verschiedenen, diesem unendlich nahe liegenden Puncten O′ der unebenen Curve gezogenen Geraden gegen die zu O gehörige Tangente in demselben Verhältnisse zunehmen, wie die Abstände der Puncte O′ von dem O;

c) aber eben deswegen bleibt das Verhältniss zwischen jedem solchen Abstande und dem dazu gehörigen Krümmungswinkel stets das gleiche und liefert jedesmal den zu O gehörigen Krümmungshalbmesser der unebenen Curve.

173) Es findet zwischen den Biegungshalbmessern, welche Biegungscylindern angehören, deren Axen stets einerlei Neigung gegen die Tangente der unebenen Curve an einer bestimmt

hervorgehobenen Stelle behalten, eine eben so einfache Abhängigkeit statt, wie wir sie im vorigen Paragraphen zwischen den Krümmungshalbmessern wahrgenommen haben, welche den ebenen Curven angehören, in denen eine krumme Fläche an einer ihrer Stellen durch Ebenen geschnitten wird, welche stets die gleiche Neigung gegen die Normale der krummen Fläche an derselben Stelle behaupten. Um diese Abhängigkeit ohne Weitläufigkeiten sichtbar machen zu können, werden wir den Axen A X, A X′, A X″ eine bestimmte Stellung anweisen, was erlaubt ist, da die Eigenschaften eines räumlichen Gegenstandes unabhängig sind von der Besonderheit des Coordinatensystems auf welches der Gegenstand bezogen wird. Wir denken uns die Axe A X parallel mit der zu O gehörigen Tangente der unebenen Curve, die Axen A X′ und A X″ parallel mit der zum Puncte O gehörigen Normalebene der doppelt gekrümmten Linie; dann steht die Axe A X senkrecht auf den beiden andern A X′ und A X″, so dass $\cos W = 0$ und $\cos W' = 0$ ist. Weil die Axe A X parallel mit der Tangente an O läuft und auf den Axen A X′ und A X″ senkrecht steht, so ist den Gleichungen (140. b.) gemäss

$$\partial\xi' = 0\,,\quad \partial\xi'' = 0 \quad\text{und}\quad \partial\eta' = 0\,,\quad \partial\eta'' = 0\,,$$

und in Folge dieser Werthe findet man

$$\chi_{\xi,\eta} = 1\,,\quad \overset{10}{\partial}\chi_{\xi,\eta} = 0\,,\quad \overset{01}{\partial}\chi_{\xi,\eta} = 0\,;$$

ferner wird an dem jetzigen Coordinatensysteme

$$\delta\xi = \delta\eta = 1\,,$$

wie sogleich aus der ersten der auf zweiter Zeile stehenden Gleichungen (128. b.) in Verbindung mit der ersten (128. c.) hervorgeht, wenn man diese auf den Punct O in Anwendung bringt und beachtet, dass $\cos W = 0$ und $\cos W' = 0$ ist. Kraft dieser besondern Werthe geben die Gleichungen (147. a.)

(156. a.) $$\frac{1}{\varrho_1} = C'\partial^2\xi' + C''\partial^2\xi'' \quad\text{und}\quad \frac{1}{\varrho_1} = A'\partial^2\eta' + A''\partial^2\eta''\,,$$

woraus sich der in O sich endigende beschränkte Biegungshalbmesser ϱ, finden lässt, wenn dessen durch die Grössen C′, C″ oder A′, A″ bestimmte Richtung gegeben ist. Bezeichnet ϱ_2 die Grösse desjenigen in O sich endigenden Biegungsradius, welcher mit der Axe A X′ parallel läuft, so geht ϱ_1 in den Gleichungen (156. a.) in ϱ_2 über, wenn man $A = 0$, $A' = 1$, $A'' = 0$, $C = \cos 90^\circ$, $C' = 1$, $C'' = \cos W''$ setzt, so dass man hat

(156. b.) $$\frac{1}{\varrho_2} = \partial^2\xi' + \partial^2\xi''\cos W'' \quad\text{und}\quad \frac{1}{\varrho_2} = \partial^2\eta'\,;$$

bezeichnet ferner ϱ_3 die Länge des in O sich endigenden Biegungsradius, welcher mit der Axe A X″ parallel läuft, so ergiebt sich diese Grösse aus den Gleichungen (156. a.) wenn man C, C′, C″ durch $\cos 90^\circ$, $\cos W''$, 1 und A, A′, A″ durch 0, 0, 1 ersetzt, man findet daher:

(156. c.) $$\frac{1}{\varrho_3} = \partial^2\xi'\cos W'' + \partial^2\xi'' \quad\text{und}\quad \frac{1}{\varrho_3} = \partial^2\eta''.$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (156. b. und c.) ihrer Ordnung nach mit den zu einem beliebigen Biegungsradius gehörigen Grössen A′ und A″ und addirt sowohl die vordern wie die hintern zu einander, so kommt

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\varrho_2}A'+\frac{1}{\varrho_3}A''=\partial^2\xi'(A'+A''\cos W'')+\partial^2\xi''(A'\cos W''+A'')=C'\partial^2\xi'+C''\partial^2\xi''\\&\text{und}\\&\frac{1}{\varrho_2}A'+\frac{1}{\varrho_3}A''=A'\partial^2\eta'+A''\partial^2\eta'',\end{aligned}\right\}\ldots\ (156.\ d.)$$

weil den im ersten Abschnitt aufgestellten Gleichungen (12.) analog hier, wo $\cos W=0$ und $\cos W'=0$ ist

$$C'=A'+A''\cos W'' \quad \text{und} \quad C''=A'\cos W''+A''$$

wird. Die beiden Gleichungen (156. d.) ziehen sich aber mit Zuziehung der Gleichungen (156. a.) in die eine zusammen

$$\frac{1}{\varrho_2}A'+\frac{1}{\varrho_3}A''=\frac{1}{\varrho_1}, \qquad (156.\ e.)$$

welche zeigt, wie sich die Grösse eines beliebigen beschränkten Biegungsradius ϱ_1 aus zwei andern ϱ_2 und ϱ_3 finden lässt, wenn die Projectionszahlen A' und A'' welche die Richtung von ϱ_1 an den Richtungen von ϱ_2 und ϱ_3 giebt, gegeben sind. Denkt man sich die Axen AX' und AX'' senkrecht auf einander stehend, so wird unser jetziges Coordinatensystem ein rechtwinkliges, in welchem die schiefen Projectionszahlen A' und A'' den senkrechten gleich werden und dann nichts anders sind, als die Kosinuse der Winkel, welche die Richtung von ϱ_1 mit denen von ϱ_2 und ϱ_3 bildet; stellt daher λ den spitzen Winkel vor, den die Gerade ϱ_1 mit der ϱ_2 bildet, so ist

$$\frac{1}{\varrho_2}\cos\lambda+\frac{1}{\varrho_3}\sin\lambda=\frac{1}{\varrho_1} \qquad (156.\ f.)$$

und ist ϱ_2 der kleinste Biegungshalbmesser, oder der Krümmungshalbmesser, welcher vorhin durch ϱ_0 bezeichnet worden ist, so nimmt ϱ_3 einen unendlich grossen Werth an, weil beide auf einander senkrecht stehen, es wird sonach in diesem Falle

$$\frac{1}{\varrho_0}\cos\lambda=\frac{1}{\varrho_1}, \qquad (156.\ g.)$$

und hierin spricht sich die höchst einfache Relation aus, wodurch sich jeder Biegungshalbmesser aus dem Krümmungshalbmesser finden lässt, wenn man den Winkel kennt, den beide mit einander bilden.

174) Stellen wir uns eine unebene Curve durch die combinirten Gleichungspaare (124. a.) und (124. b.) zwischen den schiefen Coordinaten x, x', x'' oder senkrechten u, u', u'' ihrer Puncte gegeben vor, und nehmen wir in ihr einen beliebigen Punct $\mathfrak{O}$ als feste Grenze an, so wird die Länge des Curvenstücks, welche zwischen dem festen Puncte $\mathfrak{O}$ und einem beweglich gedachten andern Puncte O' der unebenen Curve liegt, blos von der Lage dieses zweiten Punctes O' abhängig sein; diese Länge hat man sich daher als eine Function von der Lage des Punctes O' oder von den diese Lage bestimmenden Coordinaten des Punctes O' vorzustellen. Weil aber durch die Gleichungspaare immer zwei von den drei Coordinaten einer jeden Art aus der dritten gefunden, und zudem die Coordinaten der einen Art aus denen der andern Art mittelst der Gleichungen (128. a.) hergeleitet werden können, sonach fünf von den sechs Coordinaten eines Punctes der unebenen Curve als gegebene Functionen der sechsten aufgefasst werden müssen, so wird man sich die Länge des fraglichen Curvenstücks als Func-

tion von einer der Coordinaten seines veränderlichen Endpunctes O′ zu denken haben. Wir werden die Länge des Curvenstücks $\mathfrak{O}$O′ durch $\mathfrak{L}_x$ bezeichnen, wenn wir sie uns als eine Function von x vorstellen, und durch $\mathfrak{L}_u$, wenn wir sie als Function von u auffassen. Wählt man in der unebenen Curve irgend wo zwischen $\mathfrak{O}$ und O′ noch einen andern O aus, dessen schiefe und senkrechte Coordinaten durch ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' vorgestellt werden sollen, und legt man durch diesen nicht wandelbar gedachten Punct O drei neue Axen OX, OX′, OX″, welche den ursprünglichen AX, AX′, AX″ parallel und gleichläufig sind, so finden, wenn x_0, x'_0, x''_0 die schiefen, u_0, u'_0, u''_0 die senkrechten Coordinaten des beweglichen Punctes O′ an den neuen Axen bezeichnen, während x, x′, x″ und u, u′, u″ die desselben Punctes an den ursprünglichen Axen vorstellen, zwischen diesen Coordinaten zunächst die Gleichungen (125.) und dann auch noch als Folge die (126. a. und b.) statt. Auch lässt sich die im Paragraph 12 dieses Abschnittes für jegliche Function aufgestellte Gleichung (3. a.) auf die beiden Functionen $\mathfrak{L}_x$ und $\mathfrak{L}_u$ anwenden, so dass man in Betreff dieser beiden noch unbekannten Functionen hat:

(157. a.) $$\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi = \partial \mathfrak{L}_\xi x_0 + \frac{1}{2}\partial^2 \mathfrak{L}_\xi x_0^2 + \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta = \partial \mathfrak{L}_\eta u_0 + \frac{1}{2}\partial^2 \mathfrak{L}_\eta u_0^2 + \ldots,$$

wobei $\mathfrak{L}_x - \mathfrak{L}_\xi$ oder $\mathfrak{L}_u - \mathfrak{L}_\eta$ die Länge des Curvenstücks OO′ anzeigt.

Da die zu dem hervorgehobenen Puncte O gehörige Tangente der unebenen Curve durch die Gleichungen

(157. b.) $$x'_0 = \partial\xi' x_0, \quad x''_0 = \partial\xi'' x_0 \quad \text{oder} \quad u'_0 = \partial\eta' u_0, \quad u''_0 = \partial\eta'' u_0$$

dargestellt wird, den oben gefundenen Gleichungen (127. a. und b.) gemäss, so wird man mit deren Hilfe jeden Punct der Tangente vollkommen bestimmen können, so wie man eine einzige von den ihm zugehörigen Coordinaten kennt. Stellen nun O_1 und O_2 die zwei Puncte der Tangente vor, in welchen diese von den zwei Ebenen geschnitten wird, die beide durch den beweglichen Punct O′ hindurch gehen, und von welchen die eine parallel mit der Coordinatenebene X′OX″ läuft, die andere dagegen senkrecht auf der Axe OX steht, so liefern die Puncte O_1 und O′ einerlei schiefe, die O_2 und O′ einerlei senkrechte Coordinaten an der Axe OX, und sind x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die schiefen und senkrechten Coordinaten des Punctes O_1, x_2, x'_2, x''_2 und u_2, u'_2, u''_2 die des Punctes O_2 an den Axen OX, OX′, OX″, so liefern die Gleichungen (157. b.), weil $x_1 = x_0$ und $u_2 = u_0$ ist:

(157. c.) $$x'_1 = \partial\xi' x_0, \quad x''_1 = \partial\xi'' x_0 \quad \text{und} \quad u'_2 = \partial\eta' u_0, \quad u''_2 = \partial\eta'' u_0,$$

wenn x_0 und u_0 die zur Axe OX gehörige schiefe und senkrechte Coordinate des Punctes O′ vorstellt. Trägt man die Gleichungen (128. a.) auf das neue Coordinatensystem über, und wendet man sodann die in erster Zeile stehenden auf den Punct O_1, die in zweiter Zeile stehenden auf den Punct O_2 an, so erhält man:

$$u_1 = x_1 + x'_1 \cos W + x''_1 \cos W', \quad u'_1 = x_1 \cos W + x'_1 + x''_1 \cos W'', \quad u''_1 = x_1 \cos W' + x'_1 \cos W'' + x''_1$$

und

$$\mathfrak{C} x_2 = \mathfrak{A} u_2 + \mathfrak{A}' u'_2 + \mathfrak{A}'' u''_2, \quad \mathfrak{C}'_1 x'_2 = \mathfrak{A}_1 u_2 + \mathfrak{A}'_1 u'_2 + \mathfrak{A}''_1 u''_2, \quad \mathfrak{C}''_2 x''_2 = \mathfrak{A}_2 u_2 + \mathfrak{A}'_2 u'_2 + \mathfrak{A}''_2 u''_2$$

oder, wenn man für x'_1, x''_1 und u'_2, u''_2 ihre durch die Gleichungen (157. c.) gegebenen Werthe so wie auch x_0 für x_1 und u_0 für u_2 setzt:

$$u_1 = x_0(1 + \partial\xi' \cos W + \partial\xi'' \cos W'), \quad u_1' = x_0(\cos W + \partial\xi + \partial\xi'' \cos W''),$$
$$u_1'' = x_0(\cos W' + \partial\xi' \cos W'' + \partial\xi'')$$

und

$$\mathfrak{E}\,x_2 = u_0(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'\partial\eta' + \mathfrak{A}''\partial\eta''), \quad \mathfrak{E}_1'x_2' = u_0(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1'\partial\eta' + \mathfrak{A}_1''\partial\eta''),$$
$$\mathfrak{E}_2''x_2'' = u_0(\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_2'\partial\eta' + \mathfrak{A}_2''\partial\eta''),$$

welche mittelst der auf den Punct O übergetragenen Gleichungen (128. b.) werden:

$$u_1 = x_0\,\delta\eta, \quad u_1' = x_0\,\delta\eta', \quad u_1'' = x_0\,\delta\eta'' \quad \text{und} \quad x_2 = u_0\,\delta\xi, \quad x_2' = u_0\,\delta\xi', \quad x_2'' = u_0\,\delta\xi''. \qquad \textbf{(157. d.)}$$

Aus den Coordinaten der Puncte O_1 und O_2 lassen sich nun deren Entfernungen von der Coordinatenspitze O entnehmen, es ist nämlich der im ersten Abschnitte gegebenen Gleichung (17.) zur Folge:

$$(O\,O_1)^2 = x_1 u_1 + x_1' u_1' + x_1'' u_1'' = x_0^2(\delta\eta + \partial\xi'\,\delta\eta' + \partial\xi''\,\delta\eta'')$$

und

$$(O\,O_2)^2 = x_2 u_2 + x_2' u_2' + x_2'' u_2'' = u_0^2(\delta\xi + \partial\eta'\,\delta\xi' + \partial\eta''\,\delta\xi''),$$

woraus man findet:

$$O\,O_1 = x_0(\delta\eta + \partial\xi'\,\delta\eta' + \partial\xi''\,\delta\eta'')^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad O\,O_2 = u_0(\delta\xi + \partial\eta'\,\delta\xi' + \partial\eta''\,\delta\xi'')^{\frac{1}{2}}. \qquad \textbf{(157. e.)}$$

Denkt man sich jetzt den Punct O′ dem O stets nähernd bis sich zuletzt der Abstand beider von einander durch kein endliches Maass mehr angeben lässt, und diess dasselbe dann nothwendig auch die Grössen x_0 und u_0 trifft, so werden die spätern Glieder in den Reihen (157. a.), wodurch das Curvenstück O O′ dargestellt wird, unvergleichlich kleiner als die frühern, und da sich unter den gleichen Umständen die Länge des durch diese Reihen dargestellten Curvenstücks O O′ von den Längen der Tangentenstücke $O\,O_1$ oder $O\,O_2$, welche in den Gleichungen (157. e.) enthalten sind, um keine Grösse unterscheidet, die mit diesen Längen selbst vergleichbar wäre, wie aus den in Nr. 164. besprochenen Eigenschaften der Tangente an einer Stelle der unebenen Curve hervorgeht, so hat man den in §. 12. dieses Abschnitts niedergelegten Satze (40. a. und b.) gemäss:

$$\partial\mathfrak{L}_\xi = (\delta\eta + \partial\xi'\,\delta\eta' + \partial\xi''\,\delta\eta'')^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \partial\mathfrak{L}_\eta = (\delta\xi + \partial\eta'\,\delta\xi' + \partial\eta''\,\delta\xi'')^{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{(158. a.)}$$

oder weil der hervorgehobene Punct O jeder Punct der Curve sein kann, falls derselbe nur ohne Bewegung gedacht wird, so kann man an die Stelle der bestimmten Coordinaten ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' auch die unbestimmten x, x′, x″ und u, u′, u″ setzen, wodurch dann die vorstehenden Gleichungen die andere Form annehmen:

$$\partial\mathfrak{L}_x = (\delta u + \partial x'\,\delta u' + \partial x''\,\delta u'')^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \partial\mathfrak{L}_u = (\delta x + \partial u'\,\delta x' + \partial u''\,\delta x'')^{\frac{1}{2}}. \qquad \textbf{(158. b.)}$$

Aus diesen Gleichungen, welche die Ableitungen der gesuchten Curvenlängen an die Hand geben, hat man rückwärts durch Integration nach x oder u die beiden Functionen $\mathfrak{L}_x$ oder $\mathfrak{L}_u$ selbst aufzufinden. Hierbei hat man alle in den Klammern der vordern Gleichung stehenden Theile als Functionen von x, alle in den Klammern der hintern Gleichung stehenden Theile als Functionen von u darzustellen, welches sich stets mit Hilfe der gegebenen Gleichungspaare und der in Nr. 160. angezeigten Relationen bewerkstelligen lässt. Bei diesem Geschäfte sind wieder alle jene Rücksichten zu nehmen, welche oben bei der Längenbestimmung von ebenen Curven angegeben worden sind.

Will man die Länge $\mathfrak{L}$ der unebenen Curve nicht als Function von einer der Coordinaten x oder u ihres beweglichen Endpunctes O′ finden, sondern als Function von irgend einer andern Unabhängigen, wodurch diese Coordinaten selber erst bestimmt werden, und bezeichnet man die Ableitung dieser neuen Function durch $d\mathfrak{L}$, so ist nach den in §. 12. Nr. 118. angeführten Gesetzen der Ableitungsrechnung

$$d\mathfrak{L} = \partial\mathfrak{L}_x\, dx = \partial\mathfrak{L}_u\, du$$

oder wenn man für $\partial\mathfrak{L}_x$ und $\partial\mathfrak{L}_u$ ihre in den Gleichungen (158. b.) stehenden Ausdrücke setzt:

$$d\mathfrak{L} = dx\,(\delta u + \partial x'\,\delta u' + \partial x''\,\delta u'')^{\frac{1}{2}} = du\,(\delta x + \partial u'\,\delta x' + \partial u''\,\delta x'')^{\frac{1}{2}},$$

wobei das vor x und u stehende Ableitungszeichen d sich auf dieselbe neue Veränderliche bezieht. Setzt man in dieser Gleichung anstatt der durch das Zeichen ∂ und δ angezeigten Ableitungen die nach der neuen Unabhängigen genommen, welche durch das Zeichen d vorgestellt werden, welches mittelst der a. a. O. niedergelegten Relationen stets geschehen kann, vermöge welcher

$$\partial x' = \frac{dx'}{dx},\quad \partial x'' = \frac{dx''}{dx} \quad \text{und} \quad \delta u = \frac{du}{dx},\quad \delta u' = \frac{du'}{dx},\quad \delta u'' = \frac{du''}{dx}$$

oder

$$\partial u' = \frac{du'}{du},\quad \partial u'' = \frac{du''}{du} \quad \text{und} \quad \delta x = \frac{dx}{du},\quad \delta x' = \frac{dx'}{du},\quad \delta x'' = \frac{dx''}{du}$$

ist, so findet man in dem einen wie in dem andern Falle:

(158. c.) $$d\mathfrak{L} = (dx\,du + dx'\,du' + dx''\,du'')^{\frac{1}{2}},$$

eine Gleichung, die sich durch ihre vollkommene Symmetrie auszeichnet.

Man kann den Gleichungen (158. b.) und (158. c.) eine Gestalt geben, wobei sich ihr gemeinsamer Character besser herausstellt, wenn man die erstern so:

(158. d.) $$\partial\mathfrak{L}_x = \delta u^{\frac{1}{2}}(1 + \partial x'\,\partial u' + \partial x''\,\partial u'')^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \partial\mathfrak{L}_u = \delta x^{\frac{1}{2}}(1 + \partial x'\,\partial u' + \partial x''\,\partial u'')^{\frac{1}{2}},$$

die andere so:

(158. e.) $$d\mathfrak{L} = dx^{\frac{1}{2}}\,du^{\frac{1}{2}}(1 + \partial x'\,\partial u' + \partial x''\,\partial u'')^{\frac{1}{2}}$$

schreibt. Diese letztern Gleichungen gestatten auch eine Darstellung der verschiedenen Ableitungen von $\mathfrak{L}$, welche blos die Functionen φ und ψ als bekannt voraussetzt, wie ein Hinblick auf die im Paragraph 12. dieses Abschnitts mitgetheilten Gleichungen (158. b.) oder (158. c.) sogleich wahrnehmen lässt.

175) Die unmittelbar vor (158. c.) mitgetheilten Relationen setzen in den Stand, alle in diesem Paragraphen unter der Voraussetzung erhaltenen Resultate, dass x oder u zur unabhängig Veränderlichen genommen wird, in andere überzutragen, die gültig bleiben, was auch die unabhängig Veränderliche sein mag. Kommen in den umzuformenden Ausdrücken höhere Ableitungen, nach x oder u genommen, vor, so gelangt man zu den für sie zu setzenden Werthen, wenn man die vor (158. c.) stehenden Gleichungen noch Einmal oder mehrere Male nach der neuen unbestimmt gelassenen Unabhängigen ableitet, wie schon im Paragraph 12.

(Nr. 118.) gezeigt worden ist. So ergeben sich nach einmaligen Ableiten die zweiten Ableitungen wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\partial^2 x' = \frac{dx\,d^2x' - dx'\,d^2x}{dx^3}, \quad \partial^2 x'' = \frac{dx\,d^2x'' - dx''\,d^2x}{dx^3},\\
&\partial^2 u = \frac{dx\,d^2u - du\,d^2x}{dx^3}, \quad \partial^2 u' = \frac{dx\,d^2u' - du'\,d^2x}{dx^3}, \quad \partial^2 u'' = \frac{dx\,d^2u'' - du''\,d^2x}{dx^3}\\
&\text{und}\\
&\partial^2 u' = \frac{du\,d^2u' - du'\,d^2u}{du^3}, \quad \partial^2 u'' = \frac{du\,d^2u'' - du''\,d^2u}{du^3},\\
&\partial^2 x = \frac{du\,d^2x - dx\,d^2u}{du^3}, \quad \partial^2 x' = \frac{du\,d^2x' - dx'\,d^2u}{du^3}, \quad \partial^2 x'' = \frac{du\,d^2x'' - dx''\,d^2u}{du^3}.
\end{aligned}\right\}\ldots \text{(159. a.)}$$

Wendet man die Gleichungen vor (158. c.) und die (159. a.) auf den Punct O an, indem man ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' an die Stelle von x, x', x'' und u, u', u'' setzt, so erhält man mittelst der so für $\partial\xi'$, $\partial\xi''$, $\partial^2\xi'$, $\partial^2\xi''$ und $\partial\eta'$, $\partial\eta''$, $\partial^2\eta'$, $\partial^2\eta''$ sich ergebenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
&1 + \partial\xi'\,\partial\eta' + \partial\xi''\,\partial\eta'' = \frac{d\xi\,d\eta + d\xi'\,d\eta' + d\xi''\,d\eta''}{d\xi\,d\eta},\\
&\partial\xi'\,\partial^2\xi'' - \partial\xi''\,\partial^2\xi' = \frac{d\xi'\,d^2\xi'' - d\xi''\,d^2\xi'}{d\xi^3}\\
&\partial\eta'\,\partial^2\eta'' - \partial\eta''\,\partial^2\eta' = \frac{d\eta'\,d^2\eta'' - d\eta''\,d^2\eta'}{d\eta^3}
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots \text{(159. b.)}$$

und nun liefert die Gleichung (154. g.) auf der Stelle:

$$\varrho_0^2 = \frac{(d\xi d\eta + d\xi' d\eta' + d\xi'' d\eta'')^3}{(d\xi' d^2\xi'' - d\xi'' d^2\xi')(d\eta' d^2\eta'' - d\eta'' d^2\eta') + (d\xi d^2\xi'' - d\xi'' d^2\xi)(d\eta d^2\eta'' - d\eta'' d^2\eta) + (d\xi d^2\xi' - d\xi' d^2\xi)(d\eta d^2\eta' - d\eta' d^2\eta)}, \quad \text{(159. c.)}$$

welche den zur Stelle O gehörigen Krümmungshalbmesser liefert. Die Gleichungen (154. d.) gehen durch die gleichen Substitutionen über in:

$$\left.\begin{aligned}
&C_{00} : C'_{00} : C''_{00} = d\xi'\,d^2\xi'' - d\xi''\,d^2\xi' : d\xi''\,d^2\xi - d\xi\,d^2\xi'' : d\xi\,d^2\xi' - d\xi'\,d^2\xi''\\
&\text{und}\\
&A_{00} : A'_{00} : A''_{00} = d\eta'\,d^2\eta'' - d\eta''\,d^2\eta' : d\eta''\,d^2\eta - d\eta\,d^2\eta'' : d\eta\,d^2\eta' - d\eta'\,d^2\eta'',
\end{aligned}\right\}\ldots \text{(159. d.)}$$

wodurch die Richtung des in O sich endigenden unendlich grossen Biegungshalbmessers gegeben wird, und da dieser senkrecht auf der Krümmungsebene der Curve bei O steht, so ist damit zugleich auch die Lage dieser Krümmungsebene gegeben, deren Gleichung man aus der (154. e.) durch die angezeigten Substitutionen wie folgt erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&(d\xi' d^2\xi'' - d\xi'' d^2\xi')(x - \xi) + (d\xi'' d^2\xi - d\xi\, d^2\xi'')(x' - \xi') + (d\xi\, d^2\xi' - d\xi' d^2\xi)(x'' - \xi'') = 0\\
&\text{oder}\\
&(d\eta' d^2\eta'' - d\eta'' d^2\eta')(u - \eta) + (d\eta'' d^2\eta - d\eta\, d^2\eta'')(u' - \eta') + (d\eta\, d^2\eta' - d\eta' d^2\eta)(u'' - \eta'') = 0.
\end{aligned}\right\} \text{(159. e.)}$$

Es verdient hier noch der Umstand erwähnt zu werden, dass sich die Gleichung (159. c.) in denselben einfachen Formen darstellen lässt, welche oben in den Gleichungen (151. f.) und

(351. g.) vorgekommen sind; man kann nämlich den Nenner des auf ihrer rechten Seite stehenden Quotienten auch so schreiben:

$$(d\xi d\eta + d\xi' d\eta' + d\xi'' d\eta'')(d^2\xi d^2\eta + d^2\xi' d^2\eta' + d^2\xi'' d^2\eta'')$$
$$- (d\xi d^2\eta + d\xi' d^2\eta' + d\xi'' d^2\eta'')(d\eta d^2\xi + d\eta' d^2\xi' + d\eta'' d^2\xi'').$$

Setzt man nun

(160. a.) $$dx\,du + dx'\,du' + dx''\,du'' = \chi$$

und sieht dx, dx', dx'' in χ als Functionen von einer nicht weiter bestimmten Veränderlichen z, du, du', du'' hingegen als Functionen von einer andern unbestimmten und mit der z in keinen Zusammenhang gebrachten Veränderlichen s an, wodurch man sich χ als Function der beiden von einander unabhängigen Veränderlichen z und s vorstellt, welche wir durch $\chi_{z,s}$ bezeichnen werden, so erhält man aus der vorstehenden Gleichung, wenn man sie nach diesen Veränderlichen ableitet, und dazu das Ableitungszeichen d gebraucht:

(160. b.) $$\left\{\begin{aligned} \overset{10}{d}\chi_{z,s} &= d^2x\,d\,u + d^2x'\,d\,u' + d^2x''\,d\,u'', \\ \overset{01}{d}\chi_{z,s} &= d\,x\,d^2u + d\,x'\,d^2u' + d\,x''\,d^2u'', \\ \overset{11}{d}\chi_{z,s} &= d^2x\,d^2u + d^2x'\,d^2u' + d^2x''\,d^2u'', \end{aligned}\right.$$

wobei es durchaus nichts zu sagen hat, dass das Zeichen d in den zweiten Ableitungen der Coordinaten in einer doppelten Bedeutung gebraucht worden ist, weil die zweite Bedeutung, nachdem in ihrem Sinne die Rechnung durchgeführt worden ist, wieder in die erste übergeht. Setzt man in diesen Ausdrücken ξ, ξ', ξ'' und η, η', η'' für x, x', x'' und u, u', u'', so werden sie

(160. c.) $$\left\{\begin{aligned} \chi_{z,s} &= d\,\xi\,d\,\eta + d\,\xi'\,d\,\eta' + d\,\xi''\,d\,\eta'', \\ \overset{10}{d}\chi_{z,s} &= d^2\xi\,d\,\eta + d^2\xi'\,d\,\eta' + d^2\xi''\,d\,\eta'', \\ \overset{01}{d}\chi_{z,s} &= d\,\xi\,d^2\eta + d\,\xi'\,d^2\eta' + d\,\xi''\,d^2\eta'', \\ \overset{11}{d}\chi_{z,s} &= d^2\xi\,d^2\eta + d^2\xi'\,d^2\eta' + d^2\xi''\,d^2\eta'', \end{aligned}\right.$$

in welchen man sich unter z und s die besondern Werthe zu denken hat, welche diesen Grössen am Puncte O zukommen. Mittelst dieser Ausdrücke lässt sich nun der umgewandelte Nenner so schreiben:

$$\chi_{z,s}\,\overset{11}{d}\chi_{z,s} - \overset{10}{d}\chi_{z,s}\,\overset{01}{d}\chi_{z,s},$$

und nun nimmt die Gleichung (159. c.) die nachstehende Form an

(160. d.) $$\varrho_0^2 = \frac{(\chi_{z,s})^3}{\chi_{z,s}\,\overset{11}{d}\chi_{z,s} - \overset{10}{d}\chi_{z,s}\,\overset{01}{d}\chi_{z,s}}$$

welche man in gleicher Weise wie oben bei der (151. g.) geschehen ist, auch in die andere Gestalt überführen kann:

$$\varrho_0^2 = \frac{\chi_{z,s}}{\overset{11}{d}(\mathrm{Log}\,\chi_{z,s})}, \qquad \textbf{(160. e.)}$$

wobei man immer unter z und s ihre dem Puncte O zukommenden besondern Werthe sich zu denken hat. Will man die Ursache, warum die Gleichungen (151. f.) und (160. d.) völlig einerlei Formen haben, noch besonders einsehen, so kann diess in der folgenden Weise geschehen. Aus den Gleichungen vor (158. c.) geht hervor, dass

$$1 + \partial x' \partial u' + \partial x'' \partial u'' = \frac{dx\,du + dx'\,du' + dx''\,du''}{dx\,du}$$

oder

$$\chi_{x,u} = \frac{\chi_{z,s}}{dx\,du} \qquad \textbf{(161. a.)}$$

ist, und hieraus findet man durch successives Ableiten nach z und s

$$\overset{10}{\partial}\chi_{x,u} = \frac{dx\,\overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2x\,\chi_{z,s}}{dx^3\,du}, \quad \overset{01}{\partial}\chi_{x,u} = \frac{du\,\overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2u\,\chi_{z,s}}{du^3\,dx}$$

und

$$\overset{11}{\partial}\chi_{x,u} = \frac{du\,dx\,\overset{11}{d}\chi_{z,s} - du\,d^2x\,\overset{01}{d}\chi_{z,s} - dx\,d^2u\,\overset{10}{d}\chi_{z,s} + d^2x\,d^2u\,\chi_{z,s}}{dx^3\,du^3}, \qquad \textbf{(161. b.)}$$

woraus folgt:

$$\chi_{x,u}\overset{11}{\partial}\chi_{x,u} - \overset{10}{\partial}\chi_{x,u}\overset{01}{\partial}\chi_{x,u} = \frac{\chi_{z,s}\overset{11}{d}\chi_{z,s} - \overset{10}{d}\chi_{z,s}\overset{01}{d}\chi_{z,s}}{dx^3\,du^3}; \qquad \textbf{(161. c.)}$$

diese Gleichung aber mit der (161. a.) verbunden zeigt, dass

$$\frac{(\chi_{x,u})^3}{\chi_{x,u}\overset{11}{\partial}\chi_{x,u} - \overset{10}{\partial}\chi_{x,u}\overset{01}{\partial}\chi_{x,u}} = \frac{(\chi_{z,s})^3}{\chi_{z,s}\overset{11}{d}\chi_{z,s} - \overset{10}{d}\chi_{z,s}\overset{01}{d}\chi_{z,s}} \qquad \textbf{(161. d.)}$$

ist, wie auch die Gleichungen (151. f.) und (160. d.) aussagen.

Die vorstehenden Relationen (161. a. und b.) liefern ferner, weil $dx = \partial x\,du$ und $du = \partial u\,dx$ ist:

$$\frac{\partial x}{(\chi_{x,u})^2} = \frac{dx^3\,du}{(\chi_{z,s})^2}, \qquad \frac{\partial u}{(\chi_{x,u})^2} = \frac{du^3\,dx}{(\chi_{z,s})^2},$$

$$\frac{\partial x\,\overset{10}{\partial}\chi_{x,u}}{(\chi_{x,u})^2} = \frac{dx\,\overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2x\,\chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, \qquad \frac{\partial u\,\overset{01}{\partial}\chi_{x,u}}{(\chi_{x,u})^2} = \frac{du\,\overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2u\,\chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2},$$

$$\partial x'\,\overset{10}{\partial}\chi_{x,u} - \partial^2 x'\,\chi_{x,u} = \frac{dx'\,\overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2x'\,\chi_{z,s}}{dx^3\,du},$$

$$\partial u'\,\overset{01}{\partial}\chi_{x,u} - \partial^2 u'\,\chi_{x,u} = \frac{du'\,\overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2u'\,\chi_{z,s}}{du^3\,dx},$$

$$\partial x'' \overset{10}{\partial} \chi_{x,u} - \partial^2 x'' \chi_{x,u} = \frac{d x'' \overset{10}{d} \chi_{z,s} - d^2 x'' \chi_{z,s}}{d x^3 d u},$$

$$\partial u'' \overset{01}{\partial} \chi_{x,u} - \partial^2 u'' \chi_{x,u} = \frac{d u'' \overset{01}{d} \chi_{z,s} - d^2 u'' \chi_{z,s}}{d u^3 d x},$$

und mittelst dieser auf den Punct O angewandten Uebertragungen verwandeln sich die Gleichungen (152. c. und d.) in:

(161. e.)
$$\begin{cases} \frac{A_0}{\varrho_0} = \frac{d\xi \overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2\xi\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, & \frac{C_0}{\varrho_0} = \frac{d\eta \overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2\eta\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, \\ \frac{A'_0}{\varrho_0} = \frac{d\xi' \overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2\xi'\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, & \frac{C'_0}{\varrho_0} = \frac{d\eta' \overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2\eta'\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, \\ \frac{A''_0}{\varrho_0} = \frac{d\xi'' \overset{10}{d}\chi_{z,s} - d^2\xi''\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, & \frac{C''_0}{\varrho_0} = \frac{d\eta'' \overset{01}{d}\chi_{z,s} - d^2\eta''\ \chi_{z,s}}{(\chi_{z,s})^2}, \end{cases}$$

welchen man auch die folgende sehr einfache Gestalt geben kann:

(161. f.)
$$\begin{cases} \frac{A_0}{\varrho_0} = -\overset{10}{d}\left(\frac{d\xi}{\chi_{z,s}}\right), \quad \frac{A'_0}{\varrho_0} = -\overset{10}{d}\left(\frac{d\xi'}{\chi_{z,s}}\right), \quad \frac{A''_0}{\varrho_0} = -\overset{10}{d}\left(\frac{d\xi''}{\chi_{z,s}}\right) \\ \text{und} \\ \frac{C_0}{\varrho_0} = -\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta}{\chi_{z,s}}\right), \quad \frac{C'_0}{\varrho_0} = -\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta'}{\chi_{z,s}}\right), \quad \frac{C''_0}{\varrho_0} = -\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta''}{\chi_{z,s}}\right), \end{cases}$$

in welchen sämmtlich man unter z, s ihre dem Puncte O zukommenden besondern Werthe sich vorzustellen hat. Die Projectionszahlen A_0, A'_0, A''_0 und C_0, C'_0, C''_0 gehören dem in O sich endigenden Krümmungshalbmesser an, und aus ihnen lassen sich durch Multiplication mit ϱ_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten des Krümmungsmittelpunctes finden. Multiplicirt man die unter einander stehenden Gleichungen (161. f.) und addirt die drei sich so ergebenden Resultate zu einander, so erhält man, weil $A_0 C_0 + A'_0 C'_0 + A''_0 C''_0 = 1$ ist

(161. g.)
$$\frac{1}{\varrho_0^2} = \overset{10}{d}\left(\frac{d\xi}{\chi_{z,s}}\right)\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta}{\chi_{z,s}}\right) + \overset{10}{d}\left(\frac{d\xi'}{\chi_{z,s}}\right)\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta'}{\chi_{z,s}}\right) + \overset{10}{d}\left(\frac{d\xi''}{\chi_{z,s}}\right)\overset{01}{d}\left(\frac{d\eta''}{\chi_{z,s}}\right).$$

176) Alle in der vorigen Nummer enthaltenen Ausdrücke besitzen neben ihrer nirgends unterbrochenen Symmetrie noch den grossen Vortheil, dass man in ihnen was man will zur unabhängig Veränderlichen machen darf. Wir wollen hier noch zum Beschlusse der über die unebene Curve angestellten Untersuchungen die Formen aufstellen, in welchen sich die Länge und Richtung des Krümmungshalbmessers ausspricht, wenn man die Länge der unebenen Curve von einer völlig bestimmten, wiewohl an sich beliebigen Stelle aus bis zu der hervorgehobenen Stelle hin zur unabhängig Veränderlichen nimmt. In diesem Falle ist die unabhängig Ver-

änderliche dieselbe Grösse, welche in Nr. 174. durch $\mathfrak{L}$ bezeichnet worden ist, und in Bezug auf welche der Gleichung (158. c.) zur Folge

$$d\mathfrak{L} = (dx\,du + dx'\,du' + dx''\,du'')^{\frac{1}{2}}$$

ist. Wird nun $\mathfrak{L}$ zur Unabhängigen genommen, so ist $d\mathfrak{L} = 1$ oder

$$(dx\,du + dx'\,du' + dx''\,du'')^{\frac{1}{2}} = 1\,, \qquad \textbf{(162. a.)}$$

und wird diese Gleichung nach der gewählten unabhängig Veränderlichen abgeleitet, so erhält man:

$$d^2x\,du + d^2x'\,du' + d^2x''\,du'' + dx\,d^2u + dx'\,d^2u' + dx''\,d^2u'' = 0\,,$$

welche Gleichung in Gemässheit der in Nr. 160. gegebenen (129. f.) in die zwei andern zerfällt:

$$d^2x\,du + d^2x'\,du' + d^2x''\,du'' = 0\,, \quad dx\,d^2u + dx'\,d^2u' + dx''\,d^2u'' = 0\,. \qquad \textbf{(162. b.)}$$

Die Gleichungen (162. a.) und (162. b.) zeigen, dass bei der hier gewählten unabhängig Veränderlichen

$$\chi_{z,s} = 1 \quad \text{und} \quad \overset{10}{d}\chi_{z,s} = 0 \quad \text{so wie} \quad \overset{01}{d}\chi_{z,s} = 0$$

wird, weshalb die Gleichung (160. d.)

$$\varrho_0^2 = \frac{1}{\overset{11}{d}\chi_{z,s}}$$

giebt, oder, wenn man für $\overset{11}{d}\chi_{z,s}$ seinen in der letzten Gleichung (160. c.) angegebenen Ausdruck setzt:

$$\varrho_0^2 = \frac{1}{d^2\xi\,d^2\eta + d^2\xi'\,d^2\eta' + d^2\xi''\,d^2\eta''}\,. \qquad \textbf{(162. c.)}$$

Aus dem gleichen Grunde verwandeln sich bei der hier angenommenen Unabhängigen die Gleichungen (161. f.) in:

$$\frac{A_0}{\varrho_0} = -d^2\xi\,,\quad \frac{A_0'}{\varrho_0} = -d^2\xi'\,,\quad \frac{A_0''}{\varrho_0} = -d^2\xi'' \quad \text{und} \quad \frac{C_0}{\varrho_0} = -d^2\eta\,,\quad \frac{C_0'}{\varrho_0} = -d^2\xi'\,,\quad \frac{C_0''}{\varrho_0} = -d^2\eta''\,, \qquad \textbf{(162. d.)}$$

welche Ausdrücke sich sämmtlich durch ihre grosse Einfachheit vor allen übrigen hervorthun.

Vierter Abschnitt.

Von den verschiedenen Gestalten der Gleichungen, in denen die krummen Linien oder Flächen der zweiten Ordnung an verschiedenen Coordinatensystemen sich darstellen lassen.

§. 16.

Von den ebenen Curven der zweiten Ordnung.

177) Beim Uebertragen der Puncte aus einem ebenen Systeme in ein anderes derselben Ebene angehöriges finden die im ersten Abschnitte §. 5. aufgestellten Gleichungen ihre Anwendung, von denen wir die folgenden zur Bequemlichkeit der Hinweisungen hier anschreiben wollen:

(1. a.) $x = A\,y + A_1\,y'$, $x' = A'y + A'_1\,y'$ und $\mathfrak{C}\,x = (B)\,v + (B')\,v'$, $\mathfrak{C}'_1\,x' = (B_1)\,v + (B'_1)\,v'$

und

(1. b.) $u = C\,y + C_1\,y'$, $u' = C'y + C'_1\,y'$ und $u = B\,v + B'v'$, $u' = B_1\,v + B'_1\,v'$.

Die einen können zur Uebertragung der schiefen, die andern zur Uebertragung der senkrechten Coordinaten entweder in schiefe oder in senkrechte benützt werden. Man kann den beiden hintern in (1. a.) und in (1. b.) stehenden Gleichungen eine etwas abgeänderte Gestalt geben, wodurch sie den vordern ähnlicher werden; setzt man nämlich in die einen für die Projectionszahlen mit dem Grundzeichen (B) die mit den Grundzeichen (A) aus den im ersten Abschnitte mitgetheilten und, wenn man $x'' = v'' = u'' = 0$ setzt auch im ebenen Systeme gültigen Gleichungen (87.) ein, und in die andern statt der Projectionszahlen mit dem Grundzeichen B die mit dem Grundzeichen (Γ) aus denselben Gleichungen, so gehen sie über in:

(1. c.) $x = \frac{(A)}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{(A_1)}{\mathfrak{D}'_1}\,v'$, $x' = \frac{(A')}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{(A'_1)}{\mathfrak{D}'_1}\,v'$ und $u = \frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}'_1}\,v'$, $u' = \frac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{(\Gamma'_1)}{\mathfrak{D}'_1}\,v'$.

In diesen Gleichungen bedeuten, wie immer, A, A′ und C, C′ die schiefen und senkrechten Projectionszahlen, welche die Axe AY des neu eingeführten ebenen Systems an den Axen AX, AX′ des ursprünglichen Systems giebt, und eben so A_1, A'_1 und C_1, C'_1 die der Axe AY′ an den Axen AX, AX′; ferner stellen (A), (A') und (Γ), (Γ') oder (A_1), (A'_1) und (Γ_1), (Γ'_1) die schiefen und senkrechten Projectionszahlen der neuen Polaraxen A𝔜 und A𝔜′ an den gleichen Axen AX, AX′ vor, und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'_1$ sind die Kosinuse der Winkel, welche die Axen AY und A𝔜, AY′ und A𝔜′ mit einander machen.

Die vorstehenden Gleichungen (1. a. bis c.) geben in allgemeinster Weise die Beziehungen zu erkennen, welche zwischen den Coordinaten von einem und demselben Puncte an zweierlei ebenen Systemen mit einerlei Spitze, (oder an zwei körperlichen Systemen, deren dritte auf den zwei andern senkrechte Axen man sich in einanderliegend zu denken hat) statt finden; man kann indessen diesen Correlationsformeln dadurch, dass man einer Axe des neu einzu-

führenden Systems eine besondere Lage vorschreibt, noch allerhand andere besondere Gestalten geben. So nehmen die zwei vordern Gleichungen (1. a.), wenn man die Axe A Y′ mit der A X′ zusammenfallen lässt, weil dann

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_1' = 1$$

wird, die folgende Gestalt an:

$$x = A\,y \quad \text{und} \quad x' = A'y + y' \tag{2. a.}$$

und ähnlich nehmen die zwei vordern Gleichungen (1. c.) wenn man die Polaraxe A 𝔜′ mit der Grundaxe A X′ zusammenfallen lässt, weil dann

$$(A_1) = 0 \quad \text{und} \quad (A_1') = 1$$

wird, die folgende Gestalt an:

$$x = \frac{(A)}{\mathfrak{D}}\,v \quad \text{und} \quad x' = \frac{(A')}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{1}{\mathfrak{D}_1}\,v'. \tag{2. b.}$$

Eben so verwandeln sich die zwei vordern Gleichungen (1. b.), wenn man die Axe A Y′ mit der Polaraxe A 𝔛′ zusammen fallen lässt, weil dann

$$C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_1' = \mathfrak{C}_1'$$

wird, in:

$$u = C\,y \quad \text{und} \quad u' = C'y + \mathfrak{C}_1'\,y' \tag{2. c.}$$

und ähnlich verwandeln sich die zwei hintern Gleichungen (1. c.), wenn man die Polaraxe A 𝔜′ mit der Polaraxe A 𝔛′ zusammen fallen lässt, weil dann

$$(\Gamma_1) = 0 \quad \text{und} \quad (\Gamma_1') = \mathfrak{C}_1'$$

wird, in:

$$u = \frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}}\,v \quad \text{und} \quad u' = \frac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}}\,v + \frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{D}_1}\,v'; \tag{2. d.}$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{C}_1'$ den Kosinus des Winkels, welchen die zwei Axen A X′ und A 𝔛′ mit einander machen. Diese besondern Gleichungen haben wir aus der grossen Anzahl aller möglichen hervorgehoben, weil wir von ihnen bald Gebrauch zu machen vorhaben.

178) Ist eine ebene Curve in schiefen Coordinaten durch eine Gleichung von der Form:

$$\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + 2\beta x x' = \mu + 2\gamma x + 2\gamma' x', \tag{3. a.}$$

oder in senkrechten Coordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\delta u^2 + \delta' u'^2 + 2\varepsilon u u' = \nu + 2\zeta u + 2\zeta' u' \tag{3. b.}$$

gegeben, worin x, x′ die schiefen oder u, u′ die senkrechten Coordinaten der Curvenpuncte an den Axen A X, A X′ eines beliebigen ebenen Systems vorstellen, alle übrigen Buchstaben dagegen beliebige endliche reelle, positive oder negative Zahlen, die zum grössten Theil auch null sein können, bedeuten, so wird das durch eine solche Gleichung dargestellte Gebilde eine **ebene Curve zweiter Ordnung** genannt, aus dem Grunde, weil die Gleichung einen ganzen Ausdruck in sich aufnimmt, der in Bezug auf die beiden Coordinaten vom zweiten Grade ist. In allen auf den linken Seiten stehenden Gliedern dieser Gleichungen treten die Coordinaten zweimal hinter einander als doppelter Factor auf, weswegen wir sie, in ihrer Verbindung aufgefasst, den **Theil der zweiten Dimension der Gleichung** nennen werden; auf der

rechten Seite dieser Gleichungen hingegen kommt ein Glied vor, das gar keine Coordinate in sich enthält, und das wir aus diesem Grunde das constante Glied der Gleichung nennen wollen, aber ausserdem stehen auf dieser Seite nur noch Glieder, in welchen eine der Coordinaten als einfacher Factor auftritt, die wir in ihrer Verbindung aufgefasst den Theil der ersten Dimension der Gleichung nennen werden. Ist man willens die ebene Curve, welche durch eine Gleichung von der in (3. a.) oder (3. b.) niedergelegten Form an den Axen AX, AX′ eines ebenen Systems dargestellt wird, an den Axen AY, AY′ eines neu einzuführenden ebenen Systems mit derselben Spitze und derselben Ebene angehörig darzustellen, so darf man nur in die gegebene Gleichung für x, x′ oder u, u′ ihre in den Gleichungen (1. a. bis c.) gegebenen Werthe einsetzen, um die Gleichung zwischen den Coordinaten y, y′ oder v, v′ derselben Curve an den neuen Axen zu erhalten, wobei man allen Zeichen die ihnen dort zukommende Bedeutung bewahren muss. In dem Falle wo einer Axe des neu einzuführenden Systems eine besondere Lage vorgeschrieben wird, hat man anstatt jener allgemeinen Gleichungen besondere zu nehmen, wie die (2. a. bis d.) sind; weil aber alle solche Uebertragungsformeln, so lange die beiden ebenen Systeme eine gemeinschaftliche Spitze haben, immer homogene Gleichungen des ersten Grades bleiben, so giebt bei jeder möglichen solchen Uebertragung der Theil von einer bestimmten Dimension immer wieder einen Theil von der gleichen Dimension in der neu gebildeten Gleichung her, und das constante Glied bleibt in der gegebenen und in der aus ihr abgeleiteten Gleichung unausgesetzt das gleiche.

Wenn man aber die ebene Curve der zweiten Ordnung an einem andern in der gleichen Ebene gewählten Coordinatensystem darstellen will, das eine andere Spitze O hat, deren schiefe und senkrechte Coordinaten an den Axen AX, AX′ durch ξ, ξ' und η, η' vorgestellt werden, und dessen Axen den vorigen parallel und gleichläufig gedacht werden, wesshalb wir sie durch OX und OX′ vorstellen werden, so hat man, wenn x_0, x'_0 und u_0, u'_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten der Curvenpuncte an diesen neuen Axen bezeichnen, den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (7.) zur Folge, wenn man der Natur des ebenen Systems gemäss, die auf die dritte Axe sich beziehenden Coordinaten null sein lässt,

(4.) $$x=\xi+x_0\,,\quad x'=\xi'+x'_0\quad \text{oder}\quad u=\eta+u_0\,,\quad u'=\eta'+u'_0$$

zu setzen, wobei man sich die Grössen ξ, ξ' und η, η', wodurch die schiefen und senkrechten Coordinaten der neuen Spitze O angezeigt werden, als constante Grössen vorzustellen hat, welche Ursache werden, dass aus dem Theile der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nicht blos wieder ein Theil der zweiten Dimension in der aus jener abgeleiteten Gleichung hervor geht, sondern neben diesem noch Glieder erscheinen, die zu dem Theile der ersten Dimension und zu dem constanten Gliede geschlagen werden müssen, und ebenso giebt der Theil der ersten Dimension in diesem neuen Systeme neben den Gliedern, die in den Theil der ersten Dimension gehören, noch andere her, die zu dem constanten Gliede geschlagen werden müssen. Wenn also die Spitze des neuen Coordinatensystems nicht in der Spitze des ursprünglichen liegen bleibt, so giebt nicht mehr der Theil von einer bestimmten Dimension wieder blos einen Theil von der gleichen Dimension, wie da wo die beiden Systeme eine gemeinschaftliche Spitze haben; weil aber die Gleichungen (4.) sämmtlich nur vom ersten Grade sind, so nimmt die neue Gleichung doch auch hier wieder nur einen Ausdruck desselben Grades wie die gegebene in sich auf, und hierin liegt die Rechtfertigung für die Benennung: „ebene Curve zweiter Ordnung."

In den nächsten Nummern werden wir ausschliesslich nur auf die Veränderungen unser Augenmerk hinrichten, welche in dem Theile der zweiten Dimension vorfallen, während eine Gleichung von einer der in (3. a.) oder (3. b.) angegebenen Formen aus einem Coordinatensysteme in ein anderes übergetragen wird, deswegen werden wir dabei zur Abkürzung der Schreibweise

$$\mu + 2\gamma x + 2\gamma' x' = M \quad \text{und} \quad \nu + 2\zeta u + 2\zeta' u' = N \tag{5. a.}$$

setzen, wodurch die eben angeführten Gleichungen in folgender Art sich schreiben lassen:

$$\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + 2\beta x x' = M \quad \text{und} \quad \delta u^2 + \delta' u'^2 + 2\varepsilon u u' = N. \tag{5. b.}$$

Die Theile M und N verwandeln sich bei jeder Uebertragung der Gleichung aus einem Systeme in ein anderes, das mit dem ersten eine gemeinschaftliche Spitze hat, aus den in dieser Nummer angezeigten Gründen in andere, die wir durch M_1 und N_1 bezeichnen werden, welche dasselbe constante Glied und ausserdem noch den Theil der ersten Dimension bezüglich der neuen Coordinaten in sich aufnehmen, der aus dem der gegebenen Gleichung durch die bei dieser Uebertragung vorzunehmenden Substitutionen erhalten wird.

179) Wir denken uns jetzt durch die Spitze A des ebenen Coordinatensystems, an welchem die ebene Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von einer der in (5. b.) stehenden Formen gegeben ist, zwei neue Axen A Y, A Y′ gelegt, welche in derselben Ebene wie die ursprünglichen A X, A X′ liegen bleiben, und von denen die eine A Y′ mit der A X′ zuzusammenfällt, so dass für dieses neue System die Relationen (2. a.) bestehen, wenn die gegebene Gleichung von der ersten in (5. b.) enthaltenen Form ist und man eine Gleichung in schiefen Coordinaten am neuen Systeme erhalten will. Dann erhalten wir die verlangte Gleichung, wenn wir in die gegebene für x, x′ ihre aus den Relationen (2. a.) gegebenen Werthe einsetzen; thut man diess, so geht die gegebene Gleichung über in:

$$(\alpha A^2 + \alpha' A'^2 + 2\beta A A') y^2 + \alpha' y'^2 + 2(\alpha' A' + \beta A) y y' = M_1, \tag{6. a.}$$

wo M_1 das bedeutet, was aus M durch die gleiche Substitution hervorgeht, und in M_1 und M ein und dasselbe constante Glied enthalten ist. Wählt man nun die andere neue Axe A Y, so dass

$$\alpha' A' + \beta A = 0 \tag{6. b.}$$

wird, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in

$$A(\alpha A + \beta A') y^2 + \alpha' y'^2 = M_1, \tag{6. c.}$$

in welcher das Glied vom Theile der zweiten Dimension verschwunden ist, worin das Product y y′ der beiden Coordinaten als Factor vorkommt, so dass vom Theile der zweiten Dimension blos diejenigen Glieder zurück bleiben, welche das Quadrat von jeder der neuen Coordinaten in sich enthalten. Setzt man in die Gleichung (6. c.) für A′ seinen Werth aus der (6. b.) ein, so lässt sich dieselbe in der folgenden Gestalt aufstellen:

$$A^2 \frac{\alpha\alpha' - \beta^2}{\alpha'} y^2 + \alpha' y'^2 = M_1. \tag{6. d.}$$

Hierbei ist zu bemerken, dass die Bedingung (6. b.) sich auch in nachstehende Proportion auflösen lässt:

$$A : A' = \alpha' : -\beta, \tag{6. e.}$$

welche aussagt, dass sich die Projectionszahlen A, A′ der Richtung AY zu einander verhalten müssen, wie die beiden gegebenen endlichen und reellen Zahlen α' und $-\beta$. Nun lässt sich nach dem im ersten Abschnitte (Nr. 32.) Gesagten immer eine Richtung auffinden, deren schiefe oder senkrechte Projectionszahlen sich zu einander wie gegebene endliche und reelle Zahlen verhalten, so dass also von dieser Seite her dem Gelangen zur Gleichung (6. b.) nie Hindernisse in den Weg gelegt werden, und diese daher auf dem von uns betretenen Wege jedesmal erzielt werden zu können scheint. Man darf jedoch nicht übersehen, dass wenn jene Gleichung einen Sinn in sich tragen soll, die beiden Richtungen AY und AY′ die Axen eines ebenen Coordinatensystems bilden müssen, und dass hierzu erfordert wird, dass jene beiden Richtungen nicht in einer Geraden liegen; desswegen wird zur Möglichkeit der Gleichung verlangt, dass die Projectionszahl A nicht wie die A_1 null werde, weil sonst die Richtungen AY und AY′ in einer und derselben Geraden liegen würden. Es wird aber der Proportion (6. e.) zur Folge nur dann $A=0$, wenn $\alpha'=0$ ist, mithin ist der einzige Fall, wo man die Curve zweiter Ordnung auf dem von uns betretenen Wege nicht durch eine Gleichung von der Form (6. c.) darstellen kann, da vorhanden, wo es sich zeigt, dass in der gegebenen Gleichung $\alpha'=0$ ist. Man überzeugt sich indessen leicht, dass selbst wenn $\alpha'=0$, nicht aber zugleich auch $\alpha=0$ ist, derselbe Zweck sich immer noch dadurch erreichen lässt, dass man, anstatt die Axe AY′ mit der AX′ zusammenfallen zu lassen, die AY mit der AX vereinigt, wodurch man zu Resultaten geführt wird, die sich aus denen (6. b. und d.) ergeben, wenn man α' mit α und A, A′ mit A_1, A_1' vertauscht, so dass jetzt die Bestimmung der Projectionszahlen A_1 und A_1' von der Proportion

$$A_1 : A_1' = \alpha : -\beta$$

abhängt, welche, wenn α nicht null ist, für AY′ immer eine andere Richtung als die für AY genommene finden lässt, so dass an diesem neuen Systeme die Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (6. c.) wirklich darstellbar ist.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, dass man eine Curve zweiter Ordnung, welche durch eine Gleichung von der ersten in (5. b.) enthaltenen Form gegeben ist, immer an einem neuen Coordinatensysteme, das mit dem ursprünglichen eine Axe gemein hat, durch eine Gleichung darstellen kann, deren Theil der zweiten Dimension nur solche Glieder in sich aufnimmt, welche die Quadrate der Coordinaten als Factor in sich tragen, mit Ausnahme des ganz besondern Falles, wo gleichzeitig

$$\alpha=0 \text{ und } \alpha'=0$$

ist, d. h. wo der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung blos das eine Glied in sich aufgenommen hat, welches das Product der beiden Coordinaten in sich enthält. In diesem Falle aber nimmt die Gleichung (6. a.) die Gestalt

(6. f.) $$2\beta A A' y'^2 + 2\beta A y y' = M_1$$

an, wobei β nie null sein kann, weil man es sonst mit keiner Curve der zweiten Ordnung zu thun hätte, und zeigt so, dass man, während die eine Axe AY′ des neu einzuführenden in der einen Axe des ursprünglichen Systems liegen bleibt, der andern Axe AY unzählich viele Lagen anweisen kann, wo in der an dem neuen Systeme entstehenden Gleichung ein Glied im Theile der zweiten Dimension auftritt, das das Quadrat von einer Coordinate zum Factor hat; denn dazu wird weiter nichts erfordert, als dass man weder A noch A′ null sein lässt. Von

der Gleichung (6. f.) aus kann man dann aber immer, den vorigen Ergebnissen gemäss, durch eine nochmalige Wiederholung des früheren Verfahrens zu einer Gleichung von der in (6. c.) angegebenen Form gelangen, so dass man mit voller Sicherheit den nachstehenden Satz aussprechen darf:

Fehlen in dem Theile der zweiten Dimension einer Gleichung von der ersten in (5. b.) enthaltenen Form, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung dargestellt wird, nicht gleichzeitig die beiden Glieder, welche das Quadrat von einer Cordinate zum Factor haben, so lässt sich jederzeit ein neues Coordinatensystem angeben, welches eine Grundaxe mit dem ursprünglichen gemein hat, und an welchem die Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (6. c.) dargestellt wird, deren Theil der zweiten Dimension das Glied nicht mehr besitzt, welches das Product der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat; enthält aber der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nur das eine Glied, welches das Product der beiden Coordinaten x und x′ zum Factor hat, so kann man zwar nie zu einer Gleichung von der Form (6. c.) an einem Coordinatensysteme gelangen, das eine Grundaxe mit dem ursprünglichen gemein hätte, wohl aber stets und auf unzählig viele Arten, wenn man die gegebene Gleichung zuerst in ein neues Coordinatensystem überträgt, das vom ursprünglichen eine Grundaxe beibehält, und dann noch einmal aus diesem in ein drittes, welches die andere Grundaxe von diesem letzten in sich aufnimmt.

180) Nachdem wir gesehen haben, dass es immer möglich ist, aus der ersten Gleichung (5. b.), wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung in schiefen Coordinaten gegeben wird, eine andere abzuleiten, welche dieselbe Curve wieder in schiefen Coordinaten darstellt, deren Theil der zweiten Dimension aber das Glied nicht mehr in sich enthält, welches das Product der beiden Coordinaten zum Factor hat, wollen wir jetzt zusehen, ob sich aus derselben gegebenen Gleichung auch immer eine andere in senkrechten Coordinaten erhalten lässt, welche die gleiche Eigenschaft besitzt. Lässt man die Polaraxe A$\mathfrak{Y}'$ des neu einzuführenden Systems mit der Grundaxe AX′ des ursprünglichen zusammenfallen, und setzt man, um zu einer Gleichung in senkrechten Coordinaten zu gelangen, in die gegebene Gleichung, dieser besondern Lage von A$\mathfrak{Y}'$ entsprechend, für x, x′ ihre aus den Gleichungen (2. b.) entnommenen Werthe ein, so findet man:

$$\left(\alpha\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2}+\alpha'\frac{(A')^2}{\mathfrak{D}^2}+2\beta\frac{(A)(A')}{\mathfrak{D}^2}\right)v^2+\alpha'\frac{1}{\mathfrak{D}_1'^2}v'^2+2\left(\alpha'\frac{(A')}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1'}+\beta\frac{(A)}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1'}\right)v\,v'=M_1, \qquad (7.\ a.)$$

wo wieder M_1 das vorstellt, was aus M durch die jetzige Substitution hervorgeht, und ausser dem vorigen constanten Gliede nur den neuen Theil der ersten Dimension in sich aufnimmt. Wählt man nun die andere Polaraxe A$\mathfrak{Y}$ so, dass

$$\alpha'(A')+\beta(A)=0 \qquad (7.\ b.)$$

wird, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in:

$$\frac{(A)}{\mathfrak{D}^2}\left(\alpha(A)+\beta(A')\right)v^2+\frac{1}{\mathfrak{D}_1'^2}\alpha'v'^2=M_1, \qquad (7.\ c.)$$

und nun hat ihr Theil der zweiten Dimension das Glied nicht mehr in sich, welches das Pro-

duct der beiden Coordinaten v und v′ in sich aufnimmt. Diese Gleichung nimmt, wenn man für (A') seinen Werth aus der (7. b.) in sie einsetzt, die folgende Gestalt an:

(7. d.) $$\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2}\,\frac{\alpha\alpha'-\beta^2}{\alpha}\,v^2+\frac{\alpha'}{\mathfrak{D}_1'^2}\,v'^2=M_1\,.$$

Da die Bedingung (7. b.) die gleiche wie die (6. b.) nur mit dem Unterschiede ist, dass in ihr die Polaraxe A𝔜 auftritt, wo in der vorigen die Grundaxe AY vorkam, so lassen sich hier an die Polaraxen A𝔜, A𝔜′ alle die Betrachtungen wieder anknüpfen, welche in der vorigen Nummer an die Grundaxen AY, AY′ angeknüpft worden sind, und man gelangt durch sie jetzt zu dem nachstehenden Satze:

Fehlen in dem Theile der zweiten Dimension einer Gleichung von der ersten in (5. b.) enthaltenen Form, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung gegeben ist, nicht gleichzeitig die beiden Glieder, welche das Quadrat von einer Coordinate zum Factor haben, so lässt sich jederzeit ein neues Coordinatensystem angeben, dessen eine Polaraxe mit der einen Grundaxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, und an welchem die Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (7. c.) dargestellt wird, deren Theil der zweiten Dimension das Glied nicht mehr besitzt, welches das Product der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat; enthält aber der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nur das eine Glied, welches das Product der beiden Coordinaten x und x′ zum Factor hat, so kann man zwar nie zu einer Gleichung von der Form (7. c.) an einem Coordinatensystem gelangen, dessen eine Polaraxe mit der einen Grundaxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, wohl aber stets und auf unzählig viele Arten, wenn man die gegebene Gleichung zuerst in ein neues Coordinatensystem überträgt, dessen eine Polaraxe in einer Grundaxe des ursprünglichen Systems liegen bleibt, und dann noch einmal aus diesem in ein drittes, dessen eine Polaraxe in derjenigen Grundaxe des zweiten Systems liegen bleibt, die der andern Polaraxe in diesem zweiten Systeme entspricht.

181) Es bleibt uns jetzt noch übrig zu zeigen, dass sich analoge Folgerungen auch in Betreff der zweiten in (5. b.) stehenden Gleichung, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung gegeben sein kann, ziehen lassen. Wollen wir zuvörderst aus dieser Gleichung eine andere in schiefen Coordinaten herleiten, und lassen wir die Grundaxe AY′ des neu einzuführenden Systems in der Polaraxe A𝔛′ des ursprünglichen Systems liegen bleiben, wo dann in die gegebene Gleichung für u und u′ ihre durch die Gleichungen (2. c.) gegebenen Werthe eingesetzt werden müssen, so erhalten wir:

(8. a.) $$(\delta C^2+\delta' C'^2+2\varepsilon C C')\,y^2+\delta'\,\mathfrak{C}_1'^2\,y'^2+2(\delta' C'+\varepsilon C)\,\mathfrak{C}_1'\,y\,y'=N_1\,,$$

wo N_1 das vorstellt, was aus N durch die jetzige Substitution hervorgeht, und neben dem constanten Gliede der zweiten Gleichung (5. b.) nur noch den neuen Theil der ersten Dimension in sich aufnimmt. Wählt man nun die zweite neue Axe AY so, dass

(8. b.) $$\delta' C'+\varepsilon C=0$$

wird, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in:

$$\mathrm{C}(\delta\,\mathrm{C} + \varepsilon\,\mathrm{C}')\,\mathrm{y}^2 + \delta'\,\mathfrak{C}_1'^2\,\mathrm{y}'^2 = N_1, \tag{8. c.}$$

in welcher vom Theil der zweiten Dimension das Glied verschwunden ist, welches das Product y y′ der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat, so dass in diesem Theile nur solche Glieder zurückbleiben, welche das Quadrat von einer der neuen Coordinaten zum Factor haben. Setzt man in diese Gleichung für C′ seinen Werth aus der (8. b.) ein, so wird sie:

$$\mathrm{C}^2\,\frac{\delta\,\delta' - \varepsilon^2}{\delta}\,\mathrm{y}^2 + \delta'\,\mathfrak{C}_1'^2\,\mathrm{y}'^2 = N_1. \tag{8. d.}$$

Die Bedingung (8. b.) hat die gleiche Form wie die (6. b.), nur dass hier die Coefficienten δ' und ε stehen, wo dort die analogen α' und β standen, und dass hier die senkrechten Projectionszahlen C, C′ der Richtung A Y vorkommen, wo dort ihre schiefen vorkamen, was darin seinen Grund hat, dass hier eine Grundaxe des neuen Systems in einer Polaraxe des ursprünglichen Systems liegt, während sie dort in einer Grundaxe dieses letztern Systems lag. Es lassen sich aber an die Bedingung (8. c.) alle die Betrachtungen anknüpfen, welche den in Nr. 3. an die dortige Bedingung (6. b.) angeknüpften analog sind, und durch sie gelangt man dann zu dem nachstehenden Satze:

Fehlen in dem Theile der zweiten Dimension einer Gleichung von der zweiten in (5. b.) enthaltenen Form, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung gegeben ist, nicht gleichzeitig die beiden Glieder, welche das Quadrat von einer Coordinate zum Factor haben, so lässt sich jederzeit ein neues Coordinatensystem angeben, dessen eine Grundaxe mit der einen Polaraxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, und an welchem die Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (8. c.) dargestellt wird, deren Theil der zweiten Dimension das Glied nicht mehr besitzt, welches das Product der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat; enthält aber der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nur das eine Glied, welches das Product der beiden Coordinaten u und u′ zum Factor hat, so kann man zwar nie zu einer Gleichung von der Form (8. c.) an einem Coordinatensysteme gelangen, dessen eine Grundaxe mit einer Polaraxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, wohl aber stets und auf unzählig viele Arten, wenn man die gegebene Gleichung zuerst in ein anderes Coordinatensystem überträgt, dessen eine Grundaxe in einer Polaraxe des ursprünglichen Systems liegen bleibt, und dann noch einmal aus diesem in ein drittes, dessen eine Grundaxe in derjenigen Polaraxe des zweiten Systems liegen bleibt, welche der andern Grundaxe in diesem zweiten Systeme entspricht.

182) Schliesslich haben wir noch den Fall zu betrachten, wo eine Gleichung von der zweiten in (5. b.) stehenden Form, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung gegeben ist, an einem andern Systeme dieselbe Curve wieder in senkrechten Coordinaten darstellen soll. Lässt man bei dieser Uebertragung die Polaraxe A $\mathfrak{Y}'$ des neuen Systems in der Polaraxe A $\mathfrak{X}'$ des ursprünglichen Systems liegen bleiben, so hat man in die gegebene Gleichung für u und u′ ihre durch die Gleichungen (2. d.) gegebenen Werthe zu setzen, und erhält dann als neue Gleichung die folgende:

$$\left(\delta\,\frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2} + \delta'\,\frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2} + 2\,\varepsilon\,\frac{(\Gamma)(\Gamma')}{\mathfrak{D}^2}\right)\mathrm{v}^2 + \delta'\,\frac{\mathfrak{C}_1'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\,\mathrm{v}'^2 + 2\,(\delta'(\Gamma') + \varepsilon(\Gamma))\,\frac{\mathfrak{C}_1'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'}\,\mathrm{v}\,\mathrm{v}' = N_1, \tag{9. a.}$$

in welcher wieder N_1 das vorstellt, was aus N durch die jetzige Substitution hervorgeht, und neben dem constanten Gliede der zweiten Gleichung (5. b.) nur noch den neuen Theil der ersten Dimension in sich aufnimmt. Wählt man nun die neue Polaraxe A𝔜 so, dass

(9. b.)
$$\delta'(\Gamma') + \varepsilon(\Gamma) = 0$$

wird, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in:

(9. c.)
$$\frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}^2}(\delta(\Gamma) + \varepsilon(\Gamma'))\,v^2 + \delta'\frac{\mathfrak{C}_1'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}v'^2 = N_1\,,$$

in welcher vom Theil der zweiten Dimension das Glied verschwunden ist, welches das Product vv′ der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat, so dass in diesem Theile nur solche Glieder zurückbleiben, welche das Quadrat von einer der neuen Coordinaten zum Factor haben. Setzt man in die vorstehende Gleichung für (Γ') seinen aus der (9. b.) entnommenen Werth ein, so wird sie:

(9. d.)
$$\frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2}\frac{\delta\delta' - \varepsilon^2}{\delta'}v^2 + \frac{\delta'\mathfrak{C}_1'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}v'^2 = N_1\,.$$

Die Bedingung (9. b.) ist die (7. b.) mit dem Unterschiede, dass hier die Coeffizienten δ', ε stehen, wo dort die α', β vorkommen, und dass hier die senkrechten Projectionszahlen der Richtung A𝔜 auftreten, wo dort die schiefen Projectionszahlen derselben Richtung sich zeigen, was darin seinen Grund hat, dass die Polaraxe A𝔜′ hier mit der Polaraxe A𝔛′ des ursprünglichen Systems zusammenfällt, wo sie dort mit der Grundaxe AX′ zusammenfiel. Es lassen sich nun an die Bedingung (9. b.) wieder in derselben Weise alle die Betrachtungen anknüpfen, welche denen in Nr. 180. an die dortigen Bedingungen (7. b.) angeknüpften analog sind, und durch sie gelangt man dann zu dem nachstehenden Satze:

Fallen in dem Theile der zweiten Dimension einer Gleichung von der zweiten in (5. b.) enthaltenen Form, wodurch eine ebene Curve zweiter Ordnung gegeben ist, nicht gleichzeitig die beiden Glieder aus, welche das Quadrat von einer Coordinate zum Factor haben, so lässt sich jederzeit ein neues Coordinatensystem angeben, dessen eine Polaraxe mit einer Polaraxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, und an welchem die Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der Form (9. c.) dargestellt wird, deren Theil der zweiten Dimension das Glied nicht mehr besitzt, welches das Product der beiden neuen Coordinaten zum Factor hat; enthält aber der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nur das eine Glied, welches das Product der beiden Coordinaten u und u′ zum Factor hat, so kann man zwar nie zu einer Gleichung von der Form (9. c.) an einem Coordinatensysteme gelangen, dessen eine Polaraxe mit einer Polaraxe des ursprünglichen Systems zusammenfällt, wohl aber stets und auf unzählig viele Arten, wenn man die gegebene Gleichung zuerst in ein anderes Coordinatensystem überträgt, dessen eine Polaraxe in einer Polaraxe des ursprünglichen Systems liegen bleibt, und dann noch einmal aus diesem in ein drittes, dessen eine Polaraxe in die andere Polaraxe des zweiten Systems fällt.

Die in (6. d.), (7. d.), (8. d.), (9. d.) erhaltenen Formen liefern durch ihren blosen Anblick den Beweis, dass die Gleichungen aller Curven zweiter Ordnung auf die Form

$$a^2 y^2 + a'^2 y'^2 = \alpha' M_1 \quad \text{oder} \quad b^2 v^2 + b'^2 v'^2 = \delta' N_1$$

gebracht werden können, wenn in ihren beliebig gegebenen Gleichungen (3. a.) oder (3. b.) $\alpha\alpha' - \beta^2$ oder $\delta\delta' - \varepsilon^2$ eine positive Zahl ist, hingegen auf die Form

$$-a^2 y^2 + a'^2 y'^2 = \alpha' M_1 \quad \text{oder} \quad -b^2 v^2 + b'^2 v'^2 = \delta' N_1,$$

wenn $\alpha\alpha' - \beta^2$ oder $\delta\delta' - \varepsilon^2$ eine negative Zahl ist, und endlich auf die Form

$$a'^2 y'^2 = \alpha' M_1 \quad \text{oder} \quad b'^2 v'^2 = \delta' N_1,$$

wenn $\alpha\alpha' - \beta^2 = 0$ oder $\delta\delta' - \varepsilon^2 = 0$ ist, wobei a^2, a'^2 oder b^2, b'^2 stets reelle und positive Zahlen vorstellen. Hierbei ist es nöthig, sich die Ueberzeugung zu verschaffen, dass diese Eigenthümlichkeit auch dann nicht verloren gehe, wenn der sehr besondere Fall eintritt, wo diese Formen nicht durch eine einzige Axenänderung herbeigeführt werden können, was sich indessen unmittelbar aus den Formen (6. a.), (7. a.), (8. a.), (9. a.) erkennen lässt, wenn man in ihnen, diesem besondern Falle entsprechend, α und α' oder δ und δ' null sein lässt. Es bleibt nämlich in diesen ersten Umformungen, aus denen sich durch eine Wiederholung die verlangten Formen erhalten lassen, das ihnen zugehörige $\alpha\alpha' - \beta^2$ oder $\delta\delta' - \varepsilon^2$ negativ, wie schon in den ursprünglichen Gleichungen.

183) Aus den letzten vier Nummern geht hervor, dass sich immer ein Coordinatensystem angeben lässt, an welchem die Gleichung einer jeden ebenen Curve zweiter Ordnung eine von den beiden Formen:

$$\alpha y^2 + \alpha' y'^2 + 2\gamma y + 2\gamma' y' = \mu \quad \text{oder} \quad \delta v^2 + \delta' v'^2 + 2\zeta v + 2\zeta' v' = \nu$$

annimmt, wo an die Stelle von M_1 und N_1 wieder ein Theil der ersten Dimension in den neuen Coordinaten und ein constantes Glied gesetzt worden ist, woraus sie immer bestehen, wie vorhin schon dargethan worden ist, und es können in diesen Gleichungen die einzelnen Coeffizienten beliebig positive oder negative Zahlen, zum Theil auch null werden. Wir werden bei den jetzt noch kommenden Untersuchungen stets voraussetzen, dass man schon die Gleichung der gegebenen Curven in dasjenige Coordinatensystem übergetragen habe, wo sie eine der vorstehenden Formen annimmt, und wir werden dieses Coordinatensystem als das ursprüngliche ansehen, dessen Axen durch AX, AX' bezeichnet werden, so wie wir die Coordinaten der Curvenpuncte an diesen Axen wie gewöhnlich durch x, x' und u, u' vorstellen wollen, wesshalb die obigen Gleichungen an diesem Coordinatensysteme in der folgenden Gestalt auftreten:

$$\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + 2\gamma x + 2\gamma' x' = \mu \quad \text{oder} \quad \delta u^2 + \delta' u'^2 + 2\zeta u + 2\zeta' u' = \nu. \qquad \textbf{(10. a.)}$$

Führen wir nun anstatt der Axen AX, AX', an welchen die vorgelegte ebene Curve zweiter Ordnung eine von den Gleichungen (10. a.) liefert, und die wir als ursprüngliche ansehen, zwei neue ein, welche den eben genannten parallel und gleichläufig sind, aber nicht mehr durch die vorige Spitze A, sondern durch einen andern Punct O hindurch gehen, wesskalb wir sie durch OX, OX' andeuten wollen, und bezeichnen wir die schiefen und senkrechten Coordinaten dieser neuen Spitze O an den Axen AX und AX' durch ξ, ξ' und η, η', so erhalten wir die Gleichungen derselben Curve an diesen neuen Axen, wenn wir in die erste Gleichung (10. a.) für x und x' oder in die zweite Gleichung (10. a.) für u und u' ihre Werthe aus den Gleichungen

(4.) einsetzen, wobei aus einer in den schiefen Coordinaten x, x' gegebenen Gleichung wieder eine in den schiefen Coordinaten x_0, x'_0 ausgedrückte Gleichung entspringt, und eben so aus einer in den senkrechten Coordinaten u, u' gegebenen eine in den senkrechten Coordinaten u_0, u'_0 ausgedrückte. Durch die hier angezeigte Substitution nun erhalten wir als neue Gleichungen:

(10. b.) $$\cdots\begin{cases}\alpha x_0^2+\alpha' x_0'^2+2(\gamma+\alpha\xi)x_0+2(\gamma'+\alpha'\xi')x'_0=\mu-(\alpha\xi^2+\alpha'\xi'^2+2\gamma\xi+2\gamma'\xi') \\ \text{oder} \\ \delta u_0^2+\delta' u_0'^2+2(\zeta+\delta\eta)u_0+2(\zeta'+\delta'\eta')u'_0=\nu-(\delta\eta^2+\delta'\eta'^2+2\zeta\eta+2\zeta'\eta')\end{cases}$$

und man kann den Punct O so wählen, dass

$$\gamma+\alpha\xi=0 \quad \text{und} \quad \gamma'+\alpha'\xi'=0 \quad \text{oder} \quad \zeta+\delta\eta=0 \quad \text{und} \quad \zeta'+\delta'\eta'=0$$

wird, welches immer möglich ist, wenn keine von den Grössen α und α' oder δ und δ' null ist; die vorigen Gleichungen nehmen dabei die folgende Gestalt an:

(10. c.) $$\alpha x_0^2+\alpha' x_0'^2=\mu+\frac{\gamma^2}{\alpha}+\frac{\gamma'^2}{\alpha'} \quad \text{oder} \quad \delta u_0^2+\delta' u_0'^2=\nu+\frac{\zeta^2}{\delta}+\frac{\zeta'^2}{\delta'},$$

woraus man sieht, dass der Theil der zweiten Dimension in diesen neuen Gleichungen genau derselbe ist, wie in jenen, aus denen sie entstanden sind; es ist hingegen der Theil der ersten Dimension aus ihnen verschwunden, und das constante Glied hat eine damit verknüpfte Aenderung erlitten. Ist aber in der gegebenen Gleichung eine von den beiden Grössen α und α' oder δ und δ' null, und es können nie beide zugleich null sein, wenn die Gleichung einer Curve zweiter Ordnung angehören soll, so können, wenn z. B. α oder δ null ist, nur die Gleichungen

$$\gamma'+\alpha'\xi'=0 \quad \text{oder} \quad \zeta'+\delta'\eta'=0$$

bestehen, aus welchen sich ξ' oder η' bestimmen lässt, und dann gehen die Gleichungen (10. b.) über in:

$$\alpha' x_0'^2+2\gamma x_0=\mu+\frac{\gamma'^2}{\alpha'}-2\gamma\xi \quad \text{oder} \quad \delta' u_0'^2+2\zeta u_0=\nu+\frac{\zeta'^2}{\delta'}-2\zeta\eta;$$

weil aber in diesem Falle die Coordinate ξ oder η noch unbestimmt geblieben ist, so kann man sie so wählen, dass

$$\mu+\frac{\gamma'^2}{\alpha'}-2\gamma\xi=0 \quad \text{oder} \quad \nu+\frac{\zeta'^2}{\delta'}-2\zeta\eta=0$$

wird, welches stets geschehen kann, wenn nicht γ oder ζ null ist, und dann werden die vorigen Gleichungen:

(10. d.) $$\alpha' x_0'^2+2\gamma x_0=0 \quad \text{oder} \quad \delta' u_0'^2+2\zeta u_0=0.$$

Wäre γ oder ζ null, so giengen die Gleichungen, aus denen die (10. d.) hervorgegangen sind, über in:

$$\alpha' x_0'^2=\mu+\frac{\gamma'^2}{\alpha'} \quad \text{oder} \quad \delta' u_0'^2=\nu+\frac{\zeta'^2}{\delta'}$$

und diese sind nur ein besonderer Fall von den in (10. c.) aufgestellten, aus welchen sie ihrer Form nach hervorgehen, wenn man α oder δ null werden lässt, ohne dass desswegen ihre übrigen Coefficienten eine unbestimmte Form annehmen.

Hätte man α' oder δ' anstatt α oder δ null angenommen, so wäre man in ganz gleicher Weise, wie zu denen (10. d.), zu den folgenden Gleichungen

$$\alpha x_0^2 + 2\gamma' x'_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \delta u_0^2 + 2\zeta' u'_0 = 0 \qquad \textbf{(10. e.)}$$

gelangt; es gehen aber die Gleichungen (10. d.) und (10. e.) durch eine blose Vertauschung der Axen AX und AX' unter sich in einander über, woraus folgt, dass die einen dieselben Gestalten, wie die andern, in sich tragen, die in den beiden Fällen blos auf verschieden gestellte Axen bezogen werden. Die in den Gleichungen (10. d.) und (10. e.) vorkommenden Glieder haben ganz dieselbe Form, wie die analogen in den Gleichungen, aus welchen sie hervorgegangen sind; es ist blos in Folge der Aenderung des Coordinatensystems das übrige Glied des Theils der ersten Dimension sammt dem constanten Gliede verschwunden.

Die vorstehenden Betrachtungen setzen es ausser allen Zweifel, dass jede ebene Curve der zweiten Ordnung sich immer durch eine Gleichung von einer der vordern in (10. c.) oder (10. d.) oder (10. e.) enthaltenen Formen darstellen lässt, wenn die Curve ursprünglich durch eine Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben war, und von einer der hintern Formen, wenn die Curve ursprünglich in senkrechten Coordinaten gegeben war. Uebrigens machen wir noch darauf aufmerksam, dass die vor (10. c.) und vor (10. d.) stehenden Gleichungen, aus welchen die Coordinaten ξ, ξ' oder η, η' des Punctes O bestimmt worden sind, sämmtlich in Bezug auf diese Coordinaten nur vom ersten Grade sind, und also nur ein einziger Werth für jede derselben erhalten wird, wenn die Coeffizienten der Gleichungen (10. a.) bestimmt gegebene Grössen sind; es giebt daher nur einen einzigen Punct O, an welchem die Gleichungen (10. a.) in eine der Formen (10. c. bis e.) übergehen.

184) Die Gleichungen (10. c.) und die (10. d. oder e.) bergen wesentlich von einander verschiedene Gestalten in sich, wie die nachstehenden Betrachtungen an den Tag legen. Gleichungen von einer der in (10. c.) befindlichen Formen ändern sich nicht, wenn in ihnen gleichzeitig $-x_0$ und $-x'_0$ für x_0 und x'_0 oder $-u_0$ und $-u'_0$ für u_0 und u'_0 gesetzt werden, und geben hierdurch zu erkennen, dass jedem Puncte, dessen Coordinaten eine dieser Gleichungen befriedigen, und der eben dadurch ein Punct der durch eine solche Gleichung dargestellten Curve wird, ein zweiter entspricht, dessen Coordinaten denen des ersten Punctes an Grösse gleich, ihrem Vorzeichen nach aber gerade entgegengesetzt sind: je zwei solcher Puncte liegen daher in einer durch den Punct O gehenden Geraden und stehen zu beiden Seiten in dieser Geraden von dem Puncte O gleichweit ab. Es verhält sich der Punct O zu je zwei solchen Puncten der ebenen Curve zweiter Ordnung, die in einer durch ihn gelegten Geraden und gleichweit von ihm abliegen, gerade so, wie der Mittelpunct einer Kreislinie zu den zwei Endpuncten eines ihrer Durchmesser, wesshalb man auch den Punct O den Mittelpunct der durch eine der Gleichungen (10. c.) dargestellten Curve zweiter Ordnung zu nennen pflegt. Es haben mithin alle ebene Curven zweiter Ordnung, deren Gleichung sich auf eine der in (10. c.) stehenden Formen bringen lässt, einen Mittelpunct. Dagegen lässt sich zeigen, dass ebene Curven zweiter Ordnung, deren Gleichung sich auf eine der in (10. d.) oder (10. e.) enthaltenen Formen bringen lässt, keinen Mittelpunct haben. In der That da sich, wo Gleichungen von einer dieser letztern Formen entstehen, wie wir gesehen haben, kein Punct O auffinden lässt, welcher machte, dass der Theil

der ersten Dimension aus der Gleichung ganz und gar verschwindet, dieser Theil aber entgegengesetzte Werthe annimmt, wenn man den beiden Coordinaten zugleich entgegengesetzte Vorzeichen bei gleicher Grösse giebt, und desswegen die letztern Coordinaten die Gleichung nicht befriedigen können, wenn die erstern es thun, es sei denn, dass γ, γ' oder ζ, ζ' null wären, wo dann aber jene Gleichungen sich auf

$$x_0'^2 = 0\,,\quad x_0^2 = 0 \quad \text{oder} \quad u_0'^2 = 0\,,\quad u_0^2 = 0$$

zurückzögen, und dann keine Curve in sich trügen: so zeigt diess an, dass solche ebene Curven zweiter Ordnung keinen Punct in ihrem Innern aufzuweisen haben, um den sich alle ihre Puncte paarweise in gleichen Entfernungen von ihm auf Geraden liegend, die durch ihn hindurch gehen, lagern, dass sonach solche ebene Curven keinen Mittelpunct haben.

Ausser der so eben angezeigten Verschiedenheit der durch die Gleichungen (10. c.) und durch die (10. d.) oder (10. e.) dargestellten Gestalten lässt sich noch eine zweite aufzeigen, die wir jetzt besprechen werden. Das Vorhandensein eines Mittelpunctes in ebenen Curven der zweiten Ordnung oder dessen Nichtvorhandensein hängt nämlich lediglich davon ab, ob die Gleichung dieser Curve sich so umgestalten lässt, dass aus ihr der Theil der ersten Dimension verschwindet, oder ob nicht; denn da der Theil der zweiten Dimension, auch wenn er das Glied, welches das Product der beiden Coordinaten zum Factor hat, noch in sich trägt, stets der gleiche bleibt, wenn man $-x_0$, $-x_0'$ für x_0, x_0' oder $-u_0$, $-u_0'$ für u_0, u_0' setzt, so zeigt er da, wo neben ihm kein Theil der ersten Dimension in einer Gleichung vorkommt, immer das Dasein eines Mittelpunctes an, der in der Coordinatenspitze liegt, so wie umgekehrt die Unmöglichkeit zu einer Gleichung ohne einen Theil der ersten Dimension zu gelangen, das Nichtvorhandensein eines Mittelpunctes in der Curve zu erkennen giebt. — Die Gleichungen von einer der in (10. c.) stehenden engern Formen ändern sich aber auch dann nicht, wenn das Vorzeichen von blos einer der beiden Coordinaten x_0, x_0' oder u_0, u_0' umgekehrt wird, woraus folgt, dass jedem Puncte der durch eine solche Gleichung dargestellten Curve noch die zwei andern entsprechen, welche mit jenem eine seiner Coordinaten gemein haben, bei denen jedoch die zweite Coordinate der zweiten Coordinate von jenem an Grösse zwar gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist. Weil nun Puncte eines ebenen Systems, die eine schiefe auf die eine Grundaxe sich beziehende Coordinate mit einander gemein haben, in einer Geraden liegen, die mit der andern Grundaxe parallel läuft, und solche, die eine an Grösse gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte, auf eine der Grundaxen sich beziehende schiefe Coordinate besitzen, in Geraden liegen, die mit der andern Grundaxe parallel laufen und zu beiden Seiten von dieser Axe gleich weit abstehen, so bestehen die durch Gleichungen, wie die erste in (10. c.) enthaltene ist, dargestellten Curven aus Puncten, die paarweise in einer mit einer der Grundaxe parallelen Geraden liegen und zu beiden Seiten gleichweit von der andern Grundaxe abstehen. Weil ferner Puncte eines ebenen Systems, die eine senkrechte auf die eine Grundaxe sich beziehende Coordinate mit einander gemein haben, in einer mit der auf dieser Grundaxe senkrechten Polaraxe parallelen Geraden liegen, und solche, die eine an Grösse gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte, auf eine der Grundaxen sich beziehende senkrechte Coordinate besitzen, in Geraden liegen, die mit der auf dieser Grundaxe senkrechten Polaraxe parallel laufen und zu beiden Seiten von dieser Polaraxe gleich weit abstehen, so bestehen die durch Gleichungen, wie die zweite in (10. c.) enthaltene ist, dargestellten Curven aus Puncten, die paarweise in Geraden liegen, welche mit der einen Polaraxe

parallel laufen und zu beiden Seiten gleich weit von der andern Polaraxe abstehen. Dieses Verhalten der Punctepaare zu den Grund- oder Polaraxen des ebenen Systems ist dem gleich, welches die in parallelen Geraden liegenden Puncte einer Kreislinie gegen den auf diesen Geraden senkrecht stehenden Durchmesser beobachten, nur dass hier die Geraden, in welchen die Punctepaare liegen, nicht senkrecht auf den Grund- oder Polaraxen stehen, von denen die Punctepaare gleich weit abstehen, sondern mit der andern Grund- oder Polaraxe parallel laufen. Nennt man die Gerade, welche von einem Puncte einer Curve bis zu einem andern läuft, eine Sehne dieser Curve, so kann man die bisher besprochene Eigenschaft der Curven zweiter Ordnung kurz so aussprechen: Jede Grundaxe halbirt alle mit der andern Grundaxe parallelen Sehnen einer Curve zweiter Ordnung, welche durch die erste Gleichung (10. c.) dargestellt wird, und jede Polaraxe halbirt alle mit der andern Polaraxe parallelen Sehnen einer Curve zweiter Ordnung, welche durch die zweite Gleichung (10. c.) dargestellt wird. Solche Halbirungslinien für alle parallelen Sehnen einer ebenen Curve zweiter Ordnung pflegt man Durchmesser der Curve in Bezug auf diese Sehnen zu nennen, und um die Durchmesser, welche in Grundaxen liegen, von denen unterscheiden zu können, welche in Polaraxen liegen, sollen erstere den Namen Grunddurchmesser, letztere den Namen Polardurchmesser erhalten. Da bei Gleichungen von der Form der ersten in (10. c.) enthaltenen jede Grundaxe ein Durchmesser für die mit der andern Grundaxe parallelen Sehnen ist, und da bei Gleichungen von der Form der zweiten in (10. c.) enthaltenen jede Polaraxe ein Durchmesser für die mit der andern Polaraxe parallelen Sehnen ist, so werden wir diese beiden Grundaxen oder diese beiden Polaraxen, durch welche jedesmal gleichzeitig zwei Durchmesser zugleich mit den zu ihnen gehörigen Sehnenrichtungen gegeben werden, verbundene oder conjugirte Durchmesser der durch eine solche Gleichung dargestellten ebenen Curve zweiter Ordnung nennen.

In Curven der zweiten Ordnung, welche einen Mittelpunct haben, theilt dieser jeden von zwei conjugirten Durchmessern in zwei gleiche Theile, die wir conjugirte Halbmesser nennen werden, und diese Halbmesser sollen zur bessern Unterscheidung Grundhalbmesser oder Polarhalbmesser heissen, je nachdem sie aus Grunddurchmessern oder Polardurchmessern hervorgegangen sind. Da bei einer Gleichung von der vordern Form (10. c.) der Durchmesser in der Grundaxe liegt und desshalb ein Grunddurchmesser ist, so findet man die seinen Endpuncten entsprechenden Coordinaten aus dieser Gleichung, wenn man die auf die andere Grundaxe sich beziehende Coordinate null sein lässt. Man erhält daher als Quadrate dieser Coordinaten die Ausdrücke

$$\frac{\mu_1}{\alpha} \text{ und } \frac{\mu_1}{\alpha'},$$

wenn man unter μ_1 das constante Glied der Gleichung (10. c.) versteht. Diese Quadrate werden negative Zahlen, wenn α oder α' und μ_1 entgegengesetzte Vorzeichen haben; dann nehmen die Coordinaten imaginäre Formen an und entsprechen unmöglichen Puncten der Curve. Gleichwohl pflegt man diese Coordinaten auch in einem solchen Falle noch Halbmesser zu nennen, die nun freilich blos eingebildete sind. Hat man eine Gleichung von der hintern Form (10. c.) und schreibt man sie, $\nu + \frac{\zeta^2}{\delta} + \frac{\zeta'^2}{\delta'} = \nu_1$ setzend, so:

$$\delta \mathfrak{u}^2 + \delta' \mathfrak{u}'^2 = \nu_1,$$

so kann man ihr die andere Form

$$\delta\,\mathfrak{C}^2\frac{u^2}{\mathfrak{C}^2}+\delta'\,\mathfrak{C}_1'^2\frac{u'^2}{\mathfrak{C}_1'^2}=\nu_1 \quad \text{oder} \quad \delta\,\mathfrak{C}^2(x)^2+\delta'\,\mathfrak{C}_1'^2(x')^2=\nu_1$$

geben, wenn man unter (x), (x′) die auf die Polaraxen A𝔛, A𝔛′ bezogenen schiefen Coordinaten von demselben Puncte der Curve versteht, welcher an den Grundaxen die senkrechten u, u′ liefert, den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (57. b.) zur Folge, wenn man in Gemässheit des ebenen Systems $\mathfrak{C}_2''=1$ sein lässt. Da nun diese Gleichung jetzt wie die vordere (10. c.) schiefe Coordinaten enthält, die sich jedoch auf die Polaraxen beziehen, wie die vorigen auf die Grundaxen, so findet man aus ihr die Quadrate der Polarhalbmesser ganz eben so, wie aus der vorigen die der Grundhalbmesser; diese Quadrate werden nämlich

$$\frac{\nu_1}{\delta\,\mathfrak{C}^2} \quad \text{und} \quad \frac{\nu_1}{\delta'\,\mathfrak{C}_1'^2}.$$

Eine Gleichung von einer der in (10. d.) enthaltenen Formen ändert sich nicht, wenn man blos $-x_0'$ für x_0' oder blos $-u_0'$ für u_0' setzt, sie ändert sich aber, vorausgesetzt, dass nicht $\gamma=0$ oder $\zeta=0$ ist, (in welchem Falle die Gleichung jedoch nur noch Gerade in sich trüge), wenn man $-x_0$ für x_0 oder $-u_0$ für u_0 setzt; es entspricht daher jedem Puncte der durch eine solche Gleichung dargestellten ebenen Curve ein zweiter, der mit dem ersten einerlei Werth von x_0 oder u_0 besitzt, dessen x_0' oder u_0' hingegen dem des ersten Punctes an Grösse zwar gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist, während es im Allgemeinen keinen zweiten Punct giebt, der mit dem ersten einerlei Werth von x_0' oder u_0' hätte und dessen x_0 oder u_0 dem des ersten an Grösse gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt wäre. Diesemnach ist bei einer durch die erste Gleichung (10. d.) dargestellten ebenen Curve zweiter Ordnung die Grundaxe AX Durchmesser für alle Sehnen, die mit der andern Grundaxe AX′ parallel laufen, und bei einer durch die zweite Gleichung (10. d.) dargestellten ebenen Curve zweiter Ordnung ist die Polaraxe A𝔛 Durchmesser für alle Sehnen, die mit der andern Polaraxe A𝔛′ parallel laufen; aber es ist weder bei jenen die Grundaxe AX′ Durchmesser für Sehnen, die mit der Grundaxe AX parallel laufen, noch bei diesen die Polaraxe A𝔛′ Durchmesser für Sehnen, die mit der Polaraxe A𝔛 parallel laufen. Bei solchen ebenen Curven zweiter Ordnung geben also weder die Grundaxen noch die Polaraxen Richtungen her, von denen jede ein Durchmesser für Sehnen wird, die mit der andern parallel laufen, sondern es kann von beiden nur die eine als Durchmesser für Sehnen, die mit der andern parallel laufen, genommen werden, und die, von welcher diess gilt, muss einzeln ins Auge gefasst werden, wesswegen solche Durchmesser einzelne oder isolirte heissen. Ebene Curven zweiter Ordnung, welche zu einer Gleichung, wie die (10. d.) sind, führen, haben sonach blos isolirte Durchmesser, die in der Axe AX oder A𝔛 liegen, für Sehnen, die mit der Axe AX′ oder A𝔛′ parallel laufen, und die gleiche Eigenschaft kommt auch in den durch die Gleichungen (10. e.) dargestellten vor, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Axen AX und AX′ oder die A𝔛 und A𝔛′ mit einander vertauscht werden müssen.

185) Als wir von Nr. 179. bis Nr. 183. untersuchten, wie sich ein Coordinatensystem angeben lässt, an welchem jede ebene Curve der zweiten Ordnung eine Gleichung liefert, die in einer der in (10. c. bis e.) angezeigten Formen auftritt, konnten wir fast immer der einen Axe des gesuchten Coordinatensystems zum Voraus eine völlig bestimmte Richtung anweisen,

und dieser Umstand deutet darauf hin, dass es unzählig viele Coordinatensysteme giebt, an welchen die ebene Curve zweiter Ordnung eine Gleichung von einer jener Formen liefert. Wir werden in den folgenden Nummern die Beziehungen aufsuchen, in welchen die verschiedenen Coordinatensysteme zu einander stehen, an denen dieselbe ebene Curve zweiter Ordnung immer eine Gleichung von einer jener Formen liefert, wobei wir zum Voraus bemerken wollen, dass die Curve, welche zu einer Gleichung von einer der in (10. c.) stehenden Formen führt, nie eine der in (10. d. oder e.) vorhandenen Formen liefern kann, und umgekehrt, da, wie wir gesehen haben, diese beiderlei Formen Curven in sich enthalten, deren Gestalten wesentlich von einander verschieden sind. Aus diesem Grunde theilen wir die in den nächsten Nummern vorkommende Untersuchung in zwei Theile ab, von denen der erste solche Curven in sich aufnimmt, deren Gleichung auf eine der in (10. c.) angegebenen Formen zurückführbar ist, während der andere Theil nur solche Curven betrachtet, deren Gleichung auf eine der in (10. d. oder e.) angegebenen Formen gebracht werden kann. Hierbei setzen wir voraus, dass die Curve schon durch eine Gleichung von einer dieser Formen an einem bestimmten, auf die oben beschriebene Weise aufgesuchten Coordinatensysteme gegeben sei, das wir während dieser Untersuchung als das ursprünglich vorhandene ansehen werden. Die Axen dieses Coordinatensystems wollen wir durch AX, AX′, so wie die Coordinaten der Curvenpuncte an ihnen durch x, x′ oder u, u′ vorstellen, wesshalb wir jetzt den Gleichungen (10. c.) die Gestalt

$$\alpha x^2 + \alpha' x'^2 = \mu \quad \text{oder} \quad \delta u^2 + \delta' u'^2 = \nu\,, \tag{11. a.}$$

denen (10. d.) die

$$\alpha' x'^2 + 2\gamma x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta' u'^2 + 2\zeta u = 0 \tag{11. b.}$$

und denen (10. e.) die

$$\alpha x^2 + 2\gamma' x' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta u^2 + 2\zeta' u' = 0 \tag{11. c.}$$

geben werden, in denen noch immer alle Coeffizienten beliebige endliche und reelle, positive oder negative Zahlen vorstellen, die zum Theil auch null sein können.

Die Gleichungen (11. a.) stellen, je nachdem ihre Coeffizienten positive oder negative Zahlen oder auch null sind, sehr verschiedene Gebilde dar. Ist in ihnen μ oder ν null, und sind α und α' oder δ und δ' Zahlen mit einerlei Vorzeichen, so werden sie nicht anders befriedigt, als wenn $x = 0$ und zugleich $x' = 0$ oder wenn $u = 0$ und zugleich $u' = 0$ ist, und stellen mithin blos einen Punct dar, der mit der Coordinatenspitze zusammenfällt; haben aber, während $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ ist, α und α' oder δ und δ' Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen, so lassen sich jene Gleichungen auf die Form

$$(\mathfrak{p}x + \mathfrak{p}'x')(\mathfrak{p}x - \mathfrak{p}'x') = 0 \quad \text{oder} \quad (pu + p'u')(pu - p'u') = 0$$

bringen, in welchen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}'$ oder p und p′ reelle und endliche Zahlen bedeuten *), und dann

*) Man sieht diess sogleich ein, wenn man erwägt, dass die Gleichungen (11. a.) da, wo α und α' oder δ und δ' Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen in sich tragen, auf die andere Form

$$x^2 - f^2 x'^2 = \frac{\mu}{\alpha} \quad \text{oder} \quad u^2 - g^2 u'^2 = \frac{\nu}{\delta}$$

sich bringen lassen, wobei f und g reelle, positive oder negative Grössen vorzustellen haben, und dass diese sogleich in die andere Form

$$(x + fx')(x - fx) = \frac{\mu}{\alpha} \quad \text{oder} \quad (u + gu')(u - gu') = \frac{\nu}{\delta}$$

sich übertragen lassen.

stellt die erste Gleichung nach den im dritten Abschnitte (Nr. 123.) gegebenen Erörterungen einen Verein der beiden durch die Gleichungen

$$\mathfrak{p}x + \mathfrak{p}'x' = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}x - \mathfrak{p}'x = 0,$$

und die zweite Gleichung einen Verein der beiden durch die Gleichungen

$$pu + p'u' = 0 \quad \text{und} \quad pu - p'u' = 0$$

gegebenen Gebilde dar, von denen jedes eine durch die Coordinatenspitze hindurch gehende Gerade ist; wäre endlich, während $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ ist, auch noch einer der Coeffizienten α und α' oder δ und δ' null, (und beide zugleich können nicht null werden, ohne dass die Gleichung aufhört, einen Ausdruck des zweiten Grades in sich zu tragen), so gienge die erste Gleichung (11. a.) über in $x^2 = 0$ oder $x'^2 = 0$, die zweite in $u^2 = 0$ oder $u'^2 = 0$, welche $x = 0$ oder $x' = 0$ und $u = 0$ oder $u' = 0$ nach sich ziehen, woraus folgt, dass das Gebilde jetzt nur noch eine der Grundaxen oder eine der Polaraxen vorstellt. Sind hingegen die Coeffizienten μ oder ν nicht null, ist aber einer der Coeffizienten α und α' oder einer der δ und δ' null, so kann man die erste der Gleichungen (11. a.) auf eine der Formen

$$x^2 = \frac{\mu}{\alpha} \quad \text{oder} \quad x'^2 = \frac{\mu}{\alpha'}$$

und die zweite jener Gleichungen auf eine der Formen

$$u^2 = \frac{\nu}{\delta} \quad \text{oder} \quad u'^2 = \frac{\nu}{\delta'}$$

bringen, und diese Gleichungen werden durch keinen reellen Werth der in ihnen auftretenden Coordinaten befriedigt, wenn $\frac{\mu}{\alpha}$ oder $\frac{\mu}{\alpha'}$ oder $\frac{\nu}{\delta}$ oder $\frac{\nu}{\delta'}$ negative Zahlen sind; in diesem Falle wird durch sie gar nichts vorgestellt; sind aber die eben angezeigten Quotienten positive Zahlen, so lassen sie sich auf die Form

$$(x+f)(x-f) = 0 \quad \text{oder} \quad (x'+g)(x'-g) = 0$$

und

$$(u+\mathfrak{f})(u-\mathfrak{f}) = 0 \quad \text{oder} \quad (u'+\mathfrak{g})(u'-\mathfrak{g}) = 0$$

bringen, in welchen f und g oder $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{g}$ reelle Zahlen bedeuten, von welchen Gleichungen jede einen Verein von zwei mit einer der Grundaxen oder der Polaraxen parallelen Geraden vorstellt, die zu beiden Seiten von der Axe, mit welcher sie parallel laufen, gleich weit abstehen. Man kann alle diese besondern Formen, da sie keine Gebilde in sich aufnehmen, welche noch weiter erkannt zu werden brauchen, von den späteren Untersuchungen ausschliessen, und demzufolge annehmen, dass keiner der Coeffizienten α, α', μ oder δ, δ', ν in den Gleichungen (11. a.) null sei. Thut man diess und kommt man noch darin überein, diese Gleichungen stets so zu schreiben, dass μ oder ν eine positive Zahl wird, was man immer in seiner Gewalt hat, so können, wenn jene Gleichungen eine reelle Form besitzen, die beiden Coeffizienten α und α' oder δ und δ' nur entweder positive Zahlen sein, oder es kann der eine eine positive und der andern eine negative Zahl sein. Sind beide Coeffizienten positive Zahlen, so liegen alle auf die Axe AX sich beziehenden Coordinatenwerthe der Curvenpuncte zwischen $+\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$ und $-\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$, so wie die auf Axe AX′ sich beziehenden zwischen $+\sqrt{\frac{\mu}{\alpha'}}$ und $-\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}$, wenn

die Curve durch die erste Gleichung (11. a.) gegeben ist, und ist die Curve durch die zweite Gleichung (11. a.) gegeben, so liegen alle auf die Axe AX sich beziehenden Coordinatenwerthe der Curvenpuncte zwischen $+\sqrt{\frac{\nu}{\delta}}$ und $-\sqrt{\frac{\nu}{\delta}}$, so wie die auf die Axe AX′ sich beziehenden zwischen $+\sqrt{\frac{\nu}{\delta'}}$ und $-\sqrt{\frac{\nu}{\delta'}}$; die Curvenpuncte entfernen sich mithin in diesem Falle von keiner Axe und nach keiner Seite derselben hin, über eine gewisse Weite und reihen sich zu einer ringsum begrenzten Curve an einander die man **Ellipse** nennt. Ist hingegen der eine von jenen Coefficienten eine positive der andere eine negative Zahl, so wird der Entfernung der Curvenpuncte von keiner Axe und auf keiner ihrer Seiten eine Schranke gesetzt, die Puncte reihen sich zu einer Curve an einander, die in Bezug auf jede Axe vier ins Unendliche fortlaufende Zweige hat, und die man **Hyperbel** zu nennen pflegt. Wir haben oben aus der allgemeinsten Gleichung des zweiten Grades, welche in (3. a. oder b.) so wie in (5. b.) aufgestellt worden ist, die in (6. d.), (7. d.), (8. d.) und (9. d.) stehenden Formen abgeleitet, und diese gehören, vorausgesetzt, dass nicht $\alpha\alpha'-\beta^2=0$ oder $\delta\delta'-\varepsilon^2=0$ ist, offenbar einer Ellipse oder Hyperbel an, je nachdem $\alpha\alpha'-\beta^2$ oder $\delta\delta'-\varepsilon^2$ eine positive oder negative Zahl ist. Mittelst dieses Kennzeichens lässt sich bei jeder Gleichung zweiten Grades mit zwei Veränderlichen sogleich entscheiden ob sie eine Ellipse oder Hyperbel darstellt.

In den Gleichungen (11. b.) kann nie α' oder δ' null sein, ohne dass die Gleichung aufhört einen Ausdruck des zweiten Grades in sich aufzunehmen, und wäre γ oder ζ null, so würde sie zu $x'=0$ oder $u'=0$ führen, und blos die Axe AX oder A𝔛 darstellen. Abgesehen von diesen besondern Formen, die keine weitere Untersuchung verlangen, kann man annehmen, dass keiner von den Coefficienten α', γ oder δ', ζ null sei, und noch überdiess voraussetzen, dass α' oder δ' eine positive Zahl sei, weil man die Gleichung so zu schreiben stets in seiner Gewalt hat; dann sind nur die zwei Fälle übrig, wo γ oder ζ entweder eine positive oder eine negative Zahl ist. Da aber der eine dieser zwei Fälle aus dem andern hervorgeht, wenn man $-x$ für x oder $-u$ für u setzt, d. h., wenn man die entgegengesetzte Richtung von der AX oder A𝔛 als neue Axe AX oder A𝔛 ansieht, so folgt, dass diese zwei Fälle nicht Curven von verschiedener Gestalt in sich tragen, sondern nur eine abgeänderte Beziehung derselben Curve zu einer der Axen aussprechen. Es reihen sich die durch eine der Gleichungen (11. b.) gegebenen Puncte immer zu einer Curve an einander, welche in der Richtung der Axe AX oder A𝔛 zwei von der Coordinatenspitze auslaufende Zweige bildet, die nach dieser einen Seite hin ins Unendliche fortlaufen. In der Richtung der Axe AX′ oder A𝔛′ bildet diese Curve, welche **Parabel** genannt wird, nur einen Zweig, dem aber weder nach der einen, noch nach der andern Seite hin Schranken gesetzt sind. Da zum Vorhandensein der Parabel erforderlich ist, dass einer der Coefficienten α und α' oder δ und δ' aus den Gleichungen (11. b.) verschwindet, diess aber, wie aus den Gleichungen (6. d.), (7. d.), (8. d.), (9. d.) ersichtlich ist, nur dann geschieht, wenn in der allgemeinen Gleichung (5. b.) oder (3. a. oder b.) zwischen den Coefficienten (12. a.) α, α', β oder δ, δ', ε ihres Theils der zweiten Dimension die Relation $\alpha\alpha'-\beta^2=0$ oder $\delta\delta'-\varepsilon^2=0$ statt hat, so giebt diese das allgemeinste Kennzeichen der Parabel her.

Will man den Umstand, ob ein Coefficient als positive oder als negative Zahl gedacht wird, schon durch die äussere Form der Gleichungen zu verstehen geben, so schreibt man die Gleichung der Ellipse so:

(12. a.) $$\alpha^2 x^2 + \alpha'^2 x'^2 = \mu^2 \quad \text{oder} \quad \delta^2 u^2 + \delta'^2 u'^2 = \nu^2,$$

die der Hyperbel kann man so schreiben:

(12. b.) $$\alpha^2 x^2 - \alpha'^2 x'^2 = \mu^2 \quad \text{oder} \quad \delta^2 u^2 - \delta'^2 u'^2 = \nu^2,$$

und auch:

(12. c.) $$-\alpha^2 x^2 + \alpha'^2 x'^2 = \mu^2 \quad \text{oder} \quad -\delta^2 u^2 + \delta'^2 u'^2 = \nu^2,$$

die der Parabel kann geschrieben werden:

(12. d.) $$\alpha'^2 x'^2 + 2\gamma^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta'^2 u'^2 + 2\zeta^2 u = 0$$

und

(12. e.) $$\alpha'^2 x'^2 - 2\gamma^2 x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta'^2 u'^2 - 2\zeta^2 u = 0,$$

so wie auch:

(12. f.) $$\alpha^2 x^2 + 2\gamma'^2 x' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta^2 u^2 + 2\zeta'^2 u' = 0$$

und

(12. g.) $$\alpha^2 x^2 - 2\gamma'^2 x' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta^2 u^2 - 2\zeta'^2 u' = 0,$$

in welchen die Buchstaben α, α', γ, γ' und μ oder δ, δ', ζ, ζ' und ν lauter beliebige endliche und reelle Zahlen vorstellen, deren Quadrate man sich immer nur als positive Zahlen zu denken hat, es mögen jene Zahlen selber positive oder negative sein.

Die mehrern Gleichungen in schiefen Coordinaten sowohl als in senkrechten, welche für eine Curve desselben Namens hier angegeben worden sind, kann man immer durch eine einzige vertreten lassen, wenn man jedesmal die Benennung der Axen darnach einrichten will.

186) Ist eine ebene Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der ersten in (11. a.) stehenden Form an den Axen AX, AX′ irgend eines dazu tauglichen ebenen Systems gegeben, und will man dieselbe Curve an den Axen AY, AY′ eines beliebigen andern ebenen Systems darstellen, welches mit jenem die Spitze A gemeinschaftlich hat, so hat man, um zu der verlangten Gleichung zu gelangen, in die gegebene für x und x′ ihre in den Gleichungen (1. a.) oder (1. c.) angegebenen Werthe zu setzen, und es sind dazu die zwei vordern Gleichungen (1. a.) zu benützen, wenn die neue Gleichung in schiefen Coordinaten ausgedrückt sein soll, hingegen die zwei hintern in (1. a.) oder die zwei vordern in (1. c.) gegebenen, wenn die neue Gleichung in senkrechten Coordinaten hervorgehen soll.

Nimmt man hierzu erstlich die zwei vordern in (1. a.) mitgetheilten Gleichungen, so erhält man als neue in schiefen Coordinaten ausgedrückte Gleichung:

(13. a.) $$(\alpha A^2 + \alpha' A'^2)\, y^2 + (\alpha A_1^2 + \alpha' A_1'^2)\, y'^2 + 2(\alpha A A_1 + \alpha' A' A_1')\, y y' = \mu,$$

in welcher die neu hinzugekommenen Grössen die in Nr. 177. angezeigte Bedeutung haben. Wählt man nun die beiden neuen Axenrichtungen AY, AY′ so, dass

(13. b.) $$\alpha A A_1 + \alpha' A' A_1' = 0$$

wird, so verwandelt sich die Gleichung (13. a.) in:

(13. c.) $$(\alpha A^2 + \alpha' A'^2)\, y^2 + (\alpha A_1^2 + \alpha' A_1'^2)\, y'^2 = \mu$$

und hat so wieder die erste in (11. a.) angegebene Form. Man sieht, dass man, um der Bedingung (13. b.) zu genügen, im Allgemeinen A und A′ oder A_1 und A_1' nach Belieben wäh-

len und dann doch noch die zwei andern Projectionszahlen ihnen gemäss bestimmen kann, was nichts anders heisst, als dsss die Lage der einen neuen Axe nach Belieben gewählt werden, und zu ihr die zweite noch immer so aufgesucht werden kann, dass die neue Gleichung die obige Form annimmt. Man hat bei dieser Bestimmung der Axenlage im neuen Systeme auf nichts weiter zu sehen, als dass die zwei Axen A Y, A Y′ nicht in eine und dieselbe Gerade fallen, weil sie sonst nicht ein ebenes System zu constituiren vermöchten. Da die Polaraxe A 𝔜′ senkrecht auf der Grundaxe A Y steht, und $A_1(\Gamma) + A_1'(\Gamma')$ oder $A(\Gamma_1) + A'(\Gamma_1')$ der Kosinus des Winkels ist, den die beiden Richtungen A Y′ und A 𝔜 oder A Y und A 𝔜′ mit einander machen, wenn die hier auftretenden Zeichen ihre in Nr. 177. angezeigte stehende Bedeutung behalten, so ist $A_1(\Gamma) + A_1'(\Gamma') = 0$ sowohl als $A(\Gamma_1) + A'(\Gamma_1') = 0$, und eliminirt man mittelst dieser Gleichungen die Grössen A_1 und A_1' oder A und A′ aus der Bedingung (13. b.), so verwandelt sich diese in:

$$\alpha A(\Gamma') = \alpha' A'(\Gamma) \quad \text{oder} \quad \alpha A_1(\Gamma_1') = \alpha' A_1'(\Gamma_1), \tag{13. d.}$$

indem kein von dem gegebenen wahrhaft verschiedenes neues System eine der Projectionszahlen A, A′ und A_1, A_1' null werden lassen kann, der Bedingung (13. b.) gemäss.

Setzt man aber in die gegebene Gleichung, um zu einer neuen in senkrechten Coordinaten zu gelangen, für x, x′ ihre aus den zwei vordern Gleichungen (1. c.) entnommenen Werthe ein, so kommt man zu der folgenden Gleichung:

$$\left(\alpha\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2} + \alpha'\frac{(A')^2}{\mathfrak{D}^2}\right)v^2 + \left(\alpha\frac{(A_1)^2}{\mathfrak{D}_1^2} + \alpha'\frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\right)v'^2 + 2\frac{\alpha(A)(A_1) + \alpha'(A')(A_1')}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1'}vv' = \mu, \tag{14. a.}$$

und wählt man hier die Lage der neuen Axen so, dass

$$\alpha(A)(A_1) + \alpha'(A')(A_1') = 0 \tag{14. b.}$$

wird, so geht die Gleichung (14. a.) über in:

$$\left(\alpha\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2} + \alpha'\frac{(A')^2}{\mathfrak{D}^2}\right)v^2 + \left(\alpha\frac{(A_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \alpha'\frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\right)v'^2 = \mu, \tag{14. c.}$$

und ist nun von der zweiten in (11. a.) angegebenen Form. Um der Bedingung (14. b.) zu genügen, kann man im Allgemeinen eines der zwei Paare von Projectionszahlen (A), (A′) und (A_1), (A_1') nach Gefallen wählen und dann doch noch das andere Paar jener Bedingung gemäss bestimmen, oder mit andern Worten, man kann eine der neuen Polaraxen A 𝔜 und A 𝔜′ nach Belieben nehmen und zu dieser dann noch die andere der Bedingung (14. b.) gemäss aufsuchen, wo dann die neue Gleichung die Form (14. c.) annimmt. Bei dieser Bestimmung der Polaraxen im neuen Systeme hat man auf nichts weiter zu sehen, als dass die zwei Richtungen A 𝔜 und A 𝔜′ nicht in eine Gerade fallen, weil sie sonst die Polaraxen eines ebenen Systems vorzustellen nicht vermöchten. Da die Grundaxen A Y und A Y′ senkrecht auf den Polaraxen A 𝔜′ und A 𝔜 stehen und $(A_1)C + (A_1')C'$ oder $(A)C_1 + (A')C_1'$ der Kosinus des Winkels ist, den die zwei Richtungen A Y und A 𝔜′ oder A 𝔜 und A Y′ mit einander machen, so ist $(A_1)C + (A_1')C' = 0$ sowohl als $(A)C_1 + (A')C_1' = 0$, und eliminirt man mittelst dieser Gleichungen die Grössen (A_1) und (A_1') oder (A) und (A′) aus der Bedingung (14. b.), so verwandelt sich diese in:

$$\alpha(A)C' = \alpha'(A')C \quad \text{oder} \quad \alpha(A_1)C_1' = \alpha'(A_1')C_1, \tag{14. d.}$$

indem kein von dem gegebenen wahrhaft verschiedenes neues System eine der Projectionszahlen $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}')$ und $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}'_1)$ null werden lassen kann, der Bedingung (14. b.) gemäss.

187) Ist hingegen eine ebene Curve zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der zweiten in (11. a.) stehenden Form an den Axen A X, A X′ eines dazu geeigneten ebenen Systems gegeben, und will man dieselbe Curve an den Axen A Y, A Y′ eines beliebigen andern ebenen Systems darstellen, welches mit jenem die Spitze A gemeinschaftlich hat, so hat man, um zu der verlangten Gleichung zu gelangen, in die gegebene für u, u′ ihre in den Gleichungen (1. b.) oder (1. c.) angegebenen Werthe zu setzen, und es sind dazu die zwei vordern Gleichungen (1. b.) zu benutzen, wenn die neue Gleichung in schiefen Coordinaten ausgedrückt werden soll, hingegen die zwei hintern in (1. b.) oder in (1. c.) stehenden, wenn die neue Gleichung in senkrechten Coordinaten aufgefunden werden soll.

Nimmt man hierzu erstlich die zwei vordern in (1. b.) angezeigten Gleichungen, so erhält man als neue in schiefen Coordinaten ausgedrückte Gleichung:

(15. a.) $$(\delta C^2 + \delta' C'^2)\, y^2 + (\delta C_1^2 + \delta' C_1'^2)\, y'^2 + 2\,(\delta C C_1 + \delta' C' C_1')\, y y' = \nu,$$

welche aus der (13. a.) durch Vertauschung von α, α', μ mit δ, δ', ν und von A, A′ und A_1, A_1' mit C, C′ und C_1, C_1' hervorgeht. Wählt man die beiden neuen Axenrichtungen A Y und A Y′ so, dass

(15. b.) $$\delta C C_1 + \delta' C' C_1' = 0$$

wird, so verwandelt sich die Gleichung (15. a.) in:

(15. c.) $$(\delta C^2 + \delta' C'^2)\, y^2 + (\delta C_1^2 + \delta' C_1'^2)\, y'^2 = \nu,$$

und hat so die erste in (11. a.) stehende Form angenommen. Um der Bedingung (15. b.) zu genügen, kann man im Allgemeinen eines der zwei Paare von Projectionszahlen C, C′ und C_1, C_1' nach Gefallen wählen, und dann doch noch das andere Paar jener Bedingung gemäss bestimmen, oder mit andern Worten, man kann eine der neuen Grundaxen A Y und A Y′ nach Belieben nehmen und zu ihr dann noch die zweite so aufsuchen, dass die neue Gleichung von der Form (15. c.) wird. Bei dieser Bestimmung der Axen im neuen Systeme hat man auf nichts weiter zu sehen, als dass die beiden Richtungen A Y und A Y′ nicht in eine Gerade fallen, weil sie sonst die Axen eines ebenen Systems vorzustellen nicht vermöchten. Da die Polaraxen A 𝔜′ oder A 𝔜 senkrecht auf der Grundaxe A Y oder A Y′ stehen, und $(\mathcal{A})C_1 + (\mathcal{A}')C_1'$ oder $(\mathcal{A}_1)C + (\mathcal{A}_1')C'$ den Kosinus des Winkels vorstellt, welchen die Richtungen A 𝔜 und A Y′ oder A 𝔜′ und A Y mit einander machen, so ist $(\mathcal{A})C_1 + (\mathcal{A}')C_1' = 0$ sowohl als $(\mathcal{A}_1)C + (\mathcal{A}_1')C' = 0$, und eliminirt man mittelst dieser Gleichung die Grössen C_1 und C_1' oder C und C′ aus der Bedingung (15. b.), so verwandelt sich dieselbe, weil weder C_1 noch C und eben so weder C_1' noch C′ null werden kann, in:

(15. d.) $$\delta C (\mathcal{A}') = \delta' C' (\mathcal{A}) \quad \text{oder} \quad \delta C_1 (\mathcal{A}_1') = \delta' C_1' (\mathcal{A}_1).$$

Setzt man aber in die gegebene Gleichung von der zweiten in (11. a.) stehenden Form, um zu einer neuen in senkrechten Coordinaten zu gelangen, für u und u′ ihre in den zwei hintern Gleichungen (1. c.) angezeigten Werthe, so kommt man zu der folgenden neuen Gleichung:

(16. a.) $$\left(\delta \frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2} + \delta' \frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2}\right) v^2 + \left(\delta \frac{(\Gamma_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \delta' \frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\right) v'^2 + 2\,\frac{\delta (\Gamma)(\Gamma_1) + \delta' (\Gamma')(\Gamma_1')}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1'}\, v v' = \nu,$$

welche sich auch aus der (14. a.) durch Vertauschung von α, α', μ mit δ, δ', ν und von (A), (A') und (A_1), (A'_1) mit (Γ), (Γ') und (Γ_1), (Γ'_1) erhalten lässt. Wählt man die Lage der beiden neuen Polaraxen A𝔜 und A𝔜′ so, dass

$$\delta(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'(\Gamma')(\Gamma'_1)=0 \qquad \textbf{(16. b.)}$$

wird, so verwandelt sich die Gleichung (16. a.) in:

$$\left(\delta\frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2}+\delta'\frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2}\right)v^2+\left(\delta\frac{(\Gamma_1)^2}{\mathfrak{D}_1^2}+\delta'\frac{(\Gamma'_1)^2}{\mathfrak{D}_1^2}\right)v'^2=\nu, \qquad \textbf{(16. c.)}$$

und hat nun wieder die zweite der in (11. a.) angezeigten Formen. Um der Bedingung (16 b.) zu genügen, kann man im Allgemeinen eines der zwei Paare von Projectionszahlen (Γ), (Γ') und (Γ_1), (Γ'_1) nach Gefallen wählen, und dann doch noch das andere Paar jener Bedingung gemäss dazu bestimmen, oder mit andern Worten, man kann die eine der Polaraxen A𝔜 und A𝔜′ im neuen Systeme nach Belieben nehmen, und zu ihr dann noch die zweite so aufsuchen, dass die neue Gleichung von der Form (16. c.) wird. Bei dieser Bestimmung der Polaraxen im neuen Systeme hat man auf weiter nichts zu sehen, als dass die beiden Richtungen A𝔜 und A𝔜′ nicht in eine Gerade fallen, weil sie sonst die Polaraxen eines ebenen Systems vorzustellen nicht vermöchten. Da die Grundaxen AY oder AY′ senkrecht auf den Polaraxen A𝔜′ oder A𝔜 stehen und $A(\Gamma_1)+A'(\Gamma'_1)$ sowohl als $A_1(\Gamma)+A'_1(\Gamma')$ der Kosinus des Winkels ist, den die Richtungen AY oder AY′ und A𝔜′ oder A𝔜 mit einander machen, so ist $A(\Gamma_1)+A'(\Gamma'_1)=0$ sowohl als $A_1(\Gamma)+A'_1(\Gamma')=0$, und eliminirt man mittelst dieser Gleichung die Grössen (Γ_1) und (Γ'_1) oder (Γ) und (Γ') aus der Bedingung (16. b.), so verwandelt sich dieselbe, weil weder (Γ'_1) oder (Γ_1) noch (Γ') oder (Γ) null sein kann, in:

$$\delta(\Gamma)A'=\delta'(\Gamma')A \quad \text{oder} \quad \delta(\Gamma_1)A'_1=\delta'(\Gamma'_1)A_1. \qquad \textbf{(16. d.)}$$

188) Ist eine ebene Curve zweiter Ordnung an einem dazu geeigneten Coordinatensysteme durch eine Gleichung gegeben, welche einer der in (11. b.) oder (11. c.) stehenden Formen angehört, und trägt man diese nach Art des in den Nummern 186. und 187. eingehaltenen Verfahrens in ein beliebiges anderes System über, welches mit dem vorigen die Spitze gemeinschaftlich hat und derselben Ebene angehört, so wird man auf den ersten Blick gewahr, dass kein solches neues System eine Gleichung geben kann, welche wieder eine der in (11. b.) oder (11. c.) stehenden Formen hätte. Soll mithin eine solche Form dennoch an neuen Coordinatensystemen erzielbar sein, so müsste es dadurch geschehen, dass diese eine andere Spitze als das ursprüngliche haben; wir tragen daher zuvörderst die in (11. b.) stehenden Gleichungen, welche sich auf die Axen AX, AX′ beziehen, in ein anderes Coordinatensystem über, welches einen andern, in der durch AX und AX′ hindurch gehenden Ebene liegenden Punct O zur Spitze hat und dessen Axen denen AX, AX′ parallel und gleichläufig sind und durch OX, OX′ bezeichnet werden. Stellen ξ, ξ' oder η, η' die schiefen oder senkrechten Coordinaten des Punctes O an den Axen AX, AX′ vor, und x_0, x'_0 oder u_0, u'_0 die an den Axen OX, OX′ von demselben Puncte, welcher an den Axen AX, AX′ die x, x′ oder u, u′ giebt, so erhalten wir die Gleichungen, welche an den neuen Axen dieselbe Curve darstellen, wie die Gleichung (11. b.) an den ursprünglichen, wenn wir in die letztern für x, x′ oder u, u′ ihre in den Gleichungen (4.) angegebenen Werthe setzen. So geht die erste der in (11. b.) stehenden Gleichungen über in:

$$\alpha' x_0'^2+2\gamma x_0+2\alpha'\xi' x'_0+\alpha'\xi'^2+2\gamma\xi=0, \qquad \textbf{(17. a.)}$$

und die zweite in (11. b.) stehende Gleichung verwandelt sich dadurch in:

(17. b.) $$\delta' u_0'^2 + 2\zeta u_0 + 2\delta'\eta' u_0' + \delta'\eta'^2 + 2\zeta\eta = 0.$$

In diesen Gleichungen verschwindet das Glied, welches keine der unbestimmten Coordinaten x_0, x_0' oder u_0, u_0' in sich trägt, wenn man den Punct O so wählt, dass

(17. c.) $$\alpha'\xi'^2 + 2\gamma\xi = 0 \quad \text{oder} \quad \delta'\eta'^2 + 2\zeta\eta = 0$$

wird, wodurch die Gleichung (17. a.)

(17. d.) $$\alpha' x_0'^2 + 2\gamma x_0 + 2\alpha'\xi' x_0' = 0,$$

oder die Gleichung (17. b.)

(17. e.) $$\delta' u_0'^2 + 2\zeta u_0 + 2\delta'\eta' u_0' = 0$$

wird. Die Gleichungen (17. c.) gehen aus denen (11. b.) hervor, wenn man in letztere ξ, ξ' für x, x' oder η, η' für u, u' setzt, und sagen mithin nichts anderes, als dass der Punct O derjenigen Curve angehören soll, deren Gleichung man in ein neues System übertragen will, so wie umgekehrt jeder Punct der zur vordern oder hintern Gleichung (11. b.) gehörigen Curve, weil dessen Coordinaten die vordere oder hintere Bedingung (17. c.) wahr machen, wenn er zur Spitze O des neuen Systems genommen wird, an diesem entweder zur Gleichung (17. d.) oder (17. e.) hinführt. Diese Gleichungen stellen also dieselbe Curve, welche durch die Gleichungen (11. b.) an den ursprünglichen Axen gegeben war, an einem neuen Systeme dar, dessen Spitze in dem Puncte der Curve liegt, welcher zur Ordinate an der Axe A X′ entweder ξ' oder η' hat. Keine von den beiden Gleichungen (17. d. oder e.) kann eine der in (11. b.) enthaltenen Formen annehmen, wenn nicht ξ' oder η' null wird, d. h. wenn nicht das neue System wieder in das ursprüngliche zurückgeht; es lassen sich indessen aus den Gleichungen (17. d. und e.) andere von der Form der in (11. b.) enthaltenen ableiten, wenn man durch die jetzige Spitze O neue Axen OY, OY′ von einer andern Richtung, als die OX, OX′ haben, legt, und an ihnen die Curve darstellt.

189) Bezeichnet man zu solchem Ende durch y, y' und v, v' die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen O Y, O Y′ von demjenigen Curvenpuncte, der an den Axen O X, O X′ die x_0, x_0' und u_0, u_0' giebt, so erhält man die auf die Axen O Y, O Y′ bezogene Gleichung der Curve, welche an den Axen O X, O X′ die (17. d.) zur Gleichung hat, in schiefen Coordinaten ausgedrückt, wenn man in die (17. d.) für x_0, x_0' die Werthe setzt, welche die vordern (1. a.) für x, x' liefern. So findet man:

(18. a.) $$\alpha' A'^2 y^2 + \alpha' A_1'^2 y'^2 + 2\alpha' A' A_1' y y' + 2(\gamma A + \alpha'\xi' A')y + 2(\gamma A_1 + \alpha'\xi' A_1')y' = 0,$$

und nun sieht man auf den ersten Blick, dass diese Gleichung nur dann die Form der ersten in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen annehmen kann, wenn entweder $A' = 0$ oder $A_1' = 0$ ist, d. h. wenn entweder die Axe O Y oder die O Y′ mit der O X oder A X parallel läuft. Im ersten Falle verwandelt sich die Gleichung (18. a.) in:

$$\alpha' A_1'^2 y'^2 \pm 2\gamma y + 2(\gamma A_1 + \alpha'\xi' A_1')y' = 0,$$

weil $A' = 0$ auch $\pm A = 1$ nach sich zieht, und diese nimmt die verlangte Form an, wenn man die zweite Axe O Y′ so wählt, dass

(18. b.) $$\gamma A_1 + \alpha'\xi' A_1' = 0$$

wird, wobei jene Gleichung übergeht in:

(18. c.) $$\alpha' A_1'^2 y'^2 \pm 2\gamma y = 0,$$

die nach Belieben das obere oder untere Vorzeichen in sich aufnehmen kann. Im andern Falle aber, wo man $A_1' = 0$ und als Folge $\pm A_1 = 1$ sein lässt, verwandelt sich die Gleichung (18. a.) in:

$$\alpha' A'^2 y^2 \pm 2\gamma y' + 2(\gamma A + \alpha' \xi' A') y = 0, \qquad \textbf{(19. a.)}$$

und diese nimmt die verlangte Form an, wenn man die andere Axe O Y so wählt, dass

$$\gamma A + \alpha' \xi' A' = 0 \qquad \textbf{(19. b.)}$$

wird, wobei sie übergeht in:

$$\alpha' A'^2 y^2 \pm 2\gamma y' = 0. \qquad \textbf{(19. c.)}$$

Die Bedingung (18. b.) sagt aus, dass sich die Projectionszahlen A_1 und A_1' zu einander verhalten müssen, wie die Zahlen $\alpha' \xi'$ und $-\gamma$, sie schreibt also der Axe O Y′ nur eine einzige Gerade vor, in der sie liegen muss, wenn diese Zahlen völlig gegebene sind, und da die Bedingung (19. b.) den Projectionszahlen A, A′ dasselbe Verhältniss, also der Axe O Y die gleiche Richtung vorschreibt, somit im einen Falle die Axe O Y′ die gleiche Richtung hat, wie die Axe O Y im andern Falle, so folgt, dass die Gleichungen (18. c.) und (19. c.) auf ein und dasselbe Coordinatensystem sich beziehen, nur dass die beiden Axen hier und dort ihre Namen gegenseitig vertauscht haben. Weil ferner das Verhältniss $\alpha' \xi' : -\gamma$ bei derselben Curve ein anderes wird, so wie ξ' einen andern Werth erhält, welches geschieht, wenn ein anderer Punct der Curve zur Spitze O des Systems genommen wird, so überzeugt man sich, dass durch jeden Punct der Curve nur ein einziges Coordinatensystem gelegt werden kann, dessen eine Axe der O X oder A X parallel ist, während die schiefen Projectionszahlen der andern an den Axen A X, A X′ durch ihr Verhältniss $\alpha' \xi' : -\gamma$ gegeben sind, wesswegen diese zweite Axe in eine völlig bestimmte Gerade fällt, die jedoch bei jedem andern Punct der Curve eine andere Richtung annimmt.

Will man aber in senkrechten Coordinaten die auf die Axen O Y, O Y′ bezogene Gleichung von derjenigen Curve aufsuchen, deren Gleichung an den Axen O X, O X′ die (17. d.) ist, so muss man in diese letztere für x_0 und x_0' die Werthe setzen, welche die vordern Gleichungen (1. c.) für x, x′ liefern, und so erhält man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}\alpha' \frac{(A'^2)}{\mathfrak{D}^2} v^2 + \alpha' \frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 + 2\alpha' \frac{(A')(A_1')}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1'} v v' + 2\left(\gamma \frac{(A)}{\mathfrak{D}} + \alpha' \xi' \frac{(A')}{\mathfrak{D}}\right) v & \\ + 2\left(\gamma \frac{(A_1)}{\mathfrak{D}_1'} + \alpha' \xi' \frac{(A_1')}{\mathfrak{D}_1'}\right) v' = 0, &\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \qquad \textbf{(20. a.)}$$

und man wird auf den ersten Blick gewahr, dass diese nicht anders in die Form der zweiten Gleichung (11. b.) oder (11. c.) übergehen kann, als wenn entweder $(A') = 0$ oder $(A_1') = 0$ ist, welches im ersten Falle $\pm (A) = 1$ und im andern Falle $\pm (A_1) = 1$ nach sich zieht, und so zu erkennen giebt, dass entweder die Polaraxe O 𝔜 oder die O 𝔜′ mit der Axe A X parallel laufen muss. Lässt man $(A') = 0$ sein, so wird die Gleichung (19. a.):

$$\alpha' \frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 \pm \frac{2\gamma}{\mathfrak{D}} v + 2\left(\gamma \frac{(A_1)}{\mathfrak{D}_1'} + \alpha' \xi' \frac{(A_1')}{\mathfrak{D}_1'}\right) v' = 0,$$

und diese nimmt die verlangte Form an, wenn man die andere Polaraxe O 𝔜′ so wählt, dass

$$\gamma (A_1) + \alpha' \xi' (A_1') = 0 \qquad \textbf{(20. b.)}$$

wird, wobei sie übergeht in:

(20. c.) $$\alpha' \frac{(\mathcal{A}'_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 \pm \frac{2\gamma}{\mathfrak{D}} v = 0,$$

in welcher Gleichung man nach Belieben das obere oder untere Vorzeichen nehmen kann. Die Bedingung (20. b.) sagt aus, dass sich die Projectionszahlen $(\mathcal{A}_1)$ und $(\mathcal{A}'_1)$ zu einander wie die Zahlen $\alpha'\xi'$ und $-\gamma$ verhalten müssen, dass also die Gerade, in welcher die Polaraxe $O\mathfrak{Y}'$ liegen muss, eine völlig bestimmte ist, wenn die Zahlen $\alpha'\xi'$ und $-\gamma$ bestimmt gegebene sind, und da das Verhältniss $\alpha'\xi' : -\gamma$ bei einer und derselben Curve sich ändert, so wie ξ' einen andern Werth annimmt, d. h. sobald ein anderer Punct der Curve zur Spitze O des Coordinatensystems gemacht wird, so kann man überzeugt sein, dass sich durch jeden Punct der Curve nur ein einziges Coordinatensystem legen lässt, dessen eine Polaraxe mit der Axe AX parallel läuft, und dessen andere Polaraxe in der Geraden liegt, welche schiefe Projectionszahlen liefert, die sich wie die gegebenen Zahlen $\alpha'\xi'$ und $-\gamma$ zu einander verhalten. Es ändert sich folglich die Richtung dieser Geraden mit dem Puncte der Curve ab, welcher zur Spitze O genommen wird; denn es lässt sich wie zuvor zeigen, dass man zu demselben Coordinatensystem hingeführt wird, wenn man $(\mathcal{A}'_1)$ statt $(\mathcal{A}')$ null sein lässt.

Da zum Entstehen der Gleichung (20. c.) erforderlich ist, dass die Polaraxen des neuen Systems ganz die gleichen Richtungen einnehmen, welche beim Entstehen der Gleichung (18. c.) von den Grundaxen eingenommen worden sind, so führt dieser Umstand noch zu der Einsicht hin, dass, wenn man für einen bestimmten Punct O der Curve das Coordinatensystem hat, an welchem die Curve durch eine der Gleichungen (18. c.) oder (20. c.) dargestellt wird, man zugleich auch das Coordinatensystem kennt, an welchem die Curve durch die andere von diesen beiden Gleichungen dargestellt wird; man braucht zu diesem Ende im vorigen Coordinatensysteme nur die Grund- und Polaraxen mit einander zu vertauschen.

190) Auf dieselbe Weise, wie wir zur Kenntniss der Coordinatensysteme gelangt sind, an welchen die Curve, die an einem dazu geeigneten Coordinatensysteme durch die erste der Gleichungen (11. b.) dargestellt wird, wieder eine Gleichung von einer der in (11. b.) und (11. c.) angezeigten Formen giebt, lässt sich derselbe Umstand auch in Betreff der zweiten Gleichung (11. b.) ins Licht stellen. Bezeichnen wir nämlich wieder durch y, y′ und v, v′ die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen OY, OY′ von demjenigen Puncte der Curve, welcher an den Axen OX, OX′ die x_0, x'_0 und u_0, u'_0 giebt, so erhält man die auf die Axen OY und OY′ bezogene Gleichung der Curve, die an den Axen OX, OX′ die (17. e.) zur Gleichung hat, in schiefen Coordinaten ausgedrückt, wenn man in die (17. e.) für u_0, u'_0 die Werthe setzt, welche die vordern Gleichungen (1. b.) für u, u′ liefern. So findet man:

(21. a.) $$\delta' C'^2 y^2 + \delta' C_1'^2 y'^2 + 2\delta' C' C'_1 y y' + 2(\zeta C + \delta'\eta' C') y + 2(\zeta C_1 + \delta'\eta' C'_1) y' = 0,$$

welche Gleichung aus der (18. a.) hervorgeht, wenn man α', γ mit δ', ζ, so wie A, A′ mit C, C′ und A_1, A'_1 mit C_1, C'_1 vertauscht, und diese Gleichung giebt auf den ersten Blick zu erkennen, dass sie nur dann die Form der ersten in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen annehmen kann, wenn man entweder $C'=0$ oder $C'_1=0$ sein lässt, womit gesagt ist, dass entweder die Axe OY oder die OY′ senkrecht auf der OX′ oder AX′ stehen muss, oder mit andern Worten, dass die Axe OY oder die OY′ mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}$ parallel laufen muss, und aus $C'=0$ folgt $C=\pm\mathfrak{C}$, so wie $C_1=\pm\mathfrak{C}$ aus $C'_1=0$. Nimmt man $C'=0$ an, so verwandelt sich die Gleichung (21. a.) in:

$$\delta' C_1'^2 y'^2 \pm 2\zeta\mathfrak{C} y + 2(\zeta C_1 + \delta'\eta' C'_1) y' = 0,$$

und diese nimmt die verlangte Form an, wenn man die andere Axe $\mathrm{O\,Y'}$ so wählt, dass

$$\zeta C_1 + \delta' \eta' C_1' = 0 \tag{21. b.}$$

wird, wobei sie übergeht in:

$$\delta' C_1'^2 y'^2 \pm 2 \mathfrak{C} \zeta y = 0, \tag{21. c.}$$

in welcher Gleichung man das obere oder untere Vorzeichen nach Belieben nehmen kann. Die Bedingung (21. b.) verlangt, dass sich die Projectionszahlen C_1 und C_1' wie die Zahlen $\delta'\eta'$ und $-\zeta$ verhalten sollen, und weist daher die Axe $\mathrm{O\,Y'}$ in eine völlig bestimmte Gerade hinein, wenn die Zahlen $\delta'\eta'$ und $-\zeta$ gänzlich gegebene sind; weil aber das Verhältniss $\delta'\eta' : -\zeta$ sich nothwendiger Weise zugleich mit dem Werthe η', d. h. mit dem Puncte der Curve, welchen man zur Coordinatenspitze macht, ändert, so folgt aus ihr, dass die Richtung der zweiten Axe $\mathrm{O\,Y'}$ an jedem andern Punct der Curve eine andere wird. Hätte man $C_1' = 0$ sein lassen, so wäre man auf ein Coordinatensystem hingeführt worden, dessen Axen dieselben Lagen wie so eben angenommen hätten nur mit dem Unterschiede, dass seine Axe $\mathrm{O\,Y}$ dahin gekommen wäre, wo zuvor die $\mathrm{O\,Y'}$ lag und umgekehrt, wodurch indessen nur in den Namen der Axen eine Veränderung vorfällt.

Soll dagegen die auf die Axen $\mathrm{O\,Y}$, $\mathrm{O\,Y'}$ bezogene Gleichung von derjenigen Curve, welche an den Axen $\mathrm{O\,X}$, $\mathrm{O\,X'}$ die (17. e.) zur Gleichung hat, in senkrechten Coordinaten ausgedrückt werden, so wird dieser Zweck erreicht, wenn man in die Gleichung (17. e.) für u_0 und u_0' diejenigen Werthe setzt, welche die zwei hintern Gleichungen (1. c.) für u und u′ liefern. So gelangt man zu der nachstehenden Gleichung:

$$\delta' \frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2} v^2 + \delta' \frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 + 2\delta' \frac{(\Gamma')(\Gamma_1')}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'} v v' + 2\left(\zeta \frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}} + \delta'\eta' \frac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}}\right) v + 2\left(\zeta \frac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}_1'} + \delta'\eta' \frac{(\Gamma_1')}{\mathfrak{D}_1'}\right) v' = 0, \tag{22. a.}$$

welche Gleichung auch aus der (20. a.) hervorgeht, wenn man α' und γ mit δ' und ζ, so wie (A), (A') und (A_1), (A_1') mit (Γ), (Γ') und (Γ_1), (Γ_1') vertauscht, und ein Blick auf sie giebt zu erkennen, dass sie nur dann die Form der zweiten in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen annehmen kann, wenn entweder $(\Gamma') = 0$ oder $(\Gamma_1') = 0$ ist, d. h. wenn entweder die Polaraxe $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}$ oder die $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}'$ mit der Axe $\mathrm{O\,X'}$ oder $\mathrm{A\,X'}$ einen rechten Winkel macht, oder mit andern Worten, wenn eine der Polaraxen $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}$ oder $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}'$ mit der $\mathrm{A}\,\mathfrak{X}$ parallel läuft, und aus $(\Gamma') = 0$ folgt $(\Gamma) = \pm \mathfrak{C}$, so wie $(\Gamma_1) = \pm \mathfrak{C}$ aus $(\Gamma_1') = 0$. Lässt man $(\Gamma') = 0$ sein, so verwandelt sich die Gleichung (22. a.) in:

$$\delta' \frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 \pm 2\zeta \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} v + 2\left(\zeta \frac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}_1'} + \delta'\eta' \frac{(\Gamma_1')}{\mathfrak{D}_1'}\right) v' = 0,$$

und diese nimmt die verlangte Form an, wenn man die andere Polaraxe $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}'$ so wählt, dass

$$\zeta (\Gamma_1) + \delta'\eta' (\Gamma_1') = 0 \tag{22. b.}$$

wird, wobei sie übergeht in:

$$\delta' \frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} v'^2 \pm 2\zeta \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} v = 0, \tag{22. c.}$$

in welcher Gleichung wieder nach Belieben das obere oder untere Vorzeichen genommen werden kann. Die Bedingung (22. b.) verlangt, dass sich die Projectionszahlen (Γ_1) und (Γ_1') zu einander verhalten, wie die gegebenen Zahlen $\delta'\eta'$ und $-\zeta$, und weist sonach die Richtung $\mathrm{O}\,\mathfrak{Y}'$ in eine Gerade hinein, die, wenn die Zahlen $\delta'\eta'$ und $-\zeta$ gänzlich gegebene sind, eine völlig bestimmte ist; weil aber das Verhältniss $\delta'\eta' : -\zeta$ sich nothwendiger Weise mit dem Werthe η' zugleich abändert, d. h. mit dem Puncte der Curve, welchen man zur Coordinaten-

spitze macht, so folgt aus ihr, dass die Richtung der Polaraxe $O\mathfrak{Y}'$ an jedem neuen Punct der Curve eine andere wird. Hätte man $(\Gamma'_1)=0$ sein lassen, so wäre man ganz so wie bei der Gleichung (19. c.) zu einem Coordinatensysteme hingeführt worden, dessen Axen in dieselben Geraden gefallen wären, wie die so eben bestimmten, nur dass jetzt die Polaraxe $O\mathfrak{Y}$ in die Gerade gefallen wäre, in welche zuvor die $O\mathfrak{Y}'$ zu liegen kam, und die Polaraxe $O\mathfrak{Y}'$ jetzt dahin, wo zuvor die $O\mathfrak{Y}$ lag, wodurch indessen das Coordinatensystem kein anderes wird, sondern blos die Namen seiner Axen vertauscht.

Da durch die Bedingung (22. b.) den Projectionszahlen (Γ_1) und (Γ'_1) genau dasselbe Verhältniss vorgeschrieben wird, wie denen C_1 und C'_1 durch die Bedingung (21. b.), wenn man sich unter O in beiden Fällen einen und denselben Punct der Curve denkt, und dieses zur Folge hat, dass in dem Coordinatensystem, an welchem die Gleichung (22. c.) entstehen soll, die Polaraxen $O\mathfrak{Y}$ und $O\mathfrak{Y}'$ völlig die gleiche Lage haben müssen, wie die Grundaxen OY und OY' in dem Coordinatensysteme, an welchem die Gleichung (21. c.) entstehen soll, so ist offenbar durch eines dieser beiden Coordinatensysteme auch das andere gegeben; die Grundaxen des letztern sind nämlich die Polaraxen von ersterm, und umgekehrt sind die Polaraxen des letztern die Grundaxen von ersterm.

191) Beim Aufsuchen derjenigen Coordinatensysteme, an welchen Gleichungen von einer der in (11. a.) angegebenen Formen wieder Gleichungen von denselben Formen liefern, wozu die nöthigen Bestimmungen in Nr. 186. und Nr. 187. gegeben worden sind, hat es sich gezeigt, dass die eine Grund- oder Polaraxe vom gesuchten Systeme fast ganz nach Belieben genommen werden konnte, nur nicht so, dass die andere mit ihr in eine und dieselbe Gerade zu liegen kommt. Es giebt mithin unzählig viele Systeme von der verlangten Art, und man kann desswegen an das zu suchende System noch weitere Anforderungen machen, wodurch es ausser der beabsichtigten Haupteigenschaft noch Nebeneigenschaften in sich aufnimmt, wie wir noch kurz zeigen werden. So kann man erstlich unter jenen unzählig vielen Coordinatensystemen dasjenige oder diejenigen aussuchen wollen, an welchen eine Gleichung von einer der in (11. a.) aufgestellten Formen nicht blos in schiefen, sondern zugleich auch in senkrechten Coordinaten wieder eine Gleichung von einer jener Formen liefert. Dann wird von dem neuen Systeme verlangt, wenn die gegebene Gleichung von der ersten in (11. a.) enthaltenen Form ist, dass dessen Axen nicht blos die Bedingung (13. b.) oder (13. d.), sondern zugleich auch die (14. b.) oder (14. d.) erfüllen, und wenn die gegebene Gleichung von der zweiten in (11. a.) enthaltenen Form ist, dass die Axen des neuen Systems nicht blos die Bedingung (15. b.) oder (15. d.), sondern zugleich auch die (16. b.) oder (16. d.) erfüllen. Die Axen des so bedingten neuen Systems werden demnach gegeben durch die Gleichungen

(23. a.) $$\alpha A A_1 + \alpha' A' A'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha(A)(A_1) + \alpha'(A')(A'_1) = 0$$

oder

(23. b.) $$\begin{cases} \alpha A(\Gamma') = \alpha' A'(\Gamma) \quad \text{und} \quad \alpha(A)C' = \alpha'(A')C\,, \\ \alpha A_1(\Gamma'_1) = \alpha' A'_1(\Gamma_1) \quad \text{und} \quad \alpha(A_1)C'_1 = \alpha'(A'_1)C_1\,, \end{cases}$$

wenn die gegebene Gleichung von der ersten Form (11. a.) ist, und durch die Gleichungen

(23. c.) $$\delta C C_1 + \delta' C' C'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \delta(\Gamma)(\Gamma_1) + \delta'(\Gamma')(\Gamma'_1) = 0$$

oder

(23. d.) $$\begin{cases} \delta C(A') = \delta' C'(A) \quad \text{und} \quad \delta(\Gamma)A' = \delta'(\Gamma')A\,, \\ \delta C_1(A'_1) = \delta' C'_1(A_1) \quad \text{und} \quad \delta(\Gamma_1)A'_1 = \delta'(\Gamma'_1)A_1\,, \end{cases}$$

wenn die gegebene Gleichung von der zweiten Form (11. a.) ist. Wir werden, obgleich die Bedingungen (23. a. und c.) hier schneller zum Ziele führen können, die gegenwärtige Untersuchung an den Bedingungen (23. b.) und (23. d.) fortführen, weil so die eigenthümlichen Relationen am schiefwinkligen Coordinatensysteme stärker hervortreten. Hierbei kommt zu Statten, dass die Gleichungen (23. d.) aus denen (23. b.) hervorgehen, wenn man α und α' mit δ und δ' so wie die Grund- und Polaraxen mit einander vertauscht, so dass blos die einen der genannten beiderlei Bedingungen behandelt zu werden brauchen, indem die dabei erhaltenen Resultate durch die gleiche Vertauschung auch auf die andern Bedingungen übertragbar sind.

Um den Inhalt der Gleichungen (23. b.) zu ermitteln, bemerken wir zuvörderst, dass die obern dieser Gleichungen von den Richtungen A Y und A $\mathfrak{Y}$ genau dasselbe aussagen, was die untern von den Richtungen A Y′ nnd A $\mathfrak{Y}'$, so dass wir auch hier wieder nur die einen von den beiden zu verfolgen brauchen. Sodann bemerken wir noch, dass wenn man ein Coordinatensystem aufgefunden hat, an welchem die erste Bedingung (23. a.) statt hat, und desswegen die Curve eine Gleichung von der ersten in (11. a.) enthaltenen Form liefert, und man denkt sich ein neues, dessen Grundaxen die Polaraxen des vorigen sind, und dessen Polaraxen, in Folge dessen die Grundaxen des vorigen Systems werden, so hat an diesem neuen Systeme die hintere Bedingung (23. a.) statt, weil in ihm (A), (A') und (A_1), (A'_1) dieselben Werthe annehmen, welche im vorigen A, A′ und A_1, A'_1 hatten, es liefert daher die gleiche Curve an diesem neuen Systeme eine Gleichung von der zweiten in (11. a.) enthaltenen Form. Demnach giebt immer, wie schon weiter oben bemerkt worden ist, ein und dasselbe Coordinatensystem gleichzeitig, blos dadurch, dass man in ihm die Grund- und Polaraxen mit einander verwechselt, sowohl eine Gleichung der ersten wie der zweiten in (11. a.) enthaltenen Formen; und dabei macht es keinen Unterschied ob die Curve durch eine Gleichung von der ersten oder zweiten dieser Formen gegeben wird, weil auch C, C′ und C_1, C'_1 in (Γ), (Γ') und (Γ_1), $\Gamma'_1)$ übergehen, wenn man die Grundaxen in Polaraxen und umgekehrt diese in jene verwandelt. Wenn wir daher jetzt nach dem Coordinatensysteme fragen, an welchem die ebene Curve zweiter Ordnung sowohl eine Gleichung von der ersten wie von der zweiten in (11. a.) enthaltenen Form liefert, so kann diess nicht in dem Sinne gemeint sein, dass dabei eine wechselseitige Vertauschung der Grund- und Polaraxen gestattet wird, sondern es wird angenommen, dass dieselben zwei Richtungen, in Bezug auf die beiderlei neuen Gleichungen die Grundaxen des Coordinatensystems hergeben und dieselben zwei auf jenen senkrechten die Polaraxen. In diesem Sinne hat man demnach die Projectionszahlen A, A′ und C, C′ als der einen Grundaxe A Y, die A_1, A'_1 und C_1, C'_1 als der andern Grundaxe A Y′ und eben so (A), (A') und (Γ), (Γ') als der Polaraxe A $\mathfrak{Y}$, so wie (A_1), (A'_1) und (Γ_1), (Γ'_1) als der Polaraxe A $\mathfrak{Y}'$ angehörig sich vorzustellen. Aber eben weil man die bei einander stehenden zwei schiefen und zwei senkrechten Projectionszahlen als einer und derselben Richtung entsprechend sich zu denken hat, ist den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (105. a. und b.) zur Folge:

$$\left.\begin{array}{l} C = A + A'\cos W,\ C' = A\cos W + A' \text{ und } A\sin^2 W = C - C'\cos W,\ A'\sin^2 W = C' - C\cos W, \\ \text{so wie auch} \\ \qquad (\Gamma) = (A) + (A')\cos W, \qquad (\Gamma') = (A)\cos W + (A') \\ \text{und} \\ \qquad (A)\sin^2 W = (\Gamma) - (\Gamma')\cos W, \quad (A')\sin^2 W = (\Gamma') - (\Gamma)\cos W, \end{array}\right\} \quad \textbf{(24. a.)}$$

und diesen ganz ähnliche Gleichungen liefern auch die beiden andern Richtungen. Setzt man nun erstlich in die zweite obere Gleichung (23. b.) für $(\mathit{\Delta})$, $(\mathit{\Delta}')$ und C, C' ihre Werthe aus den Gleichungen (24. a.) ein, so verwandelt sich dieselbe, nachdem man in sie für $A(\mathit{\Gamma}')$ seinen Werth aus der ersten obern Gleichung (23. b.) eingesetzt hat, in:

(24. b.) $$[A(\mathit{\Gamma}) - A'(\mathit{\Gamma}')](\alpha + \alpha')\cos W = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha} A'(\mathit{\Gamma});$$

setzt man aber in die erste obere Gleichung (23. b.) für A, A' und $(\mathit{\Gamma})$, $(\mathit{\Gamma}')$ ihre Werthe aus den Gleichungen (24. a.) ein, so verwandelt sich dieselbe, nachdem man in ihr für $(\mathit{\Delta})$C' seinen Werth aus der zweiten obern Gleichung (23. b.) eingesetzt hat, in:

(24. c.) $$[C(\mathit{\Delta}) - C'(\mathit{\Delta}')](\alpha + \alpha')\cos W = \frac{\alpha'^2 - \alpha^2}{\alpha} C(\mathit{\Delta}'),$$

und aus den obern Gleichungen (23. b.) findet man:

(24. d.) $$\frac{A}{A'}\frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')}\frac{C'}{C} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Man kann aber, wenn nicht $\alpha + \alpha' = 0$ ist, welcher besondere Fall später (Nr. 194.) zur Sprache kommen wird, den Gleichungen (24. b.) und (24. c.) auch die folgende Form geben:

$$\frac{A}{A'} - \frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha \cos W} \quad \text{und} \quad \frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')} - \frac{C'}{C} = \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha \cos W},$$

und nun ersieht man aus diesen Gleichungen in Verbindung mit denen (24. d.), dass sowohl $\frac{A}{A'}$ und $-\frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})}$ wie auch $\frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')}$ und $-\frac{C'}{C}$ die zwei Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - \frac{\alpha' - \alpha}{\alpha \cos W} z - \frac{\alpha'}{\alpha} = 0$$

sind, und dass diese Gleichung für jene Grössen immer zwei reelle Werthe liefert, weil

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{(\alpha' - \alpha)^2}{4\alpha^2 \cos^2 W} = \frac{(\alpha' - \alpha)^2 + 4\alpha\alpha' \cos^2 W}{4\alpha^2 \cos W} = \frac{\alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2W + \alpha^2}{4\alpha^2 \cos^2 W}$$

ist und also die beim Auflösen der quadratischen Gleichung unter das Wurzelzeichen tretende Zahl stets eine positive ist. Es folgt hieraus dass entweder

$$\frac{A}{A'} = \frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')} \quad \text{und} \quad \frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})} = \frac{C'}{C} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{A'} = -\frac{C'}{C} \quad \text{und} \quad \frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')} = -\frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})}$$

sein muss, und es können hier blos die ersten beiden Bedingungen, nämlich:

(24. e.) $$\frac{A}{A'} = \frac{(\mathit{\Delta})}{(\mathit{\Delta}')} \quad \text{und} \quad \frac{(\mathit{\Gamma}')}{(\mathit{\Gamma})} = \frac{C'}{C}$$

genommen werden, welche aussagen, dass die Polaraxe A𝔜 in der Grundaxe AY liegen muss und eben so muss dann auch die Polaraxe A𝔜' in der Grundaxe AY' liegen, was zusammen nichts anders sagt, als dass die Axen AY und AY' ein rechtwinkliches ebenes System mit einander bilden müssen. Die zwei letzten Bedingungen erhalten blos dann Bedeutung, wenn man die Namen der Axen in einem der beiden Systeme noch vor ihrer Verknüpfung unter

einander verwechselt, d. h. AY nennt was zuvor AY′ hiess, und umgekehrt und sagen dann dasselbe wie die zwei ersten aus. Ist nämlich z. B.:

$$\frac{A}{A'} = -\frac{C_1'}{C_1} \quad \text{oder} \quad \frac{(\mathit{A})}{(\mathit{A}')} = -\frac{(\Gamma_1')}{(\Gamma_1)},$$

so zieht diess nach sich:

$$A C_1 + A' C_1' = 0 \quad \text{oder} \quad (\mathit{A})(\Gamma_1) + (\mathit{A}')(\Gamma_1') = 0,$$

womit wieder nichts anders gesagt ist, als dass die Axen AY und AY′ senkrecht auf einander stehen, dass also das gesuchte System ein rechtwinkliges ist.

Um nun die Lage der zu diesem rechtwinkligen Systeme gehörigen Axen zu finden, beachte man, dass da bei ihm $(\Gamma) = C$, $(\Gamma') = C'$, $(\mathit{A}) = A$, $(\mathit{A}') = A'$ und eben so $(\Gamma_1) = C_1$, $(\Gamma_1') = C_1'$, $(\mathit{A}_1) = A_1$, $(\mathit{A}_1') = A_1'$ ist, die Bedingungen (23. b.) jetzt werden:

$$\alpha A C' = \alpha' A' C \quad \text{und} \quad \alpha A_1 C_1' = \alpha' A_1' C_1, \tag{25. a.}$$

und setzt man in die vordere von diesen zwei Bedingungen einmal für C und C′ und ein andermal für A und A′ ihre Werthe aus den obern Gleichungen (24. a.), so erhält man die folgenden zwei Gleichungen:

$$\alpha' \left(\frac{A'}{A}\right)^2 + \frac{\alpha' - \alpha}{\cos W} \frac{A'}{A} - \alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha \left(\frac{C'}{C}\right)^2 + \frac{\alpha' - \alpha}{\cos W} \frac{C'}{C} - \alpha' = 0, \tag{25. b.}$$

aus welchen sich die Verhältnisse $\frac{A'}{A}$ oder $\frac{C'}{C}$ finden lassen, womit sodann die Richtung AY gegeben ist. Ganz eben so gelangt man auch zu der Richtung AY′; man erhält für die Verhältnisse $\frac{A_1'}{A_1}$ und $\frac{C_1'}{C_1}$ genau dieselben Gleichungen und daher auch dieselben Werthe; weil aber diese letztern Verhältnisse doch nicht jenen gleich werden dürfen, indem sonst die Axen AY und AY′ in einander zu liegen kämen und kein Coordinatensystem mehr bildeten, so bleibt nichts anderes übrig, als von den zwei Werthen, welche die Gleichungen (25. b.) liefern, den einen der Axe AY und den andern der Axe AY′ zuzutheilen. Die wirkliche Auflösung der Gleichungen (25. b.) giebt, wenn man zur Abkürzung

$$\alpha^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2W + \alpha'^2 = \Delta^2 \tag{26. a.}$$

setzt und unter Δ den aus der Gleichung (26. a.) dafür sich ergebenden positiven oder negativen Werth versteht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{\alpha - \alpha' + \Delta}{2\alpha' \cos W}, & \frac{A_1'}{A_1} &= \frac{\alpha - \alpha' - \Delta}{2\alpha' \cos W}, \\ \frac{C'}{C} &= \frac{\alpha - \alpha' + \Delta}{2\alpha \cos W}, & \frac{C_1'}{C_1} &= \frac{\alpha - \alpha' - \Delta}{2\alpha \cos W}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{26. b.}$$

wo in allen diesen vier Gleichungen das Vorzeichen von Δ mit dem entgegengesetzten vertauscht werden kann.

Will man alle Projectionszahlen einzeln finden, so wird man wohl thun, zu beachten, dass zufolge der Gleichung (26. a.)

$$(27.\ a.) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} 4\,\alpha\,\alpha'\cos^2 W = \Delta^2 - (\alpha - \alpha')^2 = (\alpha - \alpha' + \Delta)(\alpha' - \alpha + \Delta) \\ \text{und} \\ 4\,\alpha\,\alpha'\sin^2 W = (\alpha + \alpha')^2 - \Delta^2 = (\alpha + \alpha' + \Delta)(\alpha + \alpha' - \Delta) \end{array}\right.$$

ist; denn nun findet man:

$$\frac{A'}{A}\frac{C'}{C} = \frac{\alpha - \alpha' + \Delta}{\alpha' - \alpha + \Delta} \quad \text{und} \quad \frac{A'_1}{A_1}\frac{C'_1}{C_1} = \frac{\alpha' - \alpha + \Delta}{\alpha - \alpha' + \Delta},$$

und diese beiden Gleichungen, verbunden mit den Richtungsgleichungen

$$1 = A\,C + A'\,C' \quad \text{und} \quad 1 = A_1\,C_1 + A'_1\,C'_1$$

geben:

$$(27.\ b.) \qquad A\,C = \frac{\alpha' - \alpha + \Delta}{2\,\Delta} \quad \text{und} \quad A_1\,C_1 = \frac{\alpha - \alpha' + \Delta}{2\,\Delta}.$$

Ferner ist

$$C = A + A'\cos W \quad \text{und} \quad C_1 = A_1 + A'_1\cos W$$

oder

$$\frac{C}{A} = 1 + \frac{A'}{A}\cos W \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{A_1} = 1 + \frac{A'_1}{A_1}\cos W;$$

setzt man daher in diese Gleichungen für $\frac{A'}{A}$ und $\frac{A'_1}{A_1}$ ihre Werthe aus den obern Gleichungen (26. b.) ein, so kommt:

$$(27.\ c.) \qquad \frac{C}{A} = \frac{\alpha + \alpha' + \Delta}{2\,\alpha'} \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{A_1} = \frac{\alpha + \alpha' - \Delta}{2\,\alpha'},$$

und nun lassen sich aus diesen Gleichungen und denen (27. b.) die Werthe C, C_1 und A, A_1 wie folgt finden:

$$(27.\ d.) \quad \ldots\ldots \left\{\begin{array}{ll} C^2 = \dfrac{(\alpha' - \alpha + \Delta)(\alpha + \alpha' + \Delta)}{4\,\alpha'\,\Delta} & \text{und} \quad C_1^2 = \dfrac{(\alpha - \alpha' + \Delta)(\alpha + \alpha' - \Delta)}{4\,\alpha'\,\Delta}, \\ A^2 = \dfrac{\alpha'(\alpha' - \alpha + \Delta)}{\Delta(\alpha + \alpha' + \Delta)} & \text{und} \quad A_1^2 = \dfrac{\alpha'(\alpha - \alpha' + \Delta)}{\Delta(\alpha + \alpha' - \Delta)}, \end{array}\right.$$

welche sich mittelst der Relationen (27. a.) vielfach umgestalten lassen.

Man überzeugt sich ohne grosse Mühe, (indem man die verschiedenen möglichen Fälle einzeln durchgeht, wobei sich die zwei Fälle, wo α und α' entgegengesetzte Vorzeichen haben, auf die, wo sie einerlei Vorzeichen besitzen, zurückführen lassen), dass die Gleichungen (27. d.) für C^2, C_1^2 und A^2, A_1^2 jedesmal positive Zahlen liefern, welche reelle Grössen die Coefficienten α und α' auch in sich tragen mögen, wenn man für Δ seinen positiven Werth nimmt; hingegen liefern jene Gleichungen jedesmal negative Grössen für C^2, C_1^2 und A^2, A_1^2, so wie man für Δ seinen negativen Werth nimmt. Hieraus folgt, dass sich für jede der Projectionszahlen C, C_1 und A, A_1 nur zwei reelle Werthe finden lassen, deren absolute Zahlen die gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Aus jedem solchen Paare geben sodann die Gleichungen (26. b.) auch für C', C'_1 und A', A'_1 zwei Werthe, deren absolute Zahlen wieder einander gleich und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind. Man findet demnach jederzeit zwei reelle Axen AY und AY', die stets in denselben zwei Geraden liegen, so dass man in diesem Sinne behaupten kann, es gebe nur ein einziges Coordinatensystem, an welchem die

gegebene Curve gleichzeitig eine Gleichung von der ersten sowohl als von der zweiten Form (11. a.) liefert, welches Coordinatensystem immer ein rechtwinkliges ist.

192) Man kann aus den Bestimmungen der Nr. 186. die allgemeinsten Eigenschaften der conjugirten Durchmesser in jeder mit einem Mittelpunct versehenen Curve zweiter Ordnung wie folgt ableiten:

Geht man erstlich von dem Falle aus, wo eine Diametralgleichung in schiefen Coordinaten in eine andere Diametralgleichung in schiefen Coordinaten übergeführt werden soll, welches geschieht, wenn die Bedingung (13. b.), nämlich

$$\alpha A A_1 + \alpha' A' A_1' = 0 \qquad \textbf{(28. a.)}$$

erfüllt wird, was zur Folge hat, dass die Gleichung (13. c.) oder, wenn man

$$\alpha A^2 + \alpha' A'^2 = (\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha A_1^2 + \alpha' A_1'^2 = (\alpha') \qquad \textbf{(28. b.)}$$

schreibt, die

$$(\alpha) y^2 + (\alpha') y'^2 = \mu \qquad \textbf{(28. c.)}$$

entsteht. Aus den Gleichungen (28. b.) ergiebt sich aber

$$(\alpha')(\alpha A^2 + \alpha' A'^2) = (\alpha)(\alpha A_1^2 + \alpha' A_1'^2),$$

und aus der Bedingung (28. a.) folgt:

$$\alpha' A' A_1' = -\alpha A A_1 \quad \text{oder} \quad \alpha'^2 A'^2 A_1'^2 = \alpha^2 A^2 A_1^2;$$

setzt man daher den aus dieser letzten Gleichung für $\alpha' A_1'^2$ sich ergebenden Werth in die vorige Gleichung, so findet man, dass

$$(\alpha')\alpha' A'^2 (\alpha A^2 + \alpha' A'^2) = (\alpha)(\alpha \alpha' A_1^2 A'^2 + \alpha^2 A^2 A_1^2),$$

oder

$$\alpha'^2 A'^4 + \alpha' A'^2 \left(\alpha A^2 - \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha A_1^2\right) = \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha^2 A^2 A_1^2$$

ist, und sieht man in dieser Gleichung $\alpha' A'^2$ als unbekannte Grösse an, so giebt deren Auflösung:

$$\alpha' A'^2 + \frac{1}{2}\left(\alpha A^2 - \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha A_1^2\right) = \sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha A^2 - \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha A_1^2\right)^2 + \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha^2 A^2 A_1^2}$$

$$= \pm \frac{1}{2}\left(\alpha A^2 + \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha A_1^2\right),$$

woraus man erhält:

$$\text{entweder} \quad \alpha' A'^2 + \alpha A^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha' A'^2 = \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \alpha A_1^2 .$$

Da jedoch die erste dieser Gleichungen unzulässig ist, weil sie $(\alpha) = 0$ zur Folge hätte, so bleibt blos die zweite zu berücksichtigen, wornach man hat:

$$\alpha' (\alpha') A'^2 = \alpha (\alpha) A_1^2 .$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der Bedingung (28. a.) ergiebt sich nun:

$$A' = A_1 \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{(\alpha)}{(\alpha')}} \quad \text{und} \quad A_1' = -A \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'} \frac{(\alpha')}{(\alpha)}}, \qquad \textbf{(28. d.)}$$

in deren letzterer

$$\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha')}{\alpha'\,(\alpha)}} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha'}}{\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha)}{\alpha'\,(\alpha')}}}$$

ist, so dass also dem positiven Wurzelwerthe $\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha)}{\alpha'\,(\alpha')}}$ der positive oder negative von $\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha')}{\alpha'\,(\alpha)}}$ entspricht, je nachdem $\frac{\alpha}{\alpha'}$ eine positive oder negative Zahl vorstellt; und in denselben Fällen entspricht dem negativen erstern Wurzelwerthe der negative oder positive zweite. Aus den Gleichungen (28. d.) ersieht man sogleich, dass zur Möglichkeit des gesuchten neuen Coordinatensystems zunächst gefordert werde, dass $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{(\alpha')}{(\alpha)}$ Zahlen mit einerlei Vorzeichen seien, damit $\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha)}{\alpha'\,(\alpha')}}$ und $\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha')}{\alpha'\,(\alpha)}}$ reelle Werthe annehmen. Es müssen sonach die Coeffizienten (α) und (α') in jeder neuen Diametralgleichung einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen annehmen in denselben Fällen, in denen es bei der ursprünglich gegebenen Diametralgleichung geschieht. Ferner gehen die Gleichungen (28. b.) in Folge derer (28. d.) über in:

$$\alpha\,A^2 + \frac{\alpha\,(\alpha)}{(\alpha')}A_1^2 = (\alpha) \quad \text{und} \quad \alpha\,A_1^2 + \frac{\alpha\,(\alpha')}{(\alpha)}A^2 = (\alpha')$$

oder in die neue:

(28. e.) $$\frac{1}{(\alpha)}A^2 + \frac{1}{(\alpha')}A_1^2 = \frac{1}{\alpha}\,;$$

nun giebt aber die auf die Axen AY und AY′ angewandte Richtungsgleichung am ursprünglichen Systeme:

$$1 = A^2 + A'^2 + 2\,A\,A'\cos W \quad \text{und} \quad 1 = A_1^2 + A_1'^2 + 2\,A_1\,A_1'\cos W$$

oder wenn man in diese für A' und A_1' ihre Werthe aus den Gleichungen (28. d.) einsetzt:

$$1 = A^2 + A_1^2\frac{\alpha\,(\alpha)}{\alpha'\,(\alpha')} + 2\,A\,A_1\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha)}{\alpha'\,(\alpha')}}\cos W \quad \text{und} \quad 1 = A_1^2 + A^2\frac{\alpha\,(\alpha')}{\alpha'\,(\alpha)} - 2\,A\,A_1\sqrt{\frac{\alpha\,(\alpha')}{\alpha'\,(\alpha)}}\cos W$$

oder wenn man die erstere durch $\sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}}$ die andere durch $\sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}}$ dividirt:

$$\sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} = A^2\sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} + A_1^2\frac{\alpha}{\alpha'}\sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} + 2\,A\,A_1\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W$$

und

$$\sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} = A_1^2\sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} + A^2\frac{\alpha}{\alpha'}\sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} - 2\,A\,A_1\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W\,,$$

und diese letzten beiden liefern, wenn man sie zu einander addirt und die Summe mit $\sqrt{(\alpha)(\alpha')}$ dividirt:

(28. f.) $$\frac{1}{(\alpha)} + \frac{1}{(\alpha')} = \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha'}\right)\left(\frac{A^2}{(\alpha)} + \frac{A_1^2}{(\alpha')}\right)$$

oder weil $\frac{A^2}{(\alpha)}+\frac{A_1^2}{(\alpha')}=\frac{1}{\alpha}$ ist, der Gleichung (28. e.) gemäss:

$$\frac{1}{(\alpha)}+\frac{1}{(\alpha')}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}, \qquad \textbf{(28. g.)}$$

welche zu erkennen giebt, dass die Summe der reciproken Coeffizienten in allen, derselben Curve angehörigen Diametralgleichungen mit schiefen Coordinaten stets eine und dieselbe Zahl liefert.

Soll hingegen eine Diametralgleichung mit schiefen Coordinaten in eine andere mit senkrechten Coordinaten übergeführt werden, so hat man, den Bestimmungen der Nr. 186. gemäss, die Bedingung (14. b.), nämlich

$$\alpha(A)(A_1)+\alpha'(A')(A'_1)=0 \qquad \textbf{(29. a.)}$$

zu erfüllen, worauf man die Gleichung (14. c.) erhält, oder, wenn man

$$\alpha\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2}+\alpha'\frac{(A')^2}{\mathfrak{D}^2}=(\delta) \quad \text{und} \quad \alpha\frac{(A_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2}+\alpha'\frac{(A'_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2}=(\delta') \qquad \textbf{(29. b.)}$$

setzt, die:

$$(\delta)\,v^2+(\delta')\,v'^2=\mu. \qquad \textbf{(29. c.)}$$

Die Gleichungen (28. a. und b.) gehen in die (29. a. und b.) über, wenn man an die Stelle des Grundzeichens A das (A), und zugleich für (α) und (α') setzt $(\delta)\mathfrak{D}^2$ und $(\delta')\mathfrak{D}_1'^2$, und es wird das in (28. d.) erhaltene Resultat hier:

$$(A')=(A_1)\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}'_1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{(\delta)}{(\delta')}} \quad \text{und} \quad (A'_1)=-(A)\frac{\mathfrak{D}'_1}{\mathfrak{D}}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}\frac{(\delta')}{(\delta)}}. \qquad \textbf{(29. d.)}$$

Auch hier wird also wieder zur Möglichkeit des gesuchten Coordinatensystems zunächst gefordert, dass die Coeffizienten (δ) und (δ') der neuen Gleichung entweder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, je nachdem es bei den ursprünglich gegebenen α und α' der Fall ist. Da ferner die hinter (28. e.) stehenden zum vorigen Falle gehörigen Richtungsgleichungen durch dieselbe, eben angegebene Substitution in die dem jetzigen Falle entsprechenden übergehen, so verwandelt sich das zuvor in (28. g.) erhaltene Resultat hier in:

$$\frac{1}{(\delta)\,\mathfrak{D}^2}+\frac{1}{(\delta')\,\mathfrak{D}_1'^2}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}, \qquad \textbf{(29. e.)}$$

welche Gleichung zu erkennen giebt, dass der hinter (28. g.) aufgestellte Satz auch hier wieder gilt, wenn man in ihm an die Stelle der zu Coordinaten, welche von anderer Art als die in der gegebenen Gleichung vorkommenden sind, gehörigen Coeffizienten (δ) und (δ') diese mit $\mathfrak{D}^2$ und $\mathfrak{D}_1'^2$ multiplicirt setzt.

Völlig ähnliche Resultate erhält man auch, wenn man eine Diametralgleichung mit senkrechten Coordinaten in eine andere mit schiefen oder in eine andere mit senkrechten Coordinaten überführen will; im ersten Falle gilt das hinter (28. d. und g.), im andern Falle das hinter (29. d. und e.) ausgesprochene Resultat mit einer geringen Abänderung, die hier Folge der abgeänderten Richtungsgleichung ist. So erhält man zufolge der Gleichung (15. b.) da, wo eine Diametralgleichung mit senkrechten Coordinaten in eine andere mit schiefen Coordinaten übergeführt werden soll, zur Bedingung:

$$\delta\,\mathrm{C}\,\mathrm{C}_1+\delta'\,\mathrm{C}'\,\mathrm{C}'_1=0, \qquad \textbf{(30. a.)}$$

und dann wird der Gleichung (15. c.) gemäss, wenn man

(30. b.) $$\delta C^2 + \delta' C'^2 = (\alpha) \quad \text{und} \quad \delta C_1^2 + \delta' C_1'^2 = (\alpha')$$

setzt:

(30. c.) $$(\alpha) y^2 + (\alpha') y'^2 = \nu,$$

und da die Gleichungen (30. a. und b.) aus denen (28. a. und b.) dadurch hervorgehen, dass man an die Stelle der Grundzeichen α und A die δ und C setzt, so erhält man statt des Resultats (28. d.) im jetzigen Falle:

(30. d.) $$C' = C_1 \sqrt{\frac{\delta\,(\alpha)}{\delta'\,(\alpha')}} \quad \text{und} \quad C_1' = -C \sqrt{\frac{\delta\,(\alpha')}{\delta'\,(\alpha)}},$$

so wie statt des in (28. e.) angezeigten das folgende:

(30. e.) $$\frac{1}{(\alpha)} C^2 + \frac{1}{(\alpha')} C_1^2 = \frac{1}{\delta}.$$

An die Stelle der hinter (28. e.) stehenden Richtungsgleichungen treten aber jetzt die:

$$\sin^2 W = C^2 + C'^2 - 2\,C\,C' \cos W \quad \text{und} \quad \sin^2 W = C_1^2 + C_1'^2 - 2\,C_1\,C_1' \cos W,$$

wie man sogleich aus den im ersten Abschnitt aufgestellten Gleichungen (108. a.) findet, wenn man in die $1 = a\,c + a'c'$ für a und a' ihre dort angezeigten Werthe einsetzt, wodurch sie wird:

$$\sin^2 W = c^2 + c'^2 - 2\,c\,c' \cos W,$$

und nun auf die Axen AY und AY' angewandt die obigen liefert. Setzt man in den obigen Richtungsgleichungen für C' und C_1' ihre in (30. d.) gegebenen Werthe ein, so werden sie:

$$\sin^2 W = C^2 + C_1^2 \frac{\delta\,(\alpha)}{\delta'\,(\alpha')} - 2\,C\,C_1 \sqrt{\frac{\delta\,(\alpha)}{\delta'\,(\alpha')}} \cos W,$$

$$\sin^2 W = C_1^2 + C^2 \frac{\delta\,(\alpha')}{\delta'\,(\alpha)} + 2\,C\,C_1 \sqrt{\frac{\delta\,(\alpha')}{\delta'\,(\alpha)}} \cos W,$$

oder, wenn man die erstere mit $\sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}}$, die andere mit $\sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}}$ multiplicirt:

$$\sin^2 W \sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} = C^2 \sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} + C_1^2 \frac{\delta}{\delta'} \sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} - 2\,C\,C_1 \sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} \cos W,$$

$$\sin^2 W \sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} = C_1^2 \sqrt{\frac{(\alpha)}{(\alpha')}} + C^2 \frac{\delta}{\delta'} \sqrt{\frac{(\alpha')}{(\alpha)}} + 2\,C\,C_1 \sqrt{\frac{\delta}{\delta'}} \cos W,$$

und gehen nun durch Addition und nachherige Division mit $\sqrt{(\alpha)(\alpha')}$ über in:

(30. f.) $$\sin^2 W \left(\frac{1}{(\alpha)} + \frac{1}{(\alpha')}\right) = \left(\frac{C^2}{(\alpha)} + \frac{C_1^2}{(\alpha')}\right)\left(1 + \frac{\delta}{\delta'}\right),$$

welche, die (30. e.) berücksichtigend, wird:

(30. g.) $$\sin^2 W \left(\frac{1}{(\alpha)} + \frac{1}{(\alpha')}\right) = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'}.$$

Wäre endlich eine Diametralgleichung in senkrechten Coordinaten gegeben, und wollte man wieder zu einer eben solchen gelangen, wo dann die Bedingung (16. b.) nämlich $\delta(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'(\Gamma')(\Gamma'_1)=0$ zu erfüllen wäre, um zu der Gleichung (16. c.) oder, wenn man

$$\delta\frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2}+\delta'\frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2}=(\delta) \quad \text{und} \quad \delta\frac{(\Gamma_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2}+\delta'\frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2}=(\delta')$$

setzt, zu der

$$(\delta)\,v^2+(\delta')\,v'^2=\nu$$

zu gelangen, so erhält man die hierher gehörigen Resultate aus denen (30. d. bis g.), wenn man an die Stelle des Grundzeichens C das (Γ) setzt, und die Coeffizienten (α) und (α') durch $(\delta)\mathfrak{D}^2$ und $(\delta')\mathfrak{D}_1'^2$ vertreten lässt, weil die vorstehenden Gleichungen aus denen (30. a. bis c.) durch dieselben Veränderungen hervorgehen. Die so sich ergebenden Formen, so wie die in (29. a. bis e.) vorkommenden gewinnen noch an Anschaulichkeit, wenn man sich erinnert, dass im ebenen Systeme, wenn W_1 den neuen Axenwinkel vorstellt,

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1'=\sin W_1 \tag{31. a.}$$

ist, wie aus den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (104. b.) sogleich hervorgeht. Die bisher aufgefundenen Beziehungen zwischen den Coeffizienten der gegebenen und denen der gesuchten Diametralgleichung werden mit Rücksicht auf die Relationen (31. a.):

1) wenn die gegebene wie die gesuchte Diametralgleichung schiefe Coordinaten in sich trägt:

$$\frac{1}{(\alpha)}+\frac{1}{(\alpha')}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\,; \tag{31. b.}$$

2) wenn die gegebene Diametralgleichung schiefe, die gesuchte senkrechte Coordinaten in sich trägt:

$$\frac{1}{(\delta)}+\frac{1}{(\delta')}=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right)\sin^2 W_1\,; \tag{31. c.}$$

3) wenn die gegebene Diametralgleichung senkrechte, die gesuchte dagegen schiefe Coordinaten in sich aufnimmt:

$$\left(\frac{1}{(\alpha)}+\frac{1}{(\alpha')}\right)\sin^2 W=\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}\,; \tag{31. d.}$$

4) wenn die gegebene wie die gesuchte Diametralgleichung senkrechte Coordinaten in sich aufnimmt:

$$\left(\frac{1}{(\delta)}+\frac{1}{(\delta')}\right)\sin^2 W=\left(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}\right)\sin^2 W_1\,. \tag{31. e.}$$

193) In der vorigen Nummer ist zwar das allgemeine Verhalten der Coeffizienten einer neu zu suchenden Diametralgleichung zu denen einer ursprünglich gegebenen in Bezug auf eine bestimmte, mit einem Mittelpunct versehene Curve zweiter Ordnung angegeben worden, aber zur Möglichkeit der neuen Gleichung mit so gegebenen Coeffizienten wird noch ausserdem gefordert, dass diese Coeffizienten zu einem wirklichen Coordinatensystem führen, d. h. dass die Projectionszahlen, welche man für die neuen Axen findet, reelle Werthe annehmen. Indem wir jetzt die hierzu erforderlichen besondern Eigenschaften der Coeffizienten aufsuchen, werden wir blos den einen Fall ins Auge fassen, wo aus einer Diametralgleichung mit schiefen Coordinaten wieder eine eben solche abgeleitet werden soll, und daher zwischen den Coeffizienten der bei-

den Gleichungen die Relation (31. b.) statt findet, da die andern Fälle eine ähnliche Behandlung gestatten, welche wir dem Leser überlassen können. Dabei werden wir von der Voraussetzung ausgehen, dass die ursprüngliche Diametralgleichung am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben sei, eine Voraussetzung, die durch die Betrachtungen der Nr. 191. gerechtfertigt wird, und den Vortheil hat, nicht nur eine einfachere Darstellung zu gestatten, sondern auch den Resultaten eine grössere Bestimmtheit und Anschaulichkeit zu geben.

Durch die Voraussetzung, dass die ursprüngliche Diametralgleichung am rechtwinkligen System gegeben sei, verwandeln sich die hinter (28. c.) stehenden beiden Richtungsgleichungen der neuen Axen, wenn wir den Fall herausnehmen, wo sowohl die gegebene wie die gesuchte Gleichung schiefe Coordinaten in sich aufnimmt, in:

(32. a.) $$1 = A^2 + A'^2 \quad \text{und} \quad 1 = A_1^2 + A_1'^2,$$

weil jetzt W ein rechter Winkel, also $\cos W = 0$ ist. Setzt man in diese Gleichungen für A'^2 und $A_1'^2$ ihre Werthe aus (28. d.) ein, so erhält man:

$$1 = A^2 + A_1^2 \frac{\alpha(\alpha)}{\alpha'(\alpha')} \quad \text{und} \quad 1 = A_1^2 + A^2 \frac{\alpha(\alpha')}{\alpha'(\alpha)},$$

woraus man findet:

(32. b.) $$A^2 = \frac{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha)}{(\alpha')}}{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{und} \quad A_1^2 = \frac{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha')}{(\alpha)}}{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'}},$$

und in Folge dieser Werthe geben die Gleichungen (28. d.):

(32. c.) $$A'^2 = \frac{\frac{(\alpha)}{(\alpha')} - \frac{\alpha}{\alpha'}}{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{und} \quad A_1'^2 = \frac{\frac{(\alpha')}{(\alpha)} - \frac{\alpha}{\alpha'}}{\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'}}.$$

Damit nun die neue Gleichung einem wirklich vorhandenen Coordinatensysteme angehöre, müssen die Gleichungen (32. b. und c.) für A, A' und A_1, A_1' lauter reelle, oder, was dasselbe ist, für A^2, A'^2 und A_1^2, $A_1'^2$ lauter positive Zahlen oder Null liefern. Dazu ist erforderlich:

I. dass in dem Falle, wo der in allen Gleichungen (32. b. und c.) vorkommende Nenner positiv, also $\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'} > 0$ ist, zugleich sei:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \geqq 0, \quad \frac{(\alpha)}{(\alpha')} - \frac{\alpha}{\alpha'} \geqq 0, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha')}{(\alpha)} \geqq 0, \quad \frac{(\alpha')}{(\alpha)} - \frac{\alpha}{\alpha'} \geqq 0;$$

II. dass in dem Falle, wo der gedachte Nenner negativ, also $\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha'} < 0$ ist, zugleich auch sei:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha)}{(\alpha')} \leqq 0, \quad \frac{(\alpha)}{(\alpha')} - \frac{\alpha}{\alpha'} \leqq 0, \quad \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{(\alpha')}{(\alpha)} \leqq 0, \quad \frac{(\alpha')}{(\alpha)} - \frac{\alpha}{\alpha'} \leqq 0;$$

III. Der gedachte Nenner kann nur dann null werden, wenn α und α' einerlei absolute Werthe mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen besitzen, wo dann die Curve zweiter

Ordnung entweder eine Kreislinie oder eine gleichseitige Hyperbel ist, welchen besondern Fall wir für sich betrachten werden.

Da die Quotienten $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{(\alpha)}{(\alpha')}$, $\frac{(\alpha')}{(\alpha)}$, dem aus (28. d.) fliessenden Satze zur Folge, sämmtlich Zahlen mit einerlei Vorzeichen sein müssen, wenn die neue Gleichung einem wirklichen Coordinatensysteme angehören soll, so verlangen die in I) und II) enthaltenen Bedingungen im Grunde nichts weiter, als dass die absoluten Werthe der Quotienten $\frac{(\alpha)}{(\alpha')}$ und $\frac{(\alpha')}{(\alpha)}$ nicht über die absoluten Werthe der Quotienten $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\alpha'}{\alpha}$ hinausfallen, vorausgesetzt, dass α und α' sich auf die Gleichung der Curve am rechtwinkligen Coordinatensysteme beziehen. Tritt hingegen der in III) erwähnte Umstand ein, wo der in den sämmtlichen Gleichungen (32. b. und c.) auftretende Nenner null ist, welches geschieht, wenn α und α' gleiche absolute Werthe haben, so müssen nothwendig auch alle Zähler in jenen Gleichungen null werden, weil die Richtungsgleichungen (32. a.) keine unendlich grossen und zugleich positiven Werthe von A^2, A'^2 und A_1^2, $A_1'^2$ zulassen, und diess zieht nach sich, dass auch die absoluten Werthe von (α) und (α') einander gleich sein müssen; haben daher α und α' einerlei Vorzeichen, in welchem Falle die vorgelegte Curve eine Kreislinie ist, so geht die Bedingung (28. g.) über in:

$$\frac{1}{(\alpha')} = \frac{1}{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \textbf{(32. d.)}$$

und zeigt, dass die Coefficienten aller möglichen Diametralgleichungen bei der Kreislinie einerlei Grösse annehmen, oder dass bei ihr die sämmtlichen Diametralgleichungen sich in Nichts von einander unterscheiden; haben hingegen α und α' entgegengesetzte Vorzeichen, in welchem Falle die vorgelegte Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht die Bedingung (28. g.) über in:

$$\frac{1}{(\alpha')} + \frac{1}{(\alpha)} = 0,$$

und zeigt, dass auch in (α) und (α') einerlei Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen enthalten sein müssen, ohne aber über die Grösse dieser Werthe irgend wie zu verfügen. Da in diesen beiden Fällen die Projectionszahlen A, A' und A_1, A_1' sämmtlich von der Form $\frac{0}{0}$ sind, so giebt diess zu verstehen, dass jede der neuen Axen AY und AY' einzeln genommen eine beliebige Richtung annehmen kann; hat man aber eine von beiden nach Gefallen gewählt, so bestimmt sich nach ihr die andere von selbst nach Anleitung der Bedingung (28. a.), welche bei der Kreislinie, wo α und α' bei einerlei absolutem Werthe auch gleiche Vorzeichen haben, wird:

$$A A_1 + A' A_1' = 0, \qquad \textbf{(32. e.)}$$

und so zeigt, dass die zwei Axen in jedem der verlangten Systeme auf einander senkrecht stehen, weil auf das rechtwinklige ebene System bezogen $A A_1 + A' A_1'$ den Kosinus

des Winkels vorstellt, den die Axen A Y und A Y′ mit einander machen; bei der gleichseitigen Hyperbel hingegen, wo α und α' so wie (α) und (α') bei einerlei absolutem Werthe entgegengesetzte Vorzeichen haben, verwandeln sich die Gleichungen (28. d.) in:

(32. f.) $$A' = \pm A_1 \quad \text{und} \quad A'_1 = \pm A,$$

und es dürfen in beiden gleichzeitig nur die obern oder nur die untern Vorzeichen genommen werden, der hinter (28. d.) stehenden Bemerkung gemäss, weil hier $\frac{\alpha}{\alpha'}$ eine negative Zahl ist. Stellt man sich nun das ursprüngliche Coordinatensystem als ein rechtwinkliges vor, an welchem die schiefen Projectionszahlen in die senkrechten übergehen, so ist:

$$A' = \cos YAX', \quad A_1 = \cos Y'AX, \quad A'_1 = \cos Y'AX', \quad A = \cos YAX,$$

weshalb die Gleichungen (32. f.) übergehen in:

(32. g.) $$\cos YAX' = \pm \cos Y'AX \quad \text{und} \quad \cos Y'AX' = \pm \cos YAX,$$

in welchen beiden Gleichungen wieder entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen genommen werden dürfen. Aus ihnen lässt sich ohne Mühe entnehmen, dass bei der gleichseitigen Hyperbel die zwei Axen eines schiefwinkligen Coordinatensystems, an dem diese Curve eine Diametralgleichung erzeugt, in zwei Geraden liegen, deren Stellung zu den Axen des rechtwinkligen Coordinatensystems, an dem die Curve eine Diametralgleichung erzeugt, die gleiche ist, wenn man beide entweder innerhalb oder ausserhalb der Coordinatenebene X A X′ ins Auge fasst.

194) Wir können nun die in Nr. 186. und Nr. 187. beim Aufsuchen von neuen Coordinatensystemen, an welchen die Curve eine Diametralgleichung liefert, unbestimmt gebliebene Grösse dazu benützen, um die aufzufindende Diametralgleichung in möglichst einfacher Form zu zu erhalten, wobei wir uns wieder blos auf lauter Diametralgleichungen mit schiefen Coordinaten beschränken werden, da die Behandlung der Hauptsache nach in allen übrigen Fällen die gleiche bleibt, oder besser gesprochen, da alle übrigen Fälle in diesem einen aufgehen. Auch wollen wir hier wieder, um einen festern Standpunct zu gewinnen, von der Voraussetzung ausgehen, dass die mit einem Mittelpunct versehene Curve zweiter Ordnung ursprünglich durch eine Diametralgleichung am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben sei. Unter dieser Voraussetzung haben wir in der vorigen Nummer gefunden, dass sowohl bei der Ellipse, wo α und α' einerlei Vorzeichen haben, als auch bei der Hyperbel, wo die Vorzeichen von α und α' entgegen gesetzt sind, die neue Diametralgleichung nur so lange und dann stets an einem reellen Coordinatensysteme möglich sei, als $\frac{(\alpha)}{(\alpha')}$ und $\frac{(\alpha')}{(\alpha)}$ nicht über die Grenzen $\frac{\alpha}{\alpha'}$ und $\frac{\alpha'}{\alpha}$ hinausfallen.

I) Hieraus folgt sogleich, dass man bei der Ellipse stets $\frac{(\alpha)}{(\alpha')} = 1$ oder $(\alpha) = (\alpha')$ werden lassen könne, wodurch sich dann die Gleichung (28. c.) dieser Ellipse in die höchst einfache Form

$$y^2 + y'^2 = \frac{\mu}{(\alpha)}$$

überführen lässt, welche, wenn man beachtet, dass in diesem Falle die Relation (28. g.) sich in die

$$2\frac{1}{(\alpha)}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}$$

abändert, wird:

$$y^2+y'^2=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right). \quad \textbf{(33. a.)}$$

Die Coordinatenaxen, worauf sich diese Gleichung bezieht, erhält man aus den Gleichungen (32. b. und c.); wenn man in diesen $(\alpha)=(\alpha')$ werden lässt, so ergiebt sich nämlich:

$$A^2=\frac{\frac{\alpha'}{\alpha}-1}{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha'}},\quad A'^2=\frac{1-\frac{\alpha}{\alpha'}}{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{und} \quad A_1^2=\frac{\frac{\alpha'}{\alpha}-1}{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha'}},\quad A_1'^2=\frac{1-\frac{\alpha}{\alpha'}}{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha'}}, \quad \textbf{(33. b.)}$$

welche für A, A' und A_1, A_1' stets mögliche Werthe liefern, die zu einem wahren Coordinatensysteme hinführen, sowohl wenn man denen A und A_1 einerlei und denen A' und A_1' entgegengesetzte Vorzeichen giebt, wie auch wenn man denen A und A_1 entgegengesetzte und denen A' und A_1' einerlei Vorzeichen giebt. Bedenkt man, dass das Coordinatensystem, worauf sich die Projectionszahlen A, A' und A_1, A_1' beziehen, unserer Voraussetzung gemäss ein rechtwinkliges ist, an welchem diese Grössen in $\cos YAX$, $\cos YAX'$ und $\cos Y'AX$, $\cos Y'AX'$ übergehen, so sieht man ein, dass die beiden schiefen Axen AY und AY', welche conjugirte Durchmesser von gleicher Länge geben, entweder mit der Axe AX gleiche Winkel bilden, deren Cosinus $\dfrac{\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}-1}}{\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha'}}}$ ist, oder sie bilden mit der Axe AX' gleiche Winkel, deren Cosinus $\dfrac{\sqrt{1-\frac{\alpha}{\alpha'}}}{\sqrt{\frac{\alpha'}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha}}}$ ist. Alle in den Gleichungen (33. b.) auftretenden Projectionszahlen erhalten stets endliche und von Null verschiedene Werthe, ausser wenn $\alpha=\alpha'$, sonach die Ellipse ein Kreis wird, ein Fall, der schon in der vorigen Nummer seine Erledigung gefunden hat.

II) Bei der Hyperbel hingegen, wo α und α' entgegengesetzte Vorzeichen in sich aufnehmen, und $\frac{(\alpha)}{(\alpha')}$, $\frac{(\alpha')}{(\alpha)}$ ebenfalls zwischen die Grenzen $\frac{\alpha'}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\alpha'}$ hineinfallen müssen, kann man wegen der Bedingung (28. g.) nie $\frac{(\alpha)}{(\alpha')}=-1$ oder $(\alpha)=-(\alpha')$ werden lassen, so lange α und α' verschiedene absolute Werthe haben; man kann daher nie die Gleichung der Hyperbel in der Form

$$y^2-y'^2=\mu$$

herstellen, welche der (33. a.) analog gebildet ist, ausser wenn $\alpha=-\alpha'$, d. h. wenn die Hyperbel eine gleichseitige ist, welcher besondere Fall schon in der vorigen Nummer seine Erledigung gefunden hat.

195) Obschon nun aber die Hyperbeln im Allgemeinen eine Vereinfachung ihrer Gleichungen in der Weise, wie die (33. a.) es in Ansehung der Ellipsen thut, nicht gestatten, so geben

sie dagegen zu andern Formen Anlass, die denen, von welchen die (33. a.) einem von vier Fällen entspricht, an Einfachheit nichts nachgeben. Um diese zu erhalten, gehen wir zu den Gleichungen (13. a.), (14. a.), (15. a.), (16. a.) zurück, an welche die Betrachtungen der vorigen Nummer angeknüpft worden sind. Im Falle nämlich die eine von den Grössen α und α' oder δ und δ' eine positive, die andere eine negative Zahl ist, kann man den Grundaxen AY und AY′ oder den Polaraxen A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, an welchen jene Gleichungen die ebene Curve zweiter Ordnung darstellen, eine solche Lage vorschreiben, dass bei der (13. a.)

(34. a.)

$$\alpha\,A^2 + \alpha'\,A'^2 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\,A_1^2 + \alpha'\,A_1'^2 = 0,$$

bei der (14. a.)

$$\alpha\frac{(A)^2}{\mathfrak{D}^2} + \alpha'\frac{(A')^2}{\mathfrak{D}^2} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\frac{(A_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \alpha'\frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} = 0,$$

bei der (15. a.)

$$\delta\,C^2 + \delta'\,C'^2 = 0 \quad \text{und} \quad \delta\,C_1^2 + \delta'\,C_1'^2 = 0,$$

bei der (16. a.)

$$\delta\frac{(\Gamma)^2}{\mathfrak{D}^2} + \delta'\frac{(\Gamma')^2}{\mathfrak{D}^2} = 0 \quad \text{und} \quad \delta\frac{(\Gamma_1)^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \delta'\frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} = 0$$

wird, welches, wenn α, α' oder δ, δ' Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen sind, stets, hingegen nie möglich ist, wenn α, α' oder δ, δ' Zahlen mit einerlei Vorzeichen sind. Durch diese Bedingungen verwandeln sich aber die Gleichungen (13. a.), (14. a.), (15. a.), (16. a.) in andere, welche die folgenden sehr einfachen Formen annehmen:

(34. b.)

$$y\,y' = \frac{\mu}{2(\alpha\,A\,A_1 + \alpha'\,A'\,A_1')} \quad \text{aus (13. a.)},$$

$$v\,v' = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'\,\mu}{2(\alpha(A)(A_1) + \alpha'(A')(A_1'))} \quad \text{aus (14. a.)},$$

$$y\,y' = \frac{\nu}{2(\delta\,C\,C_1 + \delta'\,C'\,C_1')} \quad \text{aus (15. a.)},$$

$$v\,v' = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'\,\nu}{2(\delta(\Gamma)(\Gamma_1) + \delta'(\Gamma')(\Gamma_1'))} \quad \text{aus (16. a.)}$$

hervorgehend. Aus den Bedingungen (34. a.) lassen sich die folgenden Gleichungen ableiten:

(34. c.)

$$A' = A\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{und} \quad A_1' = A_1\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{zu (13. a.)},$$

$$(A') = (A)\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{und} \quad (A_1') = (A_1)\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}} \quad \text{zu (14. a.)},$$

$$C' = C\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}} \quad \text{und} \quad C_1' = C_1\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}} \quad \text{zu (15. a.)},$$

$$(\Gamma') = (\Gamma)\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}} \quad \text{und} \quad (\Gamma_1') = (\Gamma_1)\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}} \quad \text{zu (16. a.)}$$

gehörig, wo in jeder Gleichung, unabhängig von der andern, der positive oder negative Wurzelwerth genommen werden kann; weil man aber nie $\frac{A'}{A}=\frac{A'_1}{A_1}$, und eben so wenig $\frac{(A')}{(A)}=\frac{(A'_1)}{(A_1)}$ oder $\frac{C'}{C}=\frac{C'_1}{C_1}$ oder $\frac{(\Gamma')}{(\Gamma)}=\frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)}$ werden lassen darf, indem sonst die beiden Richtungen A Y und A Y' oder A $\mathfrak{Y}$ und A $\mathfrak{Y}'$ in eine und dieselbe Gerade zu liegen kämen, was mit der Natur eines wahrhaften Coordinatensystems unverträglich ist, so sieht man ein, dass bei den vordern und hintern Gleichungen (34. c.) stets die entgegengesetzten Wurzelwerthe genommen werden müssen. Durch die Gleichungen (34. c.) mit Berücksichtigung der so eben angezeigten Regel hinsichtlich ihrer Vorzeichen verwandeln sich aber die (34. b.) in:

$$y\,y'=\frac{\mu}{4\alpha A A_1} \quad \text{und} \quad v\,v'=\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1\mu}{4\alpha(A)(A_1)},$$

denen (13. a.) und (14. a.) entsprechend, und in: **(34. d.)**

$$y\,y'=\frac{\nu}{4\delta C C_1} \quad \text{und} \quad v\,v'=\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1\nu}{4\delta(\Gamma)(\Gamma_1)},$$

denen (15. a.) und (16. a.) entsprechend.

Zieht man nun die Richtungsgleichungen

$$1=A^2+A'^2+2\,A\,A'\cos W \quad \text{und} \quad 1=A_1^2+A_1'^2+2\,A_1\,A'_1\cos W,$$

$$1=(A)^2+(A')^2+2(A)(A')\cos W \quad \text{und} \quad 1=(A_1)^2+(A'_1)^2+2(A_1)(A'_1)\cos W,$$

$$\sin^2 W=C^2+C'^2-2\,C\,C'\cos W \quad \text{und} \quad \sin^2 W=C_1^2+C_1'^2-2\,C_1\,C'_1\cos W,$$

$$\sin^2 W=(\Gamma)^2+(\Gamma')^2-2(\Gamma)(\Gamma')\cos W \quad \text{und} \quad \sin^2 W=(\Gamma_1)^2+(\Gamma'_1)^2-2(\Gamma_1)(\Gamma'_1)\cos W$$

heran, welche wahr sind, das ursprüngliche Coordinatensystem mag ein schiefwinkliges oder rechtwinkliges sein, und setzt man in diese Gleichungen für A', A'_1 und (A'), (A'_1) sowohl als für C', C'_1 und (Γ'), (Γ'_1) ihre in den Gleichungen (34. c.) gegebenen Werthe ein, so erhält man mit Berücksichtigung der für die Vorzeichen der Wurzelwerthe gegebenen Regel:

$$\frac{1}{A^2}=1-\frac{\alpha}{\alpha'}+2\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W \quad \text{und} \quad \frac{1}{A_1^2}=1-\frac{\alpha}{\alpha'}-2\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W,$$

$$\frac{1}{(A)^2}=1-\frac{\alpha}{\alpha'}+2\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W \quad \text{und} \quad \frac{1}{(A_1)^2}=1-\frac{\alpha}{\alpha'}-2\sqrt{-\frac{\alpha}{\alpha'}}\cos W,$$

$$\frac{\sin^2 W}{C^2}=1-\frac{\delta}{\delta'}-2\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}}\cos W \quad \text{und} \quad \frac{\sin^2 W}{C_1^2}=1-\frac{\delta}{\delta'}+2\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}}\cos W,$$

$$\frac{\sin^2 W}{(\Gamma)^2}=1-\frac{\delta}{\delta'}-2\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}}\cos W \quad \text{und} \quad \frac{\sin^2 W}{(\Gamma_1)^2}=1-\frac{\delta}{\delta'}+2\sqrt{-\frac{\delta}{\delta'}}\cos W,$$

(35. a.)

wo in den beiden Gleichungen auf jeder Zeile derselbe Wurzelwerth genommen werden muss, welches übrigens in jeder Zeile unabhängig von der andern sowohl der positive wie der negative sein kann. Aus den Gleichungen (34. c.) und (35. a.) ergeben sich nun mit der grössten Leichtigkeit die sämmtlichen, den Axen des gesuchten Coordinatensystems zugehörigen Projectionszahlen in reeller Weise. Namentlich erhält man durch Multiplication der beiden auf derselben Zeile stehenden Gleichungen (35. a.):

(35. b.) $$\begin{cases} (\mathrm{A\,A_1})^2 = \dfrac{\alpha'^2}{(\alpha'-\alpha)^2+4\alpha\alpha'\cos^2 W}, \\[2ex] ((\mathfrak{A})(\mathfrak{A}_1))^2 = \dfrac{\alpha'^2}{(\alpha'-\alpha)^2+4\alpha\alpha'\cos^2 W}, \\[2ex] (\mathrm{C\,C_1})^2 = \dfrac{\delta'^2\sin^4 W}{(\delta'-\delta)^2+4\delta\delta'\cos^2 W}, \\[2ex] ((\Gamma)(\Gamma_1))^2 = \dfrac{\delta'^2\sin^4 W}{(\delta'-\delta)^2+4\delta\delta'\cos^2 W}, \end{cases}$$

und mittelst dieser Werthe verwandeln sich die Gleichungen (34. d.) in:

(35. c.) $$\begin{cases} \mathrm{y\,y'} = \dfrac{[(\alpha'-\alpha)^2+4\alpha\alpha'\cos^2 W]^{\frac{1}{2}}\mu}{4\alpha\alpha'}, \\[2ex] \mathrm{v\,v'} = \dfrac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1[(\alpha'-\alpha)^2+4\alpha\alpha'\cos^2 W]^{\frac{1}{2}}\mu}{4\alpha\alpha'}, \\[2ex] \mathrm{y\,y'} = \dfrac{[(\delta'-\delta)^2+4\delta\delta'\cos^2 W]^{\frac{1}{2}}\nu}{4\delta\delta'\sin^2 W}, \\[2ex] \mathrm{v\,v'} = \dfrac{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1[(\delta'-\delta)^2+4\delta\delta'\cos^2 W]^{\frac{1}{2}}\nu}{4\delta\delta'\sin^2 W}, \end{cases}$$

wobei man

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_1 = \sin W_1$$

hat.

Es geht aus der vorstehenden Untersuchung hervor, dass sich die Gleichung einer Hyperbel an einem mittelst der vorstehenden Gleichungen bestimmbaren und immer wirklich vorhandenen Coordinatensysteme stets nach Belieben in einer der beiden Formen

(36.) $$\mathrm{x\,x'} = \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{u\,u'} = \nu$$

aufstellen lässt, und diese Formen sind für die Hyperbel eben so characteristisch, wie die der (33. a.) analogen für die Ellipse. Es springt dabei in die Augen, dass die Coordinatenaxen derjenigen Systeme, an welchen die Hyperbeln Gleichungen von einer der Formen (36.) liefern, Asymptoten zu ihnen sind. Keine Ellipse kann durch eine Gleichung von der Form, wie die (36.) sind, dargestellt werden, und im Allgemeinen kann auch keine Hyperbel durch eine Gleichung von der Form

(37. a.) $$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}'^2 = \mu \quad \text{oder} \quad \mathrm{u}^2 - \mathrm{u}'^2 = \nu,$$

worin blos die Quadrate der Coordinaten vorkommen und beide mit dem Coefficienten 1 versehen sind, dargestellt werden. Wir haben in der vorigen Nummer gesehen, dass nur die gleichseitige Hyperbel, nämlich die, in deren Gleichung schon von vorn herein $\alpha + \alpha' = 0$ giebt, hiervon eine Ausnahme macht, und diese giebt sich eben dadurch unter den Hyperbeln als eine sehr besondere zu erkennen. Bei der gleichseitigen Hyperbel gehen am rechtwinkligen Systeme die schiefen und senkrechten Coordinaten in einander über, aber auch an jedem andern Systeme, an welchem diese Hyperbel durch eine Diametralgleichung gegeben wird, findet gleichzeitig eine

Diametralgleichung in schiefen und in senkrechten Coordinaten statt; denn es ist den im ersten Abschnitte gegebenen zwei ersten Gleichungen (108. b.) zur Folge:

$$u = x + x' \cos W \quad \text{und} \quad u' = x \cos W + x',$$

wenn u, u' die senkrechten Coordinaten eines Punctes an dem Systeme vorstellen, an welchem derselbe Punct die schiefen x, x' hat, und hieraus findet man:

$$u + u' = (x + x')(1 + \cos W) \quad \text{und} \quad u - u' = (x - x')(1 - \cos W),$$

deren Multiplication die folgende Gleichung liefert:

$$u^2 - u'^2 = (x^2 - x'^2) \sin^2 W. \qquad (37.\ b.)$$

Findet demnach an irgend einem Systeme die erste Gleichung (37. a.) statt und setzt man ihr gemäss μ für $x^2 - x'^2$ in die Gleichung (37. b.), so verwandelt sich dieselbe in:

$$u^2 - u'^2 = \mu \sin^2 W; \qquad (37.\ c.)$$

findet aber an einem Systeme die zweite Gleichung (37. a.) statt und setzt man ihr gemäss ν für $u^2 - u'^2$ in die Gleichung (37. b.), so verwandelt sich dieselbe in:

$$x^2 - x'^2 = \frac{\nu}{\sin^2 W}, \qquad (37.\ d.)$$

woraus man ersieht, dass die gleichseitige Hyperbel an einem und demselben Systeme stets gleichzeitig die beiden Formen (37. a.) liefert, so wie die zweierlei in (35. c.) enthaltenen. Man sieht hieraus, dass der in Nr. 191. erschienene Ausnahmsfall, der $\alpha + \alpha' = 0$ voraussetzte und dort ganz zu Ende behandelt worden ist, ein solcher war, in welchem die gegebene Gleichung schon selber die dort gesuchte Eigenschaft besass.

196) Wir haben in den Nummern 188, 189 und 190 gesehen, dass eine Gleichung der Parabel, die an einem bestimmten Coordinatensysteme von einer der in (11. b.) oder (11. c.) aufgestellten Formen ist, an keinem andern Coordinatensysteme, das mit dem vorigen einerlei Spitze hat, wieder eine Gleichung von einer jener Formen liefern kann, dass aber, wenn irgend ein anderer Punct der Curve zur Spitze des neuen Coordinatensystems gemacht wird, immer ein zu dieser Spitze gehöriges System vorhanden ist, an welchem die Parabel wieder eine Gleichung von einer der genannten Formen annimmt, wobei sich zugleich zeigte, dass die eine Axe von allen diesen Systemen stets einer und derselben Geraden parallel bleibt, die andere dagegen ihre Richtung von einem Punct der Curve zum andern abändert. Da man sonach auch der Parabel unzählig viele Systeme anweisen kann, an welchen sie immer eine Gleichung von einer der in (11. b.) oder (11. c.) aufgestellten Formen giebt, nur dass diese nicht wie bei den ebenen Curven zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunct haben, eine gemeinschaftliche Spitze besitzen, ihre Spitzen im Gegentheil sich stets ändern müssen, so kann man auch hier wieder unter den unendlich vielen möglichen Gleichungen von einer jener Formen die heraussuchen wollen, welche noch andere gewünschte Nebenbedingungen erfüllen. Wir werden auch diesen Umstand an zwei Beispielen erläutern und dazu die den vorigen analogen nehmen, indem wir zuerst den Punct O der durch eine der Gleichungen (11. b.) oder (11. c.) gegebenen Parabel aufsuchen, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die durch ihn hindurch gehenden Axen zu gleicher Zeit Gleichungen sowohl von der vordern wie von der hintern in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen Form liefern.

Ist die Parabel durch eine Gleichung von der vordern Form (11. b.) gegeben, so muss, wie in Nr. 189. gezeigt worden ist, wenn das durch den Punct O hindurch gehende System wieder eine Gleichung von der ersten in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen Form geben soll, die eine Grundaxe, welche die OY sein mag, mit der AX parallel laufen, und die Richtung der andern Axe OY′ die Bedingung (18. b.) erfüllen, und soll das durch O hindurch gehende System eine Gleichung von der zweiten jener Formen geben, so muss nach den dortigen Ergebnissen die eine Polaraxe des neuen Systems, welches die O𝔜 sein mag, mit der Axe AX parallel laufen, und die Richtung der andern Polaraxe O𝔜′ die Bedingung (20. b.) erfüllen; soll daher das durch O hindurch gehende System gleichzeitig zu einer Gleichung sowohl von der vordern wie von der hintern in (11. b.) oder (11. c.) vorhandenen Form Anlass geben, so muss gleichzeitig die Grundaxe OY und die Polaraxe O𝔜 mit der Axe AX parallel laufen und es müssen gleichzeitig die beiden Bedingungen

(38. a.) $$\gamma A_1 + \alpha'\xi' A'_1 = 0 \quad \text{und} \quad \gamma(\mathit{A}_1) + \alpha'\xi'(\mathit{A}'_1) = 0$$

erfüllt werden. Jenes kann nur geschehen, wenn die Grundaxe OY mit der Polaraxe O𝔜 in einer Geraden liegt, und aus den Gleichungen (38. a.) geht hervor, dass die Projectionszahlen (A_1) und (A'_1) sich zu einander eben so wie die A_1 und A'_1 verhalten müssen, was zur Folge hat, dass die ihnen entsprechenden Richtungen mit einander parallel laufen, dass mithin auch noch die Grundaxe OY′ mit der Polaraxe O𝔜′ in einer Geraden liegt. Beide Bestimmungen vereinigen sich mit einander dahin, dass das gesuchte ebene System ein rechtwinkliges sein müsse. Aus diesem Grunde ist bei ihm sowohl

$$A_1 C + A'_1 C' = 0 \quad \text{als} \quad C_1 A + C'_1 A' = 0,$$

und weil die Axe OY mit der AX parallel läuft, so ist $A = 1$, $A' = 0$ und $C = 1$, $C' = \cos W$, daher nehmen die so eben mitgetheilten Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$A_1 + A'_1 \cos W = 0 \quad \text{und} \quad C_1 = 0.$$

Aus $C_1 = 0$ folgt $C'_1 = \sin W$, und nun lassen sich aus den bekannten senkrechten Projectionszahlen C_1 und C'_1 die derselben Richtung angehörigen schiefen A_1 und A'_1 mittelst der im ersten Abschnitte gelieferten zwei letzten Gleichungen (180. a.) finden, denen gemäss

$$A_1 \sin^2 W = C_1 - C'_1 \cos W \quad \text{und} \quad A'_1 \sin^2 W = C'_1 - C_1 \cos W,$$

oder wenn man für C_1 und C'_1 ihre eben gefundenen Werthe setzt

$$A_1 \sin W = -\cos W \quad \text{und} \quad A'_1 \sin W = 1$$

ist, woraus man findet:

$$A_1 = -\operatorname{cotg} W \quad \text{und} \quad A'_1 = \frac{1}{\sin W},$$

und durch diese Werthe von A_1 und A'_1 geht die erste in (38. a.) enthaltene Bedingung über in:

$$-\gamma \operatorname{cotg} W + \alpha'\xi' \frac{1}{\sin W} = 0$$

und liefert:

(38. b.) $$\xi' = \frac{\gamma \cos W}{\alpha'},$$

wodurch der Punct O sowohl als die Lage der Axen in dem gesuchten Systeme gegeben sind.

Ist hingegen die Parabel durch eine Gleichung von der hintern Form (11. b.) gegeben, so muss, wie in Nr. 190. gezeigt worden ist, wenn das durch den Punct O hindurch gehende System eine Gleichung von der ersten in (11. b.) oder (11. c.) stehenden Form geben soll, die eine Grundaxe, wozu wir die O Y nehmen wollen, mit der Polaraxe A 𝔛 parallel laufen, und die Richtung der andern Grundaxe die Bedingung (21. b.) erfüllen; und soll das durch den Punct O gelegte Coordinatensystem eine Gleichung von der zweiten jener Formen geben, so muss nach den dortigen Ergebnissen die eine Polaraxe des neuen Systems, welches die O 𝔜 sein mag, mit derselben Polaraxe A 𝔛 parallel laufen, und die Richtung der andern Polaraxe O 𝔜′ die Bedingung (22. b.) erfüllen; soll daher ein und dasselbe durch O gelegte System gleichzeitig zu einer Gleichung sowohl von der vordern wie von der hintern in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen Form hinführen, so muss gleichzeitig die Grundaxe O Y und die Polaraxe O 𝔜 mit der Polaraxe A 𝔛 parallel laufen, und es müssen gleichzeitig die beiden Bedingungen

$$\zeta C_1 + \delta' \eta' C'_1 = 0\ ,\quad \zeta (\Gamma_1) + \delta' \eta' (\Gamma'_1) = 0 \qquad \textbf{(38. c.)}$$

erfüllt werden. Jenes kann nur geschehen, wenn die Grundaxe O Y mit der Polaraxe O 𝔜 in einer Geraden liegt, und aus den Gleichungen (38. c.) geht hervor, dass sich die Projectionszahlen (Γ_1) und (Γ'_1) zu einander eben so wie die C_1 und C'_1 verhalten müssen, was zur Folge hat, dass die ihnen entsprechenden Richtungen mit einander parallel laufen, dass mithin auch noch die Grundaxe O Y′ mit der Polaraxe O 𝔜′ in einer Geraden liegt; beide Bestimmungen vereinigen sich aber mit einander dahin, dass das gesuchte ebene System ein rechtwinkliges ist. Aus diesem Grunde ist auch bei ihm wieder

$$A_1 C + A'_1 C' = 0 \quad \text{und} \quad C_1 A + C'_1 A' = 0\ ,$$

und diese beiden Gleichungen verwandeln sich hier, wo die Grundaxe O Y mit der Polaraxe A 𝔛 parallel läuft, also $C = \mathfrak{C}$, $C' = 0$ und $A = \mathfrak{A}$, $A' = \mathfrak{A}'$ ist, oder wenn man für $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ ihre Werthe aus den im ersten Abschnitte gegebenen Gleichungen (108. e.) nimmt:

$$C = \sin W\ ,\quad C' = 0 \quad \text{und} \quad A = \frac{1}{\sin W}\ ,\quad A' = -\operatorname{cotg} W\ ,$$

wodurch die zuvor angeschriebenen werden:

$$A_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 - C'_1 \cos W = 0\ .$$

Aus $A_1 = 0$ folgt $\pm A'_1 = 1$, und nun lassen sich aus den bekannten schiefen Projectionszahlen A_1 und A'_1 die senkrechten C_1 und C'_1 mit Hilfe der im ersten Abschnitte aufgeführten Gleichungen (108. a.) finden, welche aussagen, dass

$$C_1 = A_1 + A'_1 \cos W \quad \text{und} \quad C'_1 = A_1 \cos W + A'_1$$

oder mit Beiziehung der Werthe von A_1 und A'_1

$$C_1 = \pm \cos W \quad \text{und} \quad C'_1 = \pm 1$$

ist; diese Werthe von C_1 und C'_1 verwandeln aber die erste Bedingung (38. c.) in:

$$\zeta \cos W + \delta' \eta' = 0\ ,$$

und diese Gleichung liefert:

$$\eta' = -\frac{\zeta \cos W}{\delta'}\ , \qquad \textbf{(38. d.)}$$

womit nun wieder der Punct O sowohl als auch die Lage der Axen in dem gesuchten Systeme gefunden ist.

Die hier erhaltenen Resultate geben die, welche den Fall angehen, wenn die Parabel durch eine der Gleichungen (11. c.) gegeben ist, wenn man γ, α', ξ' mit γ', α, ξ oder ζ, δ', η' mit ζ', δ, η vertauscht.

197) Als zweites Beispiel wollen wir die Willkührlichkeit des Punctes O, welcher die Spitze des Coordinatensystems vorstellt, an welchem die Parabel durch eine Gleichung von einer der in (11. b.) oder (11. c.) enthaltenen Formen dargestellt wird, dazu benützen, um zu einer Gleichung von möglichst einfacher Gestalt zu gelangen. In Nr. 188. haben wir gefunden, dass die Gleichung einer Parabel, welche von der ersten oder zweiten Form (11. b.) ist, an einem neuen Systeme, dessen Spitze ein anderer durch seine Coordinate ξ' oder η' gegebener Punct der Parabel ist, sich in die (17. d.) oder (17. e.) überführen lässt, und in Nr. 189. haben wir gezeigt, dass die (17. d.) sich immer sowohl in die Form (18. c.) als auch in die (20. c.) überführen lässt, je nachdem man die noch unbestimmt gebliebene Richtung der Grundaxe O Y′ oder der Polaraxe O 𝔜′ der Bedingung (18. b.) oder (20. b.), nämlich der

(39. a.) $$\gamma A_1 + \alpha'\xi' A_1' = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma(A_1) + \alpha'\xi'(A_1) = 0$$

unterwirft; ferner haben wir in Nr. 190. gezeigt, dass die (17. e.) sich immer sowohl in die Form (21. c.) als auch in die (22. c.) überführen lässt, je nachdem man die noch unbestimmt gebliebene Richtung der Grundaxe O Y′ oder der Polaraxe O 𝔜′ der Bedingung (21. b.) oder (22. b.) nämlich der

(39. b.) $$\zeta C_1 + \delta'\eta' C_1' = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta(\Gamma_1) + \delta'\eta'(\Gamma_1') = 0$$

unterwirft. Man kann nun um eine der Bedingungen (39. a.) oder (39. b.) zu erfüllen, den Punkt O durch seine Coordinate ξ' oder η' geben und dann die an diesem Puncte erforderliche Richtung der Grundaxe O Y′ oder der Polaraxe O 𝔜′ dazu aufsuchen, oder auch diese Richtung geben und ihr gemäss den Punct O bestimmen, oder noch allgemeiner zwischen dieser Richtung und den ihr entsprechenden Punct irgend ein beliebiges Verhalten festsetzen. Verfügt man nun über diese beiden Dinge in der Weise, dass die beiden Coeffizienten in der Gleichung (18. c.) oder (20. c.) oder (21. c.) oder (22. c.) einander gleich werden, d. h., dass

(39. c.) $$\alpha' A_1'^2 = \pm 2\gamma \quad \text{oder} \quad \alpha' \frac{(A_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} = \pm \frac{2\gamma}{\mathfrak{D}}$$

so wie auch

(39. d.) $$\delta' C_1'^2 = \pm 2\mathfrak{C}\zeta \quad \text{oder} \quad \delta' \frac{(\Gamma_1')^2}{\mathfrak{D}_1'^2} = \pm 2\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}\zeta$$

ist, wobei in allen diesen Gleichungen das obere oder untere Vorzeichen genommen werden muss, je nachdem α' und γ oder δ' und ζ Zahlen mit gleichen oder entgegengesetzten Vorzeichen sind, und die vordere und hintere Gleichung in (39. c.) der gleichgestellten in (39. a.) entspricht und das Gleiche auch in Betreff der Gleichungen (39. d.) und (39. b.) statt hat, so gehen die Gleichungen (18. c.) und (20. c.) sowohl als auch die (21. c.) und (22. c.) ihrer Ordnung nach über in:

(40.) $$y'^2 \pm y = 0 \quad \text{oder} \quad v'^2 \pm v = 0.$$

Jede der in (39. a. und b.) enthaltenen Gleichungen liefert für den zugehörigen Fall die schiefe oder senkrechte Projectionszahl der zu bestimmenden Richtung OY' oder $O\mathfrak{Y}'$ an AX', und um die zugehörige Projectionszahl an AX zu finden, braucht man nur die geeignete der hinter (34. d.) stehenden Richtungsgleichungen beizuziehen. Diese Richtungsgleichungen lassen aber für die in ihnen vorkommenden schiefen Projectionszahlen nur solche reelle Werthe zu, die zwischen $+\frac{1}{\sin W}$ und $-\frac{1}{\sin W}$ und für die senkrechten nur solche, die zwischen $+1$ und -1 liegen. Man sieht daher, dass keine der Gleichungen (11. b.) sich auf die Form der ersten in (40.) bringen lässt, so wie der absolute Werth von $\frac{2\gamma}{\alpha'}$ die Grösse $\frac{1}{\sin^2 W}$ und der absolute Werth von $\frac{2\mathfrak{C}\zeta}{\delta'}$ oder $\frac{2\zeta}{\delta'}\sin W$ die Grösse 1 übersteigt. Unter den gleichen Umständen lässt sich aber auch keine der Gleichungen (11. b.) auf die Form der zweiten in (40.) bringen, wie man sogleich einsieht, wenn man bedenkt, dass

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'_1 = \sin W_1 = \sin \mathfrak{W}_1 \quad \text{und} \quad (A') = (\Gamma') = 0$$

ist, wesshalb die Gleichungen des I. Abschnitts (110. e. und g.)

$$\sin \mathfrak{W}_1 = \pm (A'_1) \sin W \quad \text{und} \quad \sin \mathfrak{W}_1 \sin W = \pm \mathfrak{C} (\Gamma'_1)$$

liefern. Die zweiten Gleichungen (39. c. und d.) verwandeln sich nämlich durch diese Werthe für $\sin \mathfrak{W}_1$ in:

$$\alpha'(A'_1) = \pm 2\gamma \sin W \quad \text{und} \quad \delta'(\Gamma'_1) = \pm 2\zeta \sin W,$$

wobei in jeder dieser Gleichungen $+$ oder $-$ nach Belieben genommen werden kann.

Ist bei der Parabel der absolute Werth von $\frac{2\gamma}{\alpha'}$ kleiner als $\frac{1}{\sin^2 W}$ oder der von $\frac{2\zeta}{\delta'}\sin W$ kleiner als 1, so liefert jede der Gleichungen (39. c. und d.) in Verbindung mit der entsprechenden Richtungsgleichung vier Richtungen für OY' oder $O\mathfrak{Y}'$, welche zusammen zweien Geraden angehören, die nur ausnahmsweise zusammenfallen, und die Gleichungen (39. a. und b.) geben sodann bei Richtungen, die derselben Geraden angehören, den gleichen Werth für ξ' oder η', hingegen bei Richtungen, die verschiedenen Geraden angehören, verschiedene Werthe.

§. 17.

Von den krummen Flächen der zweiten Ordnung.

198) Da bei der gegenwärtigen Untersuchung wie bei der Betrachtung der ebenen Curven zweiter Ordnung das Uebertragen der Puncte aus einem beliebigen Parallelsystem in ein anderes wieder eine besondere Geltung erlangt, so werden wir die dahin gehörigen Relationen an die Spitze dieses Paragraphen stellen, theils um den Leser an die früher gefundenen Abhängigkeiten zu erinnern, theils um bei ihrem nun häufig vorkommenden Gebrauche eine bequemere Art auf sie hinzuweisen zu gewinnen. Es ist den in Nr. 35. des ersten Abschnitts aufgestellten Gleichungen (66. b.) und (67. a.) gemäss immer:

(41. a.) $x = A y + A_1 y' + A_2 y''$, $x' = A' y + A'_1 y' + A'_2 y''$, $x'' = A'' y + A''_1 y' + A''_2 y''$

und

(41. b.) $\mathfrak{C} x = (B) v + (B') v' + (B'') v''$, $\mathfrak{C}'_1 x' = (B_1) v + (B'_1) v' + (B''_1) v''$, $\mathfrak{C}''_2 x'' = (B_2) v + (B'_2) v' + (B''_2) v''$,

wenn x, x', x'' die schiefen Coordinaten eines Punctes an einem beliebigen Coordinatensysteme vorstellen, und y, y', y'' die schiefen, v, v', v'' die senkrechten Coordinaten desselben Punctes an einem beliebigen andern Coordinatensysteme, während die neben ihnen befindlichen Projectionszahlen die stehende Bedeutung beibehalten, welche ihnen im ersten Abschnitte gegeben worden ist. Eben so hat man den dort aufgestellten Gleichungen (64. b.) und (65. b.) gemäss stets:

(41. c.) $u = C y + C_1 y' + C_2 y''$, $u' = C' y + C'_1 y' + C'_2 y''$, $u'' = C'' y + C''_1 y' + C''_2 y''$

und

(41. d.) $u = B v + B' v' + B'' v''$, $u' = B_1 v + B'_1 v' + B''_1 v''$, $u'' = B_2 v + B'_2 v' + B''_2 v''$,

wenn u, u', u'' die den schiefen x, x', x'' entsprechenden senkrechten Coordinaten des Punctes vorstellen. Man kann den Gleichungen (41. b.) und (41. d.) eine etwas abgeänderte Gestalt geben, wodurch sie denen (41. a.) und (41. c.) ähnlicher werden, und ein vollständigerer Parallelismus der aus den beiderlei Gleichungen hervorgehenden Formeln entsteht. Setzt man nämlich in die (41. b.) anstatt der mit dem Grundzeichen (B) versehenen Projectionszahlen die mit dem Grundzeichen (A) versehenen mittelst der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (87.), so gehen sie über in:

(41. e.) $x = \frac{(A)}{\mathfrak{D}} v + \frac{(A_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(A_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$, $x' = \frac{(A')}{\mathfrak{D}} v + \frac{(A'_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(A'_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$, $x'' = \frac{(A'')}{\mathfrak{D}} v + \frac{(A''_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(A''_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$;

und setzt man in die Gleichungen (41. d.) anstatt der mit dem Grundzeichen B versehenen Projectionszahlen die mit dem Grundzeichen (Γ) versehenen mittelst der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (87.), so verwandeln sie sich in:

(41. f.) $u = \frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}} v + \frac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(\Gamma_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$, $u' = \frac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}} v + \frac{(\Gamma'_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(\Gamma'_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$, $u'' = \frac{(\Gamma'')}{\mathfrak{D}} v + \frac{(\Gamma''_1)}{\mathfrak{D}'_1} v' + \frac{(\Gamma''_2)}{\mathfrak{D}''_2} v''$.

Die vorstehenden Gleichungen (41. a. bis f.) sprechen die Beziehungen, welche zwischen den Coordinaten von einem und demselben Puncte an zwei beliebigen Parallelsystemen mit einerlei Spitze statt finden, in allgemeinster Weise aus; man kann indessen diesen Correlationsformeln dadurch, dass man einer oder mehrern Axen des neu einzuführenden Systems eigenthümliche Stellungen gegen die ursprünglichen Axen anweist, noch allerhand besondere Formen geben. So nehmen die Gleichungen (41. a.), wenn man die Axe A Y'' des neu einzuführenden Systems mit der Axe A X'' vom ursprünglichen System zusammenfallen lässt, weil dann

$$A_2 = 0, \quad A'_2 = 0, \quad A''_2 = 1$$

ist, die folgende Gestalt an:

(42. a.) $x = A y + A_1 y'$, $x' = A' y + A'_1 y'$, $x'' = A'' y + A''_1 y' + y''$,

und ebenso nehmen die Gleichungen (41. e.), wenn man die Polaraxe $A\mathfrak{Y}''$ des neu einzuführenden Systems in die ursprüngliche Grundaxe A X'' fallen lässt, weil dann

$$(A_2) = 0, \quad (A'_2) = 0, \quad (A''_2) = 1$$

ist, die nachstehende Gestalt an:

$$x=\frac{(A)}{\mathfrak{D}}v+\frac{(A_1)}{\mathfrak{D}'_1}v',\quad x'=\frac{(A')}{\mathfrak{D}}v+\frac{(A'_1)}{\mathfrak{D}'_1}v',\quad x''=\frac{(A'')}{\mathfrak{D}}v+\frac{(A''_1)}{\mathfrak{D}'_1}v'+\frac{1}{\mathfrak{D}''_2}v''. \qquad \textbf{(42. b.)}$$

Ferner verwandeln sich die Gleichungen (41. c.), wenn man die Grundaxe AY'' des neu einzuführenden Systems mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ des ursprünglichen Systems zusammenfallen lässt, weil dann

$$C_2=0\,,\quad C'_2=0\,,\quad C''_2=\mathfrak{C}''_2$$

ist, in:

$$u=Cy+C_1y',\quad u'=C'y+C'_1y',\quad u''=C''y+C''_1y'+\mathfrak{C}''_2y'', \qquad \textbf{(42. c.)}$$

und eben so gehen die Gleichungen (41. f.), wenn man die Polaraxen $A\mathfrak{Y}''$ vom neu einzuführenden System in die Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ des ursprünglichen fallen lässt, weil dann

$$(\Gamma_2)=0\,,\quad (\Gamma'_2)=0\,,\quad (\Gamma''_2)=\mathfrak{C}''_2$$

ist, über in:

$$u=\frac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}}v+\frac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}'_1}v',\quad u'=\frac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}}v+\frac{(\Gamma'_1)}{\mathfrak{D}'_1}v',\quad u''=\frac{(\Gamma'')}{\mathfrak{D}}v+\frac{(\Gamma''_1)}{\mathfrak{D}'_1}v'+\frac{\mathfrak{C}''_2}{\mathfrak{D}''_2}v''. \qquad \textbf{(42. d.)}$$

Wir haben aus der grossen Anzahl besonderer Correlationsformeln die vier vorstehenden herausgehoben, weil wir von ihnen im Folgenden Gebrauch zu machen gedenken.

199) Ist eine Fläche in schiefen Coordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha x^2+\alpha' x'^2+\alpha'' x''^2+2\beta'' x x'+2\beta' x x''+2\beta x' x''=\mu+2\gamma x+2\gamma' x'+2\gamma'' x'' \qquad \textbf{(43. a.)}$$

oder in senkrechten Coordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\delta u^2+\delta' u'^2+\delta'' u''^2+2\varepsilon'' u u'+2\varepsilon' u u''+2\varepsilon u' u''=\nu+2\zeta u+2\zeta' u'+2\zeta'' u'' \qquad \textbf{(43. b.)}$$

gegeben, — in denen x, x', x'' die schiefen, oder u, u', u'' die senkrechten Coordinaten der Flächenpuncte an den Axen AX, AX', AX'' eines beliebigen aber bestimmt gedachten Parallelsystems vorstellen, alle übrigen Buchstaben dagegen beliebige reelle, positive oder negative Zahlen, die auch null werden können, zu bedeuten haben, — so wird das durch eine solche Gleichung dargestellte Gebilde eine **Fläche zweiter Ordnung** genannt aus dem Grunde, weil die Gleichung einen ganzen Ausdruck des **zweiten** Grades bezüglich der Coordinaten in sich aufnimmt. In allen auf den linken Seiten dieser Gleichungen stehenden Gliedern treten die Coordinaten zweimal hinter einander als doppelter Factor auf, wesswegen wir sie, in ihrer Verbindung aufgefasst, den **Theil der zweiten Dimension der Gleichung** nennen werden. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen dagegen kommt ein Glied vor, das gar keine Coordinate in sich enthält, und das wir aus diesem Grunde das **constante Glied der Gleichung** nennen wollen; ausserdem stehen auf dieser rechten Seite nur noch Glieder, in welchen eine der Coordinaten als einfacher Factor auftritt, und die wir desshalb, in ihrer Verbindung aufgefasst, den **Theil der ersten Dimension** der Gleichung nennen werden. Ist man Willens die Fläche, welche durch eine Gleichung von der Form (43. a.) oder (43. b.) dargestellt wird, an den Axen AY, AY', AY'' eines neu einzuführenden Systems, welches mit dem vorigen die Spitze A gemein hat, darzustellen, so darf man nur in die gegebene Gleichung für x, x', x'' oder u, u', u'' ihre durch die Gleichungen (41. a.) oder (41. c.) gegebenen Werthe setzen, wenn man die neue Gleichung in schiefen Coordinaten erhalten will, oder die durch die Gleichungen (41. e.) oder (41. f.) gegebenen Werthe, wenn man die neue Glei-

chung in senkrechten Coordinaten finden will; und soll dabei eine Grund- oder Polaraxe des neu einzuführenden Systems mit einer Grund- oder Polaraxe des ursprünglichen Systems zusammen fallen, so hat man anstatt der genannten allgemeinen Gleichungen die zu nehmen, welche den in (42. a. bis d.) angezeigten nachgebildet sind. Weil nun alle solche Uebertragungsformeln, die sich auf zwei Systeme mit gemeinschaftlicher Spitze beziehen, immer in Bezug auf die Coordinaten homogene Gleichungen des ersten Grades sind, so giebt bei jeder möglichen solchen Uebertragung der Theil der ersten Dimension in der ursprünglichen Gleichung den ganzen Theil der ersten Dimension und nichts als ihn in der neuen Gleichung her, und eben so geht aus dem Theile der zweiten Dimension von jener Gleichung der Theil der zweiten Dimension und ausser ihm nichts in dieser Gleichung hervor, so wie das constante Glied in den beiden Gleichungen das gleiche bleibt.

Wenn man hingegen die Fläche zweiter Ordnung an einem neuen Coordinatensysteme darstellen will, das eine andere Spitze O hat, und man bezeichnet die Coordinaten der Flächenpuncte an diesem neuen Systeme durch x_0, x'_0, x''_0, wenn es schiefe sind, oder durch u_0, u'_0, u''_0, wenn es senkrechte sind, so wie durch ξ, ξ', ξ'' die schiefen und durch η, η', η'' die senkrechten Coordinaten des zur Spitze gewählten Punctes O an den ursprünglichen Axen, so hat man in Gemässheit der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (7.), wenn man die neuen Axen denen AX, AX', AX'' parallel und gleichläufig annimmt und durch OX, OX', OX'' bezeichnet,

(44.) $x = \xi + x_0$, $x' = \xi' + x'_0$, $x'' = \xi'' + x''_0$ oder $u = \eta + u_0$, $u' = \eta' + u'_0$, $u''_0 = \eta'' + u''_0$;

daher erhält man die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung an diesem neuen Systeme aus der an dem ursprünglichen Systeme gegebenen (43. a.) oder (43. b.), wenn man in diese für x, x', x'' oder u, u', u'' ihre in den Gleichungen (44.) stehenden Werthe setzt. Hierbei hat man sich die Coordinaten der neuen Spitze O im Allgemeinen als constante Grössen vorzustellen, welche Ursache werden, dass aus dem Theile der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung nicht allein der Theil der zweiten Dimension in der neuen Gleichung hervorgeht, sondern neben ihm auch noch andere Glieder sich erzeugen, die theils zu dem Theile der ersten Dimension, theils zu dem constanten Gliede in der neuen Gleichung geschlagen werden müssen, und eben so giebt der Theil der ersten Dimension in der gegebenen Gleichung theils Glieder her, die zu dem Theile der ersten Dimension in der neuen Gleichung gezogen werden müssen, theils solche, die in das constante Glied der neuen Gleichung übergehen. Wenn also die Spitze des neuen Systems nicht in der ursprünglichen Spitze liegen bleibt, so giebt nicht mehr jeder Theil von einer bestimmten Dimension in der gegebenen Gleichung blos einen Theil von derselben Dimension für die neue Gleichung her, wie da wo die beiden Systeme eine gemeinschaftliche Spitze haben; weil aber die Gleichungen (44.) sämmtlich doch nur vom ersten Grade in Bezug auf die Coordinaten sind, so nimmt die neue Gleichung immer wieder einen Ausdruck von dem gleichen Grade wie die gegebene in sich auf, so dass unsere Fläche der zweiten Ordnung an allen möglichen Parallelsystemen durch Gleichungen dargestellt wird, die neben einem constanten Gliede und einem Theile der ersten Dimension nur noch einen Theil der zweiten Dimension enthalten können, in welchem Umstande eben die Benennung „Fläche der zweiten Ordnung“ ihre Rechtfertigung findet.

In den nun folgenden Nummern werden wir ausschlisslich nur auf die Veränderungen unser Augenmerk richten, welche in dem Theile der zweiten Dimension vorfallen, während eine

Gleichung von einer der in (43. a.) und (43. b.) angegebenen Formen aus einem Coordinatensystem in ein anderes übergetragen wird, deswegen werden wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$\mu + 2\gamma x + 2\gamma' x' + 2\gamma'' x'' = M \quad \text{und} \quad \nu + 2\zeta u + 2\zeta' u' + 2\zeta'' u'' = N \qquad \textbf{(45. a.)}$$

setzen, wodurch jene Gleichungen sich in der folgenden abgekürzten Weise schreiben lassen:

$$\text{oder} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + 2\beta'' x x' + 2\beta' x x'' + 2\beta x' x'' = M \\ \delta u^2 + \delta' u'^2 + \delta'' u''^2 + 2\varepsilon'' u u' + 2\varepsilon' u u'' + 2\varepsilon u' u'' = N. \end{array}\right\} \ldots\ldots \qquad \textbf{(45. b.)}$$

Die Theile M und N, welche das constante Glied in Verbindung mit dem Theile der ersten Dimension in sich fassen, verwandeln sich, wie wir so eben gesehen haben, bei jeder Uebertragung der Gleichung aus einem Parallelsysteme in ein anderes, das mit dem ursprünglichen die Spitze A gemeinschaftlich hat, in andere, die wir mit M_1 und N_1 bezeichnen werden, welche dasselbe constante Glied wie die M und N in sich aufnehmen, und ausserdem noch den Theil der ersten Dimension, der lediglich aus dem Theile von der gleichen Dimension in der gegebenen Gleichung durch die bei dieser Uebertragung vorzunehmenden Substitutionen erhalten wird.

200) Wir denken uns jetzt durch die Spitze A des aus den Axen AX, AX′, AX″ gebildeten ursprünglichen Coordinatensystems, an welchem eine Fläche zweiter Ordnung durch eine Gleichung von der ersten in (45. b.) enthaltenen Form gegeben ist, drei neue Axen AY, AY′, AY″ gelegt, von welchen die AY″ mit der AX″ zusammen fällt, so werden wir aus der gegebenen Gleichung die herleiten können, welche dieselbe Fläche an den neuen Axen in schiefen Coordinaten darstellt, wenn wir in sie für x, x′, x″ ihre durch die Gleichungen (42. a.) gegebenen Werthe einsetzen. Thun wir diess, so erhalten wir als neue Gleichung die folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'' y''^2 + (\alpha'' A_1''^2 + \alpha' A_1'^2 + \alpha A_1^2 + 2\beta A_1' A_1'' + 2\beta' A_1 A_1'' + 2\beta'' A_1 A_1') y'^2 \\ + (\alpha'' A''^2 + \alpha' A'^2 + \alpha A^2 + 2\beta A' A'' + 2\beta' A A'' + 2\beta'' A A') y^2 \\ + 2(\alpha'' A_1'' + \beta A_1' + \beta' A_1) y' y'' + 2(\alpha'' A'' + \beta A' + \beta' A) y y'' \\ + 2[\alpha'' A'' A_1'' + \alpha' A' A_1' + \alpha A A_1 + \beta(A' A_1'' + A'' A_1') + \beta'(A A_1'' + A'' A_1) + \beta''(A A_1' + A' A_1)] y y' = M_1, \end{array}\right\} \qquad \textbf{(46. a.)}$$

wo M_1 das bedeutet, was aus M durch die gleiche Substitution hervorgeht. Wählt man nun die zwei unbestimmt gebliebenen Axen AY, AY′ so, dass

$$\text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha'' A_1'' + \beta A_1' + \beta' A_1 = 0, \quad \alpha'' A'' + \beta A' + \beta' A = 0 \\ -\alpha'' A'' A_1'' + \alpha' A' A_1' + \alpha A A_1 + \beta''(A A_1' + A' A_1) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots \qquad \textbf{(46. b.)}$$

wird, so verschwinden aus der Gleichung (46. a.) die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten in sich tragen und in Folge dessen geht diese Gleichung über in:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'' y''^2 + (\alpha'' A_1''^2 + \alpha' A_1'^2 + \alpha A_1^2 + 2\beta A_1' A_1'' + 2\beta' A_1 A_1'' + 2\beta'' A_1 A_1') y'^2 \\ \quad + (\alpha'' A''^2 + \alpha' A'^2 + \alpha A^2 + 2\beta A' A'' + 2\beta' A A'' + 2\beta'' A A') y^2 = M_1. \end{array}\right\} \ldots\ldots \qquad \textbf{(46. c.)}$$

Ist nun α'' nicht null, so lassen sich mittelst der ersten zwei Gleichungen (46. b.) die Grössen A_1'' und A'' in A_1, A_1' und A, A' ausdrücken, und setzt man die so für A_1'' und A'' er-

haltenen Ausdrücke in die dritte Bedingung (46. b.), so verwandelt sich diese nach einer leichten Umwandlung in:

(46. d.) $$(\alpha'\alpha''-\beta^2)A'A_1'+(\alpha\alpha''-\beta'^2)AA_1+(\alpha''\beta''-\beta\beta')(AA_1'+A'A_1)=0.$$

Durch die gleiche Substitution verwandeln sich die Coeffizienten von y'^2 und y^2 in der Gleichung (46. c.) in:

$$\frac{1}{\alpha''}[(\alpha'\alpha''-\beta^2)A_1'^2+(\alpha\alpha''-\beta'^2)A_1^2+2(\beta''\alpha''-\beta\beta')A_1A_1']$$

und

$$\frac{1}{\alpha''}[(\alpha'\alpha''-\beta^2)A'^2+(\alpha\alpha''-\beta'^2)A^2+2(\beta''\alpha''-\beta\beta')AA'],$$

so dass die Gleichung (46. c.) wird:

(46. e.) $$\alpha''y''^2+\frac{1}{\alpha''}[(\alpha'\alpha''-\beta^2)A_1'^2+(\alpha\alpha''-\beta'^2)A_1^2+2(\beta''\alpha''-\beta\beta')A_1A_1']y'^2$$
$$+\frac{1}{\alpha''}[(\alpha'\alpha''-\beta^2)A'^2+(\alpha\alpha''-\beta'^2)A^2+2(\beta''\alpha''-\beta\beta')AA']y^2=M_1.$$

Die aus den Coeffizienten der gegebenen Gleichung auf die Art gebildeten Ausdrücke, wie es die neben den Projectionszahlen stehenden Factoren in den Gleichungen (46. d. und e.) sind, kommen von jetzt an vielfach zum Vorschein; daher werden wir zur Abkürzung

(47. a.) $$\left\{\begin{array}{l}\alpha'\alpha''-\beta^2=\varkappa,\quad \alpha\alpha''-\beta'^2=\varkappa',\quad \alpha\alpha'-\beta''^2=\varkappa''\\ \text{und}\\ \beta''\alpha''-\beta\beta'=\lambda'',\quad \beta'\alpha'-\beta\beta''=\lambda',\quad \beta\alpha-\beta'\beta''=\lambda\end{array}\right.$$

setzen, und eben so sollen in Bezug auf die zweite Gleichung (45. b.), die aus ihren Coeffizienten ähnlich gebildeten Ausdrücke

(47. b.) $$\delta'\delta''-\varepsilon^2=\sigma,\quad \delta\delta''-\varepsilon'^2=\sigma',\quad \delta\delta'-\varepsilon''^2=\sigma''$$
und
$$\varepsilon''\delta''-\varepsilon\varepsilon'=\tau'',\quad \varepsilon'\delta'-\varepsilon\varepsilon''=\tau',\quad \varepsilon\delta-\varepsilon'\varepsilon''=\tau$$

bezeichnet werden.

Zwischen den hier eingeführten, aus den Coeffizienten der gegebenen Gleichung zusammengesetzten Ausdrücken finden Beziehungen statt, von denen wir die vorzüglichsten gleich hier anzeigen wollen. Setzt man an die Stelle von $\varkappa$, $\varkappa'$ und λ'' das was diese Buchstaben den Gleichungen (47. a.) zur Folge zu bedeuten haben, so findet man zunächst, dass

$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2=(\alpha'\alpha''-\beta^2)(\alpha\alpha''-\beta'^2)-(\beta''\alpha''-\beta\beta')^2$$

ist, oder, wenn wir die Klammern wegschaffen durch Ausführung der angezeigten Multiplicationen, dass

$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2=\alpha''(\alpha\alpha'\alpha''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2+2\beta\beta'\beta'')$$

ist, und auf dieselbe Weise zeigt es sich, dass

$$\varkappa\varkappa''-\lambda'^2=\alpha'(\alpha\alpha'\alpha''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2+2\beta\beta'\beta'')$$
und
$$\varkappa'\varkappa''-\lambda^2=\alpha(\alpha\alpha'\alpha''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2+2\beta\beta'\beta'')$$

ist; setzt man daher zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\alpha'\alpha''-\alpha\beta^2-\alpha'\beta'^2-\alpha''\beta''^2+2\beta\beta'\beta''=\mathfrak{L} \\ \text{so ist:} \\ \varkappa\varkappa'-\lambda''^2=\alpha''\mathfrak{L}, \quad \varkappa\varkappa''-\lambda'^2=\alpha'\mathfrak{L}, \quad \varkappa'\varkappa''-\lambda^2=\alpha\mathfrak{L}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (47.\ c.)$$

Ganz auf die gleiche Weise findet man aber auch, dass

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\sigma'-\tau''^2=\delta''\Delta, \quad \sigma\sigma''-\tau'^2=\delta'\Delta, \quad \sigma'\sigma''-\tau^2=\delta\Delta \\ \text{ist, wenn zur Abkürzung} \\ \delta\delta'\delta''-\delta\varepsilon^2-\delta'\varepsilon'^2-\delta''\varepsilon''^2+2\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''=\Delta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (47.\ d.)$$

gesetzt wird. Neben diesen Relationen, zwischen den in (47. a. und b.) bezeichneten Ausdrücken und den Coeffizienten der ursprünglich gegebenen Gleichung wollen wir uns noch die Folgenden merken. Es ist:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\varkappa-\beta'\lambda'-\beta''\lambda''=\alpha'\varkappa'-\beta\lambda-\beta''\lambda''=\alpha''\varkappa''-\beta\lambda-\beta'\lambda'=\mathfrak{L} \\ \text{und} \\ \alpha\varkappa+\beta\lambda=\alpha'\varkappa'+\beta'\lambda'=\alpha''\varkappa''+\beta''\lambda''=\alpha\alpha'\alpha''-\beta\beta'\beta'', \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (47.\ e.)$$

und eben so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \delta\sigma-\varepsilon'\tau'-\varepsilon''\tau''=\delta'\sigma'-\varepsilon\tau-\varepsilon''\tau''=\delta''\sigma''-\varepsilon\tau-\varepsilon'\tau'=\Delta \\ \text{und} \\ \delta\sigma+\varepsilon\tau=\delta'\sigma'+\varepsilon'\tau'=\delta''\sigma''+\varepsilon''\tau''=\delta\delta'\delta''-\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'', \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad (47.\ f.)$$

wie man sogleich gewahr wird, wenn man in diese letztern Gleichungen für $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ und λ, λ', λ'' nach Anleitung der Gleichungen (47. a.) oder für σ, σ', σ'' und τ, τ', τ'' nach Anleitung der Gleichungen (47. b.) das einsetzt, was diese Zeichen vorzustellen haben.

In Folge der in (47. a.) eingeführten Bezeichnungen, lässt sich die Bedingung (46. d.) so schreiben:

$$\varkappa A'A'_1+\varkappa'AA_1+\lambda''(AA'_1+A'A_1)=0, \quad (48.\ a.)$$

und die Gleichung (46. e.) nimmt in Folge derselben Bezeichnungen die nachstehende Gestalt an:

$$\alpha''y''^2+\frac{1}{\alpha''}(\varkappa A_1'^2+\varkappa'A_1^2+2\lambda''A_1A_1')y'^2+\frac{1}{\alpha''}(\varkappa A'^2+\varkappa'A^2+2\lambda''AA')y^2=M_1. \quad (48.\ b.)$$

Der Gang durch den wir zu den Gleichungen (48. a. und b.) gekommen sind, stützt sich auf die Voraussetzung, dass α'' nicht null ist; jedoch selbst wenn $\alpha''=0$ wäre, aber nicht zugleich auch $\alpha'=0$ und $\alpha=0$, so könnte man immer noch auf die gleiche Weise zu ähnlichen Gleichungen gelangen, wenn man anstatt der Axen AY″ und AX″ die AY′ und AX′ oder die AY und AX in einander liegen liesse und übrigens ganz ebenso verführe, wobei man zu Resultaten gelangt, die man aus den vorigen unmittelbar durch eine wechselseitige Vertauschung der dritten oder zweiten Art entnehmen kann, wenn man diese über alle Accente und Indexe nicht blos der Coordinaten und Projectionszahlen sondern auch der Coeffizienten, welche in der gegebenen Gleichung vorkommen, und ihrer in (47. a.) gegebenen Zusammensetzungen sich erstrecken lässt. Nur wenn gleichzeitig $\alpha''=0$, $\alpha'=0$, $\alpha=0$ ist, kann man auf dem hier eingeschlagenen Wege nicht zu demselben Ziele gelangen; in diesem Falle verwandeln sich nämlich die Bedingungen (46. b.) in:

$$\beta A'_1+\beta'A_1=0, \quad \beta A'+\beta'A=0, \quad \beta''(AA'_1+A'A_1)=0, \quad (48.\ c.)$$

und diese drei Gleichungen können nur dann gleichzeitig mit einander bestehen, wenn auch noch einer der Coeffizienten β, β', β'' null ist. Indessen sieht man bald ein, dass man auf einem etwas abgeänderten Wege immer wieder zu einer Gleichung von der Form (48. b.) gelangen kann; denn geht man in dem Falle wo jede von den Grössen α, α', α'' null ist, bei der Bildung der Gleichung (46. a.) nicht darauf aus, dass die Coeffizienten derjenigen ihrer Glieder, welche ein Product von zwei Coordinaten in sich enthalten, null werden, sondern blos darauf, dass einer der Coeffizienten von y'^2 oder y^2 nicht null wird, welches immer auf unzählig viele Arten geschehen kann, und wobei sogar noch die Axen AY′ und AX′ oder die AY und AX in einander liegen bleiben können, so ist es dann möglich von diesem zweiten Coordinatensysteme aus, auf dem vorigen Wege, weil in der an ihm gebildeten Gleichung nicht alle Coeffizienten derjenigen Glieder, welche die Quadrate der Coordinaten in sich tragen, gleichzeitig null sind, zu einem dritten Coordinatensysteme zu gelangen, an welchem eine Gleichung von der in (48. b.) angezeigten Form entsteht, so dass man sagen kann, es sei stets möglich jede Gleichung von der ersten in (45. b.) enthaltenen Form in eine andere auf ein neues Coordinatensystem sich beziehende mit schiefen Coordinaten überzuführen, aus welcher die Glieder verschwunden sind, welche die Producte von zwei Coordinaten in sich aufnehmen.

201) Wollen wir aber aus der ersten Gleichung (45. b.) eine andere in senkrechten Coordinaten ableiten und dabei die Polaraxe A𝔜″ des neuen Coordinatensystems mit der Grundaxe AX″ zusammen fallen lassen, so müssen wir in die gegebene Gleichung für x, x′, x″ ihre aus den Gleichungen (42. b.) entnommenen Werthe einsetzen, wodurch man zu der verlangten Gleichung hingeführt wird; man kann indessen zu dieser Gleichung noch einfacher auf die folgende Weise gelangen. Da nämlich die Gleichungen (42. b.) aus denen (42. a.) hervorgehen, wenn man in diesen das Grundzeichen A mit dem (A) vertauscht, ohne an den Abzeichen irgend eine Aenderung vorzunehmen, und gleichzeitig $\frac{v}{\mathfrak{D}}$, $\frac{v'}{\mathfrak{D}_1'}$, $\frac{v''}{\mathfrak{D}_2''}$ an die Stelle von y, y′, y″ setzt, so muss man durch dasselbe Mittel aus der Gleichung (46. a.) die jetzt verlangte finden. Dem zur Folge wird diese:

(49. a.)
$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha''\frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}+[\alpha''(A_1'')^2+\alpha'(A_1')^2+\alpha(A_1)^2+2\beta(A_1')(A_1'')+2\beta'(A_1)(A_1'')+2\beta''(A)(A_1')]\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\\
&+[\alpha''(A'')^2+\alpha'(A')^2+\alpha(A)^2+2\beta(A')(A'')+2\beta'(A)(A'')+2\beta''(A)(A')]\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}\\
&+2[\alpha''(A_1'')+\beta(A_1')+\beta'(A_1)]\frac{v'\,v''}{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_2''}+2[\alpha''(A'')+\beta(A')+\beta'(A)]\frac{v\,v''}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}_2''}\\
&+2[\alpha''(A'')(A_1'')+\alpha'(A')(A_1')+\alpha(A)(A_1)+\beta((A')(A_1'')+(A'')(A_1'))+\beta'((A)(A_1'')+(A'')(A_1))\\
&+\beta''((A))A_1')+(A')(A_1))]\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'}=M_2,
\end{aligned}\right.$$

wo M_2 auf gleiche Weise aus dem vorigen M_1 sich herholen lässt. In dieser Gleichung verschwinden wieder die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten in sich tragen, wenn man die noch unbestimmt gebliebenen neuen Polaraxen so wählt, dass

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''(A_1'') + \beta(A_1') + \beta'(A_1) = 0 \;,\quad \alpha''(A'') + \beta(A') + \beta'(A) = 0 \\ \text{und} \\ -\alpha''(A'')(A_1'') + \alpha'(A')(A_1') + \alpha(A)(A_1) + \beta''((A)(A_1') + (A')(A_1)) = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \quad (49.\ \text{b.})$$

wird. Sind diese Bedingungen erfüllt, so verwandelt sich die Gleichung (49. a.) in:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''\frac{\mathrm{v}''^2}{\mathfrak{D}_2''^2} + [\alpha''(A_1'')^2 + \alpha'(A_1')^2 + \alpha(A_1)^2 + 2\beta(A_1')(A_1'') + 2\beta'(A_1)(A_1'') + 2\beta''(A_1)(A_1')]\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} \\ + [\alpha''(A'')^2 + \alpha'(A')^2 + \alpha(A)^2 + 2\beta(A')(A'') + 2\beta'(A)(A'') + 2\beta''(A)(A')]\frac{\mathrm{v}^2}{\mathfrak{D}^2} = M_2. \end{array}\right\} \quad (49.\ \text{c.})$$

Ist nun wieder α'' nicht null, so lassen sich die Grössen (A_1'') und (A'') mittelst der beiden ersten Gleichungen (49. b.) in (A_1) und (A_1') und in (A) und (A') ausdrücken und setzt man diese Ausdrücke in die dritte Bedingung (49. b.) so wie in die Gleichung (49. c.), so verwandeln sich diese in andere, welche sich aus den Gleichungen (46. d.) und (46. e.) durch die eben angezeigte Vertauschung herholen lassen, und unter Zuziehung der in (47. a.) aufgeführten Bezeichnungen als dritte Bedingung (49. b.) geben

$$\varkappa(A')(A_1') + \varkappa'(A)(A_1) + \lambda''((A)(A_1') + (A')(A_1)) = 0, \quad (50.\ \text{a.})$$

so wie die Gleichung (49. c.) umwandeln in:

$$\alpha''\frac{\mathrm{v}''^2}{\mathfrak{D}_2''^2} + \frac{1}{\alpha''}(\varkappa(A_1')^2 + \varkappa'(A_1)^2 + 2\lambda''(A_1)(A_1'))\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \frac{1}{\alpha''}(\varkappa(A')^2 + \varkappa'(A)^2 + 2\lambda''(A)(A'))\frac{\mathrm{v}^2}{\mathfrak{D}^2} = \mathrm{M}_2, \quad (50.\ \text{b.})$$

welche Gleichungen sämmtlich aus denen der vorigen Nummer durch die angezeigte Vertauschung erhalten werden können.

Auch gilt hier wieder alles am Ende der vorigen Nummer Gesagte. Sind nämlich die Coeffizienten α, α', α'' nicht alle drei gleichzeitig null, so sind die Gleichungen (50. a.) und (50. b.) stets möglich entweder ganz so wie sie dastehen, oder wie man sie findet, nachdem man in ihnen eine Vertauschung der dritten oder zweiten Art vorgenommen hat, welche sich über alle Indexe und Accente zu erstrecken hat; und sind auch die drei Grössen α, α', α'' gleichzeitig null, so kann man doch noch zu einer Gleichung von der in (50. b.) enthaltenen Form, in welcher die Glieder fehlen, die das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, gelangen, wenn man immer auf dem gleichen Wege zuvörderst nur eine Gleichung sich verschafft, in der nicht alle Glieder fehlen, die das Quadrat von einer Coordinate in sich aufnehmen, aus der sich dann die verlangte sogleich immer auf demselben Wege auffinden lässt.

202) Was in den beiden vorigen Nummern von der ersten Gleichung (45. b.) erwiesen worden ist, lässt sich in ähnlicher Weise auch von der zweiten Gleichung (45. b.) darthun. Soll diese nämlich in eine andere mit schiefen Coordinaten übergeführt werden an einem neuen Systeme, dessen Axe A Y″ in der ursprünglichen Polaraxe A 𝔛″ liegen bleibt, so muss man in die gegebene Gleichung für u, u′, u″ ihre durch die Gleichungen (42. c.) gegebenen Werthe setzen; weil aber diese Gleichungen aus denen (42. a.) hervorgehen, wenn man in letztern ohne an den Abzeichen irgend eine Veränderung vorzunehmen, x und A mit u und C vertauscht und $\mathfrak{C}_2''$ y″ für y″ setzt, weil ferner die zweite Gleichung (45. b.) aus der ersten hervorgeht, wenn man die Grundzeichen α, β, x mit denen δ, ε, u umtauscht und zugleich N_1 an die Stelle von M_1 setzt, so wird sich das Resultat der hier vorzunehmenden Substitution aus der Glei-

chung (46. a.) dadurch herholen lassen, dass man die Grundzeichen A, x, α, β bezüglich mit denen C, u, δ, ε vertauscht und zugleich $\mathfrak{C}_2'' y''$ an die Stelle von y'' und N_1 an die Stelle von M_1 setzt. Auf diese Art ergiebt sich als neue Gleichung die folgende:

(51. a.)
$$\begin{cases} \delta'' \mathfrak{C}_2''^2 y''^2 + (\delta'' C_1''^2 + \delta' C_1'^2 + \delta C_1^2 + 2\varepsilon C_1' C_1'' + 2\varepsilon' C_1 C_1'' + 2\varepsilon'' C_1 C_1') y'^2 \\ + (\delta'' C''^2 + \delta' C'^2 + \delta C^2 + 2\varepsilon C' C'' + 2\varepsilon' C C'' + 2\varepsilon'' C C') y^2 \\ + 2\mathfrak{C}_2'' (\delta'' C_1'' + \varepsilon C_1' + \varepsilon' C_1) y' y'' + 2\mathfrak{C}_2'' (\delta'' C'' + \varepsilon C' + \varepsilon' C) y y'' \\ + 2[\delta'' C'' C_1'' + \delta' C' C_1' + \delta C C_1 + \varepsilon (C' C_1'' + C'' C_1') + \varepsilon' (C C_1'' + C'' C_1) + \varepsilon'' (C C_1' + C' C_1)] y y' = N_1, \end{cases}$$

wo N_1 aus dem in (46. a.) enthaltenen M_1 durch die gleiche Vertauschung hervorgeht, wenn man auch noch ζ, ζ', ζ'' an die Stelle der in M_1 auftretenden γ, γ', γ'' setzt, und lässt man in dieser Gleichung (51. a.) wieder

(51. b.)
$$\begin{cases} \delta'' C_1'' + \varepsilon C_1' + \varepsilon' C_1 = 0, \quad \delta'' C'' + \varepsilon C' + \varepsilon' C = 0 \\ \text{und} \\ -\delta'' C'' C_1'' + \delta' C' C_1' + \delta C C_1 + \varepsilon'' (C C_1' + C' C_1) = 0 \end{cases}$$

werden, damit die Glieder verschwinden, welche das Product von zwei Coordinaten in sich tragen, so verwandelt sich die Gleichung (51. a.) in:

(51. c.)
$$\begin{cases} \delta'' \mathfrak{C}_2''^2 y''^2 + (\delta'' C_1''^2 + \delta' C_1'^2 + \delta C_1^2 + 2\varepsilon C_1' C_1'' + 2\varepsilon' C_1 C_1'' + 2\varepsilon'' C_1 C_1') y'^2 \\ \qquad + (\delta'' C''^2 + \delta' C'^2 + \delta C^2 + 2\varepsilon C' C'' + 2\varepsilon' C C'' + 2\varepsilon'' C C') y^2 = N_1. \end{cases}$$

Ist nun δ'' nicht null, so kann man aus den zwei ersten Bedingungen (51. b.) die Werthe C_1'' und C'' darstellen, und durch sie verwandelt sich erstlich die dritte Bedingung (51. b.) mit Zuziehung der Bezeichnungen (47. b.) in:

(52. a.)
$$\sigma C' C_1' + \sigma' C C_1 + \tau'' (C C_1' + C' C_1) = 0,$$

sodann nimmt die Gleichung (51. c.) in Folge derselben Substitutionen und derselben Bezeichnungen die nachstehende Gestalt an:

(52. b.)
$$\delta'' \mathfrak{C}_2''^2 y''^2 + \frac{1}{\delta''} (\sigma C_1'^2 + \sigma' C_1^2 + 2\tau'' C_1 C_1') y'^2 + \frac{1}{\delta''} (\sigma C'^2 + \sigma' C^2 + 2\tau'' C C') y^2 = N_1,$$

welche Resultate sich sämmtlich aus den in Nr. 200. erhaltenen durch die vorhin angezeigte Umtauschung unmittelbar entnehmen lassen, wenn man beachtet, dass durch diese Umtauschung zugleich auch die der Grundzeichen $\varkappa$ und λ mit denen σ und τ bewirkt wird, den Bezeichnungen (47. a. und b.) gemäss.

Wir sind zu den vorstehenden Resultaten unter der Voraussetzung gelangt, dass δ'' nicht null ist; wäre aber auch $\delta''=0$, jedoch nicht auch $\delta'=0$ und zugleich $\delta=0$, so könnte man immer noch zu einer Gleichung von der Form (52. b.), in welcher die Glieder fehlen, welche das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, gelangen, nur müsste man die Axe AY' oder AY vom neuen Systeme in der ursprünglichen Grundaxe $A\mathfrak{X}'$ oder $A\mathfrak{X}$ liegen lassen, wodurch man zu Resultaten geführt wird, die sich ans den eben erhaltenen durch eine über sämmtliche Accente und Indexe sich erstreckende Vertauschung der dritten oder zweiten Art unmittelbar entnehmen lassen, welche man nicht blos in Bezug auf die Projectionszahlen und Coordinaten, sondern auch in Bezug auf die Coeffizienten der gegebenen Gleichung und ihrer

in (47. b.) angezeigten Zusammensetzungen vorzunehmen hat. Indessen auch wenn die drei Coeffizienten δ'', δ', δ gleichzeitig null wären, kann man doch immer noch zu einer Gleichung von der Form (52. b.) gelangen, wenn man von vorne herein nicht darauf ausgeht, die Glieder in der Gleichung (51. a.), welche das Product von zwei Coordinaten in sich tragen, zum verschwinden zu bringen, sondern blos darauf, einen der Coeffizienten, welche bei den Quadraten von einer Coordinate stehen, nicht null werden zu lassen, welches stets auf unendlich viele Arten geschehen kann, und wobei man sogar zwei Axen des neuen Systems auf zwei Polaraxen des ursprünglichen Systems liegen lassen kann; denn hat man sich erst eine solche Gleichung verschafft, so kann man dann immer auf dem vorigen Wege aus ihr eine andere von der in (52. b.) enthaltenen Form ableiten.

203) Wollte man endlich aus der zweiten Gleichung (45. b.) eine andere in senkrechten Coordinaten herholen, und soll die Polaraxe $A\mathfrak{Y}''$ des neuen Systems, an welchem diese Gleichung sich bildet, in der ursprünglichen Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ liegen bleiben, so hätte man in die gegebene Gleichung für u, u′, u″ ihre in den Gleichungen (42. d.) angezeigten Werthe einzusetzen; weil aber die zuletzt genannten Gleichungen aus denen (42. c.) hervorgehen, wenn man, ohne an den Abzeichen eine Veränderung vorzunehmen, das Grundzeichen C mit dem (Γ) vertauscht und zugleich $\frac{\mathrm{v}}{\mathfrak{D}}$, $\frac{\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}'_1}$, $\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}$ an die Stelle von y, y′, y″ setzt, so wird sich das Resultat der hier vorzunehmenden Substitution aus der Gleichung (51. a.) unmittelbar herholen lassen, wenn man in dieser das Grundzeichen C mit dem (Γ) vertauscht und zugleich $\frac{\mathrm{v}}{\mathfrak{D}}$, $\frac{\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}'_1}$, $\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}$ an die Stelle von y, y′, y″ setzt. So findet man:

$$\left.\begin{aligned}\delta''\mathfrak{C}''^2_2\frac{\mathrm{v}''^2}{\mathfrak{D}''^2_2}+(\delta''(\Gamma''_1)^2+\delta'(\Gamma'_1)^2+\delta(\Gamma_1)^2+2\varepsilon(\Gamma'_1)(\Gamma''_1)+2\varepsilon'(\Gamma_1)(\Gamma''_1)+2\varepsilon''(\Gamma_1)(\Gamma'_1))\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathfrak{D}'^2_1}\\ +(\delta''(\Gamma'')^2+\delta'(\Gamma')^2+\delta(\Gamma)^2+2\varepsilon(\Gamma')(\Gamma'')+2\varepsilon'(\Gamma)(\Gamma'')+2\varepsilon''(\Gamma)(\Gamma'))\frac{\mathrm{v}^2}{\mathfrak{D}^2}\\ +2\mathfrak{C}''_2(\delta''(\Gamma''_1)+\varepsilon(\Gamma'_1)+\varepsilon'(\Gamma_1))\frac{\mathrm{v}'\,\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2}+2\mathfrak{C}''_2(\delta''(\Gamma'')+\varepsilon(\Gamma')+\varepsilon'(\Gamma))\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''_2}\\ +2[\delta''(\Gamma'')(\Gamma''_1)+\delta'(\Gamma')(\Gamma'_1)+\delta(\Gamma)(\Gamma_1)+\varepsilon((\Gamma')(\Gamma''_1)+(\Gamma'')(\Gamma'_1))\\ +\varepsilon'((\Gamma)(\Gamma''_1)+(\Gamma'')(\Gamma_1))+\varepsilon''((\Gamma)(\Gamma'_1)+(\Gamma')(\Gamma_1))]\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1}=N_2,\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(53. a.)}$$

wo das jetzige N_2 aus dem vorigen N_1 durch die gleiche Umtauschung hervorgeht. Setzt man in dieser Gleichung wieder, um die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten haben, zum Verschwinden zu bringen

$$\left.\begin{aligned}\delta''(\Gamma''_1)+\varepsilon(\Gamma'_1)+\varepsilon'(\Gamma_1)=0\,,\quad \delta''(\Gamma'')+\varepsilon(\Gamma')+\varepsilon'(\Gamma)=0\\ \text{und}\quad -\delta''(\Gamma'')(\Gamma''_1)+\delta'(\Gamma')(\Gamma'_1)+\delta(\Gamma)(\Gamma_1)+\varepsilon''((\Gamma)(\Gamma'_1)+(\Gamma')(\Gamma_1))=0,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad\textbf{(53. b.)}$$

so verwandelt sich die Gleichung (53. a.) in:

$$\left.\begin{aligned}\delta''\mathfrak{C}''^2_2\frac{\mathrm{v}''^2}{\mathfrak{D}''^2_2}+(\delta''(\Gamma''_1)^2+\delta'(\Gamma'_1)^2+\delta(\Gamma_1)^2+2\varepsilon(\Gamma'_1)(\Gamma''_1)+2\varepsilon'(\Gamma_1)(\Gamma''_1)+2\varepsilon''(\Gamma_1)(\Gamma'_1))\frac{\mathrm{v}'^2}{\mathfrak{D}'^2_1}\\ +(\delta''(\Gamma'')^2+\delta'(\Gamma')^2+\delta(\Gamma_1)^2+2\varepsilon(\Gamma')(\Gamma'')+2\varepsilon'(\Gamma)(\Gamma'')+2\varepsilon''(\Gamma)(\Gamma'))\frac{\mathrm{v}^2}{\mathfrak{D}^2}=N_2.\end{aligned}\right\}\quad\textbf{(53. c.)}$$

Ist nun δ'' nicht null, so kann man aus den zwei ersten Bedingungen (53. b.) die Werthe von (Γ_1'') und (Γ'') darstellen, durch welche sich erstlich die dritte Bedingung (53. b.) mit Zuziehung der Bezeichnungen (47. b.) verwandelt in

(54. a.) $$\sigma(\Gamma')(\Gamma_1') + \sigma'(\Gamma)(\Gamma_1) + \tau''((\Gamma)(\Gamma_1') + (\Gamma')(\Gamma_1)) = 0,$$

sodann nimmt die Gleichung (53. c.) in Folge derselben Substitutionen und derselben Bezeichnungen die nachstehende Form an

(54. b.) $$\delta''\mathfrak{C}_2''^2 \frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2} + \frac{1}{\delta''}(\sigma(\Gamma_1')^2 + \sigma'(\Gamma_1)^2 + 2\tau''(\Gamma_1)(\Gamma_1')) \frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + \frac{1}{\delta''}(\sigma(\Gamma')^2 + \sigma'(\Gamma)^2 + 2\tau''(\Gamma)(\Gamma')) \frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} = N_2,$$

welche Resultate sich sämmtlich unmittelbar aus den in der vorigen Nummer erhaltenen durch die angezeigte Vertauschung entnehmen lassen.

Ist $\delta''=0$ so lassen sich aus den vorstehenden Formeln durch eine Vertauschung der dritten oder zweiten Art in der Weise, wie es in der vorigen Nummer angegeben worden ist, die erhalten, welche wieder zu einer Gleichung von der in (54. b.) stehenden Form führen, vorausgesetzt, dass nicht zu gleicher Zeit $\delta'=0$ und $\delta=0$ ist; und selbst wenn die drei Coeffizienten δ, δ', δ'' gleichzeitig null wären, kann man doch immer aus der Gleichung (53. a.), wenn man von ihr nicht verlangt, dass die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, verschwinden, eine andere herleiten, in welcher einer der Coeffizienten, welche bei den Quadraten der Coordinaten stehen, nicht null wird, welches auf unzählich viele Arten geschehen kann, selbst wenn man zwei der Polaraxen vom neuen Systeme mit zwei Polaraxen des ursprünglichen Systems zusammenfallen lässt, und aus dieser Gleichung lässt sich dann ohne weiteres Hinderniss auf die in dieser Nummer beschriebene Art eine Gleichnng von der in (54. b.) angegebenen Form herleiten.

204) Wir sind so durch die Betrachtungen der vier letzten Nummern zu der Ueberzeugung gelangt, dass sich jede der beiden in (45. b.) aufgestellten Gleichungen, wie auch ihre Coeffizienten beschaffen sein mögen, immer in eine andere sowohl mit schiefen wie mit senkrechten Coordinaten überführen lässt, in der alle Glieder fehlen, welche das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, so dass wir in den weiteren Untersuchungen die Gleichung einer Fläche der zweiten Ordnung stets als in einer der zwei nachstehenden Formen gegeben voraussetzen dürfen:

(55. a.) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + \alpha_0'' x''^2 = 2\gamma_0 x + 2\gamma_0' x' + 2\gamma_0'' x'' + \mu_0 \\ \text{oder} \\ \delta_0 u^2 + \delta_0' u'^2 + \delta_0'' u''^2 = 2\zeta_0 u + 2\zeta_0' u' + 2\zeta_0'' u'' + \nu_0. \end{array}\right.$$

In diesen Gleichungen stellen die Grössen α_0, α_0', α_0'' jene Werthe vor, welche die bei y^2, y'^2, y''^2 stehenden Coeffizienten in den Gleichungen (48. b.) oder in den Gleichungen (52. b.) angenommen haben, ersteres oder letzteres je nachdem die ursprünglich gegebene Gleichung von der ersten oder zweiten in (45. b.) enthaltenen Form war; es ist sonach

(55. b.) $$\alpha_0 = (\varkappa A'^2 + \varkappa' A^2 + 2\lambda'' A A')\frac{1}{\alpha''}, \quad \alpha_0' = (\varkappa A_1'^2 + \varkappa' A_1^2 + 2\lambda'' A_1 A_1')\frac{1}{\alpha''}, \quad \alpha_0'' = \alpha'',$$

wenn die ursprüngliche Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben war, und

$$\alpha_0 = (\sigma C'^2 + \sigma' C^2 + 2\tau'' C C')\frac{1}{\delta''}, \quad \alpha'_0 = (\sigma C_1'^2 + \sigma' C_1^2 + 2\tau'' C_1 C_1')\frac{1}{\delta''}, \quad \alpha''_0 = \mathfrak{C}_2''^2 \delta'', \qquad \textbf{(55. c.)}$$

wenn die ursprüngliche Gleichung in senkrechten Coordinaten gegeben war. Eben so stellen die Grössen δ_0, δ'_0, δ''_0 jene Werthe vor, welche die bei v^2, v'^2, v''^2 stehenden Coeffizienten in den Gleichungen (50. b.) oder (54. b.) angenommen haben, ersteres wenn die ursprüngliche Gleichung in schiefen, letzteres wenn sie in senkrechten Coordinaten gegeben war; es ist sonach

$$\delta_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}^2}(\varkappa(A')^2 + \varkappa'(A)^2 + 2\lambda''(A)(A'))\frac{1}{\alpha''}, \quad \delta'_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}_1'^2}(\varkappa(A_1')^2 + \varkappa'(A_1)^2 + 2\lambda''(A_1)(A_1'))\frac{1}{\alpha''}, \qquad \textbf{(55. d.)}$$

$$\delta''_0 = \frac{\alpha''}{\mathfrak{D}_2''^2},$$

wenn die ursprüngliche Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben war, und

$$\delta_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}^2}(\sigma(\Gamma')^2 + \sigma'(\Gamma)^2 + 2\tau''(\Gamma)(\Gamma'))\frac{1}{\delta''}, \quad \delta'_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}_1'^2}(\sigma(\Gamma_1')^2 + \sigma'(\Gamma_1)^2 + 2\tau''(\Gamma_1)(\Gamma_1'))\frac{1}{\delta''}, \qquad \textbf{(55. e.)}$$

$$\delta''_0 = \frac{\mathfrak{C}_2''^2 \delta''}{\mathfrak{D}_2''^2},$$

wenn die ursprüngliche Gleichung in senkrechten Coordinaten gegeben war. Dabei repräsentiren $2\gamma_0$, $2\gamma'_0$, $2\gamma''_0$ die aus M_1 oder N_1 in den Gleichungen (48. b.) oder (52. b.), $2\zeta_0$, $2\zeta'_0$, $2\zeta''_0$ die aus M_2 oder N_2 in den Gleichungen (50. b.) oder (54. b.) herzuholenden Coeffizienten von y, y', y'' oder v, v', v'', und man hat diese Coeffizienten aus M_1, M_2 oder aus N_1, N_2 herzuholen, je nachdem die ursprüngliche Gleichung in schiefen oder in senkrechten Coordinaten gegeben war; μ_0 oder ν_0 in den Gleichungen (55. a.) hingegen bezeichnen die in denselben Theilen, woraus obige Coeffizienten genommen worden sind, enthaltenen constanten Glieder. Da schon in den Nrn. 201., 202. und 203. angezeigt worden ist, wie sich die Ausdrücke M_2, N_1 und N_2 aus dem M_1 durch blose Vertauschung erhalten lassen, so haben wir blos diesen letzten aufzusuchen, um in jedem Falle, wo es gewünscht wird, die Coeffizienten der Gleichungen (55. a.) aus denen der ursprünglichen Gleichung ohne alle Mühe entnehmen zn können. Es geht aber M_1 aus dem Theile M oder

$$\mu + 2\gamma x + 2\gamma' x' + 2\gamma'' x''$$

der ersten Gleichung (45. b.) dadurch hervor, dass man in ihm für x, x', x'' ihre durch die Gleichungen (42. a.) gegebenen Werthe einsetzt, wodurch man erhält:

$$M_1 = 2(A\gamma + A'\gamma' + A''\gamma'')y + 2(A_1\gamma + A_1'\gamma' + A_1''\gamma'')y' + 2\gamma'' y'' + \mu,$$

und aus diesem Ausdruck ergiebt sich durch die in Nr. 201. beschriebene Vertauschung:

$$M_2 = 2((A)\gamma + (A')\gamma' + (A'')\gamma'')\frac{v}{\mathfrak{D}} + 2((A_1)\gamma + (A_1')\gamma' + (A_1'')\gamma'')\frac{v'}{\mathfrak{D}_1'} + 2\gamma''\frac{v''}{\mathfrak{D}_2''} + \mu;$$

ferner durch die in Nr. 202. beschriebene Vertauschung:

$$N_1 = 2(C\zeta + C'\zeta' + C''\zeta'')y + 2(C_1\zeta + C_1'\zeta' + C_1''\zeta'')y' + \zeta''\mathfrak{C}_2'' y'' + \nu;$$

endlich liefert dieser letzte Ausdruck durch die in Nr. 203. angezeigte Vertauschung:

$$N_2 = 2\left((\Gamma)\zeta + (\Gamma')\zeta' + (\Gamma'')\zeta''\right)\frac{\mathrm{v}}{\mathfrak{D}} + 2\left((\Gamma_1)\zeta + (\Gamma_1')\zeta' + (\Gamma_1'')\zeta''\right)\frac{\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}_1'} + 2\zeta''\mathfrak{C}_2''\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}_2''} + \nu.$$

Hieraus nun findet man:

(55. f.)
$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 = \mathrm{A}\gamma + \mathrm{A}'\gamma' + \mathrm{A}''\gamma'', \quad \gamma_0' = \mathrm{A}_1\gamma + \mathrm{A}_1'\gamma' + \mathrm{A}_1''\gamma'', \quad \gamma_0'' = \gamma'' \quad \text{und} \quad \mu_0 = \mu \\ \text{oder} \\ \gamma_0 = \mathrm{C}\zeta + \mathrm{C}'\zeta' + \mathrm{C}''\zeta'', \quad \gamma_0' = \mathrm{C}_1\zeta + \mathrm{C}_1'\zeta' + \mathrm{C}_1''\zeta'', \quad \gamma_0'' = \zeta''\mathfrak{C}_2'' \quad \text{und} \quad \mu_0 = \nu, \end{array}\right.$$

je nachdem die ursprüngliche Gleichung in schiefen oder in senkrechten Coordinaten gegeben war, und eben so findet man in dem einen oder andern Falle:

(55. g.)
$$\left\{\begin{array}{l} \zeta_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}}\left((A)\gamma + (A')\gamma' + (A'')\gamma''\right), \quad \zeta_0' = \frac{1}{\mathfrak{D}_1'}\left((A_1)\gamma + (A_1')\gamma' + (A_1'')\gamma''\right), \\ \qquad\qquad \zeta_0'' = \frac{1}{\mathfrak{D}_2''}\gamma'' \quad \text{und} \quad \nu_0 = \mu \\ \text{oder} \\ \zeta_0 = \frac{1}{\mathfrak{D}}\left((\Gamma)\zeta + (\Gamma')\zeta' + (\Gamma'')\zeta''\right), \quad \zeta_0' = \frac{1}{\mathfrak{D}_1'}\left((\Gamma_1)\zeta + (\Gamma_1')\zeta' + (\Gamma_1'')\zeta''\right), \\ \qquad\qquad \zeta_0'' = \frac{\mathfrak{C}_2''}{\mathfrak{D}_2''}\zeta'' \quad \text{und} \quad \nu_0 = \nu. \end{array}\right.$$

Wenn man in diese Ausdrücke für A'', A_1''; C'', C_1''; (A''), (A_1''); (Γ''), (Γ_1'') ihre aus den zwei ersten Gleichungen (46. b.), (49. b.), (51. b.) (53. b.) entnommenen Werthe einsetzt, so nehmen die (55. f.) die folgende Form an:

$$\alpha''\gamma_0 = (\alpha''\gamma - \beta'\gamma'')\mathrm{A} + (\alpha''\gamma' - \beta\gamma'')\mathrm{A}', \quad \alpha''\gamma_0' = (\alpha''\gamma - \beta'\gamma'')\mathrm{A}_1 + (\alpha''\gamma' - \beta\gamma'')\mathrm{A}_1',$$
$$\gamma_0'' = \gamma'' \quad \text{und} \quad \mu_0 = \mu$$

oder

$$\delta''\gamma_0 = (\delta''\zeta - \varepsilon'\zeta'')\mathrm{C} + (\delta''\zeta' - \varepsilon\zeta'')\mathrm{C}', \quad \delta''\gamma_0' = (\delta''\zeta - \varepsilon'\zeta'')\mathrm{C}_1 + (\delta''\zeta' - \varepsilon\zeta'')\mathrm{C}_1',$$
$$\gamma_0'' = \zeta''\mathfrak{C}_2'' \quad \text{und} \quad \mu_0 = \nu,$$

die (55. g.) hingegen gehen über in

$$\zeta_0 = \frac{(\alpha''\gamma - \beta'\gamma'')(A) + (\alpha''\gamma' - \beta\gamma'')(A')}{\alpha''\mathfrak{D}}, \quad \zeta_0' = \frac{(\alpha''\gamma - \beta'\gamma'')(A_1) + (\alpha''\gamma' - \beta\gamma'')(A_1')}{\alpha''\mathfrak{D}_1'},$$
$$\zeta_0'' = \frac{\gamma''}{\mathfrak{D}_2''} \quad \text{und} \quad \nu_0 = \mu$$

oder

$$\zeta_0 = \frac{(\delta''\zeta - \varepsilon'\zeta'')(\Gamma) + (\delta''\zeta' - \varepsilon\zeta'')(\Gamma')}{\delta''\mathfrak{D}}, \quad \zeta_0' = \frac{(\delta''\zeta - \varepsilon'\zeta'')(\Gamma_1) + (\delta''\zeta' - \varepsilon\zeta'')(\Gamma_1')}{\delta''\mathfrak{D}_1'},$$
$$\zeta_0'' = \frac{\zeta''}{\mathfrak{D}_2''}\mathfrak{C}_2'' \quad \text{und} \quad \nu_0 = \nu,$$

und es müssen bei den einen sowohl wie bei den andern die zuerst oder die zuletzt gegebenen genommen werden, je nachdem die ursprüngliche Gleichung in schiefen oder senkrechten Coordinaten gegeben war. Setzen wir der Kürze wegen

$$\alpha''\gamma - \beta'\gamma'' = \mathfrak{f}', \quad \alpha''\gamma' - \beta\gamma'' = \mathfrak{f} \text{ so wie } \delta''\zeta - \varepsilon'\zeta'' = \mathfrak{g}', \quad \delta''\zeta' + \varepsilon\zeta'' = \mathfrak{g}, \qquad \textbf{(55. h.)}$$

so lassen sich die ersten zwei Reihen der vorstehenden Gleichungen so schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''\gamma_0 = \mathfrak{f}'\,\mathrm{A} + \mathfrak{f}\,\mathrm{A}', \quad \alpha''\gamma'_0 = \mathfrak{f}'\,\mathrm{A}_1 + \mathfrak{f}\,\mathrm{A}'_1, \quad \gamma''_0 = \gamma'' \text{ und } \mu_0 = \mu \\ \text{oder} \\ \delta''\gamma_0 = \mathfrak{g}'\,\mathrm{C} + \mathfrak{g}\,\mathrm{C}', \quad \delta''\gamma'_0 = \mathfrak{g}'\,\mathrm{C}_1 + \mathfrak{g}\,\mathrm{C}'_1, \quad \gamma''_0 = \zeta''\mathfrak{E}''_2 \text{ und } \mu_0 = \nu \end{array}\right\} \cdots\cdots \textbf{(55. i.)}$$

und die letzten zwei Reihen der vorstehenden Gleichungen nehmen die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha''\zeta_0 = \dfrac{\mathfrak{f}'(A) + \mathfrak{f}(A')}{\mathfrak{D}}, \quad \alpha''\zeta'_0 = \dfrac{\mathfrak{f}'(A_1) + \mathfrak{f}(A'_1)}{\mathfrak{D}'_1}, \quad \zeta''_0 = \dfrac{\gamma''}{\mathfrak{D}''_2} \text{ und } \nu_0 = \mu, \\ \text{oder} \\ \delta''\zeta_0 = \dfrac{\mathfrak{g}'(\Gamma) + \mathfrak{g}(\Gamma')}{\mathfrak{D}}, \quad \delta''\zeta'_0 = \dfrac{\mathfrak{g}'(\Gamma_1) + \mathfrak{g}(\Gamma'_1)}{\mathfrak{D}'_1}, \quad \zeta''_0 = \dfrac{\zeta''}{\mathfrak{D}''_2}\mathfrak{E}''_2 \text{ und } \nu_0 = \nu. \end{array}\right\} \cdots\cdots \textbf{(55. k.)}$$

205) Wir wollen uns noch eine nähere Auskunft über den Umfang und Sinn der vorstehend aufgestellten neuen Gleichungen verschaffen, da man bei einer sorgfältigeren Prüfung derselben auf einige Schwierigkeiten stösst. Fassen wir zunächst die in Nr. 200. gefundenen Ergebnisse ins Auge, und bedenken wir, dass die zwei Axenrichtungen A Y' und A Y des neuen Systems, an welchem sich die Gleichung von der Form (48. b.) erzeugen soll, durch die drei Gleichungen (46. b.), statt deren dritter auch die (48. a.) genommen werden kann, näher bestimmt werden, während doch zwei Richtungen nur durch vier willkührliche Grössen völlig gegeben werden, so sieht man ein, dass man über eine der in der Gleichung (48. b.) vorkommenden Projectionszahlen oder über eine Zusammensetzung von mehrern derselben noch nach Belieben verfügen kann. Hieraus nun dürfte Jemand den Schluss ziehen wollen, dass man in jener Gleichung mittelst der noch rückständigen willkührlichen Grösse eines der beiden Glieder, welche y'^2 oder y^2 als Factor in sich tragen, oder wohl gar beide zugleich verschwinden machen könne; dass diess indessen ein Trugschluss wäre, zeigt die folgende Betrachtung: Setzen wir in der Voraussetzung, dass weder $A = 0$ noch $A_1 = 0$ ist,

$$\frac{A'}{A} = m', \quad \frac{A''}{A} = m'' \text{ und } \frac{A'_1}{A_1} = n', \quad \frac{A''_1}{A_1} = n'', \qquad \textbf{(56. a.)}$$

so lässt sich die dritte Bedingung (46. b.) statt deren wir die Gleichung (48. a.) nehmen wollen, so schreiben:

$$\varkappa\,m'n' + \varkappa' + \lambda''(m' + n') = 0 \qquad \textbf{(56. b.)}$$

und die zu y^2 und y'^2 gehörigen Coeffizienten in der Gleichung (48. b.), oder die in (55. b.) angezeigten so:

$$\alpha_0 = (\varkappa\,m'^2 + \varkappa' + 2\lambda''m')\frac{A^2}{\alpha''} \text{ und } \alpha'_0 = (\varkappa\,n'^2 + \varkappa' + 2\lambda''n')\frac{A_1^2}{\alpha''}. \qquad \textbf{(56. c.)}$$

Wir werden jetzt diesen Coeffizienten eine andere Gestalt geben, indem wir aus ihnen mittelst der Gleichung (56. b.) eine der noch unbestimmten Grössen m' und n' eliminiren. Zu diesem Ende setzen wir

$$m' - n' = \Delta, \qquad \textbf{(57. a.)}$$

woraus sich

$$m' = n' + \Delta \text{ und } n' = m' - \Delta$$

ergiebt; desshalb können wir die Gleichung (56. b.) einmal so

$$\varkappa n'(n'+\varDelta)+\varkappa'+\lambda''(2n'+\varDelta)=0$$

schreiben, woraus man

(57. b.) $$\varkappa n'^2+\varkappa'+2\lambda''n'=-(\varkappa n'+\lambda'')\varDelta$$

findet, und ein andermal können wir dieselbe Gleichung auch so

$$\varkappa m'(m'-\varDelta)+\varkappa'+\lambda''(2m'-\varDelta)=0$$

schreiben, woraus man

(57. c.) $$\varkappa m'^2+\varkappa'+2\lambda''m'=(\varkappa m'+\lambda'')\varDelta$$

findet. Mittelst der Gleichungen (57. b. und c.) nun nehmen die in (56. c.) stehenden Gleichungen die folgende Gestalt an:

(57. d.) $$\alpha_0=(\varkappa m'+\lambda'')\varDelta\frac{A_2^2}{\alpha''}\quad\text{und}\quad\alpha'_0=-(\varkappa n'+\lambda'')\varDelta\frac{A_2'^2}{\alpha''},$$

und da sich aus den zwei Gleichungen (57. b.) und (57. c.) die zwei Grössen m' und n' in $\varDelta$ ausdrücken lassen, so ist alles auf die eine willkührliche Grösse $\varDelta$ zurückgeführt; man erhält nämlich aus den genannten Gleichungen:

$$\varkappa m'+\lambda''=\frac{1}{2}\varkappa\varDelta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}\quad\text{und}\quad\varkappa n'+\lambda''=-\frac{1}{2}\varkappa\varDelta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)},$$

und in Folge dessen gehen die Gleichungen (57. d.) über in:

(57. e.) $$\left\{\begin{aligned}&\alpha_0=\frac{A_2^2}{\alpha''}\varDelta\left[\frac{1}{2}\varkappa\varDelta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}\right]\\&\text{und}\\&\alpha'_0=-\frac{A_2'^2}{\alpha''}\varDelta\left[-\frac{1}{2}\varkappa\varDelta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}\right],\end{aligned}\right.$$

wo man in beiden Ausdrücken entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen nehmen darf, weil nur so die Gleichung (57. a.) in Erfüllung geht. Damit die gesuchte Gleichung reelle Coeffizienten erhalte, darf die Grösse unter dem Wurzelzeichen in den Gleichungen (57. e.) nicht negativ werden; man ist also in der Wahl der willkührlichen Grösse $\varDelta$ in so fern beschränkt, dass

(57. f.) $$\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)\gtreqless 0\quad\text{oder}\quad\varDelta^2\gtreqless\frac{4(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}{\varkappa^2}$$

genommen werden muss, welche Bedingung stets erfüllt ist, wenn $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2$ null oder eine negative Zahl ist.

Da die Bedingung (57. f.) stets schon von selber erfüllt ist, wenn $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2$ null oder negativ ist, und da man nach den bisherigen Ergebnissen für $\varDelta$ jeden reellen Werth nehmen darf, der nicht $\frac{1}{4}\varkappa^2\varDelta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)$ zu einer negativen Zahl werden lässt, so nimmt es in der That den Anschein an, als ob man in solchen Fällen, wo $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2$ null oder negativ ist, $\varDelta=0$ setzen und dadurch die beiden Coeffizienten in (57. d. oder e.) zum Verschwinden bringen könnte. Bedenkt man indessen, dass die drei Axen eines beliebigen Coordinatensystems immer auch noch die Bedingung erfüllen müssen, dass sie nicht alle drei in einer und derselben Ebene liegen, und dass die im ersten Abschnitte (Nr. 52.) hierfür aufgestellte Bedingung (99.) in unserm jetzigen Falle, wo $A_2=0$, $A_2'=0$, $A_2''=1$ ist, sich verwandelt in:

$$A A'_1 - A' A_1 \lessgtr 0 \qquad (58.\ a.)$$

oder in Folge der in (56. a.) unter der Voraussetzung, dass weder $A = 0$ noch $A_1 = 0$ sei, eingeführten Bezeichnungen in:

$$m' - n' \lessgtr 0,$$

so überzeugt man sich in Rückblick auf die Gleichung (57. a.), dass man nur dann auf ein Coordinatensystem hingeführt wird, wenn man $\varDelta \lessgtr 0$ sein lässt; man kann also nie durch die Wahl des Coordinatensystems selber die Coeffizienten in (57. d. oder e.) vernichten. Dagegen zeigen die Gleichungen (57. e.), dass in dem Falle, wo die gegebene Gleichung der Fläche zweiter Ordnung von der besondern Art ist, dass $\frac{\varkappa\varkappa' - \lambda''^2}{\alpha''} = 0$ wird, immer der eine oder der andere von jenen zwei Coeffizienten verschwinden müsse, weil in den angeführten Gleichungen in jedem bestimmten Falle entweder nur die obern oder nur die untern Vorzeichen genommen werden dürfen. Die Bedingung, dass einer von den beiden Coeffizienten vernichtet werde, ist sonach die folgende:

$$\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = 0 \qquad (58.\ b.)$$

den Gleichungen (47. c.) gemäss, weil hier α'' nicht null seiend vorausgesetzt worden ist, und beide Coeffizienten können nur in dem einen Falle mit einander zugleich verloren gehen, wenn ausser dieser Bedingung auch noch die $\varkappa = 0$ erfüllt wird, was in Gemässheit der Gleichung (58. b.) nach sich zieht, dass gleichzeitig

$$\varkappa = 0\ ,\quad \varkappa' = 0\ ,\quad \lambda'' = 0 \qquad (58.\ c.)$$

oder den Bezeichnungen (47. a.) gemäss

$$\alpha'\alpha'' - \beta^2 = 0\ ,\quad \alpha\alpha'' - \beta'^2 = 0\ ,\quad \beta''\alpha'' - \beta\beta' = 0$$

sein müsse, wie sich daraus ergiebt, dass wenn $\varkappa = 0$ ist aus der Bedingung (58. b.) $\lambda'' = 0$ folgt, und die Bedingung (56. b.) zeigt, dass wenn $\varkappa = 0$ und $\lambda'' = 0$ ist, auch $\varkappa' = 0$ sein müsse.

Sodann müssen wir, um nichts zurück zu lassen, noch den Ausnahmsfall in Erwägung ziehen, wo unsere bisherige Voraussetzung, dass weder A noch A_1 null sei, nicht statt haben sollte. Zunächst nun machen wir darauf aufmerksam, dass in Gemässheit der Bedingung (58. a.) nie A und A_1 zugleich null sein können, dass also in einem bestimmten Falle höchstens nur eine von diesen beiden Grössen als verschwunden sich denken lässt; nehmen wir aber an, dass $A = 0$ sei, so zeigt die Bedingung (58. a.), dass dann nicht auch zugleich $A' = 0$ sein könne. Es verwandelt sich aber die Bedingung (48. a.), wenn $A = 0$ ist, in:

$$A'(\varkappa A'_1 + \lambda'' A_1) = 0$$

oder, weil jetzt nicht auch $A' = 0$ sein kann, in:

$$\varkappa A'_1 + \lambda'' A_1 = 0\ , \qquad (58.\ d.)$$

woraus man

$$A'_1 = -\frac{\lambda''}{\varkappa} A_1$$

findet. Durch diese Werthe von A und A'_1 gehen die Coeffizienten von y^2 und y'^2 in der Gleichung (48. b.) über in:

$$\frac{\varkappa A'^2}{\alpha''} \quad \text{und} \quad A_1^2 \frac{\varkappa\varkappa' - \lambda''^2}{\alpha''\varkappa},$$

und nun sieht man, dass selbst in diesem Ausnahmsfalle die Wahl des Coordinatensystems nicht Anlass geben kann, dass einer von diesen zwei Coeffizienten verschwindet, da bei ihm keine der beiden Grössen A' und A_1 null sein kann; auch dass der zweite Coeffizient aber nicht der erste null wird, wenn $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0$ und $\varkappa$ nicht null ist, wie zuvor. Dieselben Folgerungen lassen sich auch ziehen, wenn $A_1 = 0$ werden sollte, wie schon die Symmetrie der Bedingung (48. a.) und der in (48. b.) enthaltenen Coeffizienten in Bezug auf die Grössen A und A_1 sattsam zu erkennen giebt.

Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass die Bedingungen (58. b. und c.) von dem Umstande, welche Axen in einander liegen gelassen werden, ganz unabhängig sind. Diess geht bei der (58. b.) schon daraus hervor, dass sie bezüglich der in ihr auftretenden Coeffizienten vollkommen symmetrisch ist, und deswegen immer die gleiche bleibt, auch wenn man hinsichtlich der Accente eine Vertauschung der dritten oder zweiten Art vornimmt; dieselbe Symmetrie lässt sich aber auch in Betreff der Bedingungen (58. c.) erweisen, obschon sie nicht sogleich in die Augen springt. Schreibt man nämlich jene Bedingungen so:

$$\alpha'\alpha'' = \beta^2, \quad \alpha\alpha'' = \beta'^2, \quad \beta''\alpha'' = \beta\beta',$$

multiplicirt jetzt die zwei ersten mit einander, so erhält man:

$$\alpha\alpha'\alpha''^2 = \beta^2\beta'^2$$

und quadrirt man die dritte, so kommt

$$\beta''^2\alpha''^2 = \beta^2\beta'^2,$$

woraus sich schliessen lässt, dass

$$\alpha\alpha'\alpha''^2 = \beta''^2\alpha''^2 \quad \text{oder} \quad \alpha\alpha' - \beta''^2 = 0$$

ist, da α'' nicht null seiend vorausgesetzt worden ist; man kann daher die hier erhaltene Relation an die Stelle der dritten in (58. c.) stehenden setzen, wodurch jene Bedingungen werden:

(59.) $$\alpha'\alpha'' - \beta^2 = 0, \quad \alpha\alpha'' - \beta'^2 = 0, \quad \alpha\alpha' - \beta''^2 = 0$$

und nun eine vollständige Symmetrie zeigen.

Alles was in dieser Nummer in Bezug auf die in Nr. 200. entstandenen Gleichungen dargethan worden ist, das lässt sich ganz eben so auch von den in Nr. 201. erhaltenen erweisen, und auch die in Nr. 202. und Nr. 203. gebildeten Gleichungen gestatten Schritt um Schritt den gleichen Gang und führen zu denselben Resultaten; nur dass an die Stelle der Grundzeichen α, β, $\varkappa$, λ die δ, ε, σ, τ mit unveränderten Abzeichen zu stehen kommen; denn obgleich die in den verschiedenen Nummern auftretenden Projectionszahlen sich in jedem andern Falle immer auf andere Richtungen beziehen, so hat diess doch auf das Ziel der Betrachtungen nicht den geringsten Einfluss, und man gelangt unaufgehalten zu dem folgenden Satze. Wiewohl in den Coeffizienten der Gleichungen (48. b.), (50. b.), (52. b.) und (54. b.) noch eine ganz willkührliche Grösse zurück bleibt, wodurch es möglich wird, unzählich viele Coordinatensysteme anzugeben, welche alle zu Gleichungen von derselben Form hinführen, so ist es doch nie möglich, diese willkührliche Grösse zur Auffindung eines Coordinatensystems zu benützen, an welchem

eines der in ihrem Theile der zweiten Dimension angezeigten Glieder verschwände. Das Verschwinden von einem oder zweien der in jenen Gleichungen vorhandenen Glieder der zweiten Dimension kann nur durch die Besonderheit der Coeffizienten in der ursprünglich gegebenen Gleichung zu Stande kommen, und findet dann bei allen jenen Gleichungen gleichmässig statt, welche aus den möglichen zulässigen Werthen der willkührlichen Grösse hervorgehen können. Es verschwindet nämlich eines dieser Glieder nur dann, wenn in der ursprünglich gegebenen Gleichung

$$\mathfrak{L}=0 \qquad \textbf{(60. a.)}$$

ist, falls sie von der ersten in (45. b.) enthaltenen Art ist, oder wenn

$$\Lambda=0 \qquad \textbf{(60. b.)}$$

ist, falls sie von der zweiten in (45. b.) enthaltenen Art ist, hingegen verschwinden zwei von jenen Gliedern, wenn in der ursprünglich gegebenen Gleichung gleichzeitig

$$\alpha\alpha'-\beta''^2=0\,,\quad \alpha\alpha''-\beta'^2=0\,,\quad \alpha'\alpha''-\beta^2=0 \qquad \textbf{(60. c.)}$$

ist, falls sie von der ersten in (45. b.) enthaltenen Art ist, oder wenn gleichzeitig

$$\delta\delta'-\varepsilon''^2=0\,,\quad \delta\delta''-\varepsilon'^2=0\,,\quad \delta'\delta''-\varepsilon^2=0 \qquad \textbf{(60. d.)}$$

ist, falls sie von der zweiten in (45. b.) enthaltenen Art ist. Die Bedingungen (60. b. und d.) sind aber in Bezug auf Gleichungen mit senkrechten Coordinaten dieselben wie die (60. a. und c.) in Betreff der Gleichungen mit schiefen Coordinaten.

Man darf indessen hier nicht übersehen, dass die Herleitung der Bedingungen (60. a. und b.) sich darauf stützte, dass wenigstens einer der Coeffizienten α, α', α'' oder δ, δ', δ'' nicht null sei, daher wird für den Fall, wo diese Coeffizienten alle drei null sind, noch eine besondere Untersuchung nöthig, die in der folgenden Nummer vorgenommen werden wird.

206) Es hat sich von Nr. 200. bis Nr. 203. herausgestellt, dass die dort erhaltenen Gleichungen aus den ursprünglich gegebenen nur dann unmittelbar erhalten werden können, wenn nicht gleichzeitig α, α', α'' oder δ, δ', δ'' null sind, zugleich ist aber auch schon dort darauf aufmerksam gemacht worden, wie selbst in diesem Falle noch eine Gleichung von der in jenen Nummern aufgestellten Form erhalten werden kann, wenn man durch das dort eingehaltene Verfahren zunächst nicht darauf ausgeht, die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, zum Verschwinden zu bringen, sondern blos darauf, einen der Coefficienten, welche bei den Quadraten der Coordinaten stehen, nicht null werden zu lassen, und hierauf erst aus der so erhaltenen Gleichung auf dem dort beschriebenen Wege die Glieder, welche das Product von zwei Coordinaten in sich aufnehmen, verjagt; es fragt sich daher ob auch in dem Falle, wo man nur mit Beihilfe eines Uebergangssystems durch ein doppeltes Verfahren zu Gleichungen von der in jenen Nummern beabsichtigten Form gelangen kann, noch die in (60. a. bis d.) aufgestellten Kennzeichen für das Verschwinden von einem oder von zweien in diesen Gleichungen enthaltenen drei Gliedern der zweiten Dimension gültig bleiben, oder ob nicht. Diess zu untersuchen ist der Zweck der gegenwärtigen Nummer und wir werden uns dabei blos auf den in Nr. 200. behandelten Fall beschränken, weil die in den drei

folgenden Nummern behandelten Fälle eine ganz gleiche Auseinandersetzung zulassen, die zu demselben Endresultate führt.

In dem Falle wo α, α', α'' in der gegebenen Gleichung sämmtlich null sind, verwandelt sich die Gleichung (46. a.) in:

$$2(\beta A_1' A_1'' + \beta' A_1 A_1'' + \beta'' A_1 A_1') y'^2 + 2(\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A') y^2 + 2(\beta A_1' + \beta' A_1) y' y'' + 2(\beta A' + \beta' A) y y'' + 2[\beta(A' A_1'' + A'' A_1') + \beta'(A A_1'' + A'' A_1) + \beta''(A A_1' + A' A_1)] y y' = M_1 .$$

Wir wollen, um die Rechnungsausdrücke zu vereinfachen und weil es für unsern Zweck genügt, noch annehmen, dass man bei dieser Umformung die Axe AY' in der AX' habe liegen lassen, wodurch

$$A_1 = 0 \ , \quad A_1' = 1 \ , \quad A_1'' = 0$$

wird, so dass die vorige Gleichung übergeht in:

(61. a.) $$2(\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A') y^2 + 2\beta y' y'' + 2(\beta A' + \beta' A) y y'' + 2(\beta A'' + \beta'' A) y y' = M_1 .$$

In dieser Gleichung hat man die zur Richtung AY gehörigen Projectionszahlen A, A', A'' so zu wählen, dass $\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A'$ nicht null wird, was immer auf unzählich viele Arten in reeller Weise geschehen kann; diess vorausgesetzt, hat man eine neue Gleichung, in welcher, wo in der ursprünglichen α, α', α'' und β, β', β'' standen jetzt

$$2(\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A') \ , \quad 0 \ , \quad 0 \quad \text{und} \quad \beta \ , \quad \beta A' + \beta' A \ , \quad \beta A'' + \beta'' A$$

stehen, aus der man die von der gewünschten Form auf die frühere Weise herzuleiten hat. Ob nun in dieser letztern ein oder zwei Glieder der zweiten Dimension verschwinden, zeigen die in (60. a.) oder (60. c.) stehenden Bedingungen, wenn man statt α, α', α'' und β, β', β'' die so eben mitgetheilten, der Gleichung (61. a.) entsprechenden Ausdrücke setzt; bezeichnet man daher die Coeffizienten von y^2, y'^2, y''^2, $y'y''$, yy'', yy' in der Gleichung (61. a.) durch (α), (α'), (α''), (β), (β'), (β''), so dass

(61. b.) $$\begin{cases} (\alpha) = 2(\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A') \ , & (\alpha') = 0 \ , \quad (\alpha'') = 0 \ , \\ (\beta) = \beta \ , \quad (\beta') = \beta A' + \beta' A \ , & (\beta'') = \beta A'' + \beta'' A \end{cases}$$

ist, so verschwindet in der aus der Gleichung (61. a.) auf dem obigen Wege abzuleitenden Gleichung neben den Gliedern, welche das Product von zwei Coordinaten in sich tragen, noch eines der Glieder, welche das Quadrat von einer Coordinate zum Factor haben, wenn

(61. c.) $$(\alpha)(\alpha')(\alpha'') - (\alpha)(\beta)^2 - (\alpha')(\beta')^2 - (\alpha'')(\beta'')^2 + 2(\beta)(\beta')(\beta'') = 0$$

ist, und es verschwinden zwei von den zuletzt genannten Gliedern, wenn gleichzeitig

(61. d.) $$(\alpha')(\alpha'') - (\beta)^2 = 0 \ , \quad (\alpha)(\alpha'') - (\beta')^2 = 0 \ , \quad (\alpha)(\alpha') - (\beta'')^2 = 0$$

ist. Da nun den Gleichungen (61. b.) zur Folge

$$(\alpha)(\alpha')(\alpha'') - (\alpha)(\beta)^2 - (\alpha')(\beta')^2 - (\alpha'')(\beta'')^2 + 2(\beta)(\beta')(\beta'') = -2(\beta A' A'' + \beta' A A'' + \beta'' A A')\beta^2 + 2\beta(\beta A' + \beta' A)(\beta A'' + \beta'' A) ,$$

oder wenn man auf der rechten Seite dieser Gleichung die Klammern wegschafft

(61. e.) $$(\alpha)(\alpha')(\alpha'') - (\alpha)(\beta)^2 - (\alpha')(\beta')^2 - (\alpha'')(\beta'')^2 + 2(\beta)(\beta')(\beta'') = 2\beta\beta'\beta'' A^2$$

ist, und eben so

$$(\alpha')(\alpha'')-(\beta)^2=-\beta^2,\ (\alpha)(\alpha'')-(\beta')^2=-(\beta A'+\beta' A)^2,\ (\alpha)(\alpha')-(\beta'')^2=-(\beta A''+\beta'' A)^2, \quad \textbf{(61. f.)}$$

so geht die Bedingung (61. c.) über in:

$$2\beta\beta'\beta'' A^2=0 \quad \textbf{(61. g.)}$$

und die Bedingungen (61. d.) werden:

$$-\beta^2=0\,,\quad -(\beta A'+\beta' A)^2=0\,,\quad -(\beta A''+\beta'' A)^2=0$$

oder

$$\beta=0\,,\qquad \beta A'+\beta' A=0\,,\qquad \beta A''+\beta'' A=0. \quad \textbf{(61. h.)}$$

Erwägt man nun, dass die einem jeden Parallel-Coordinatensysteme unerlässliche Bedingung, wornach dessen drei Grund- oder Polaraxen nie in einer und derselben Ebene liegen dürfen, der im ersten Abschnitte (§. 4. Nr. 52.) aufgestellten Ungleichung (99.) zur Folge hier, wo $A_2=0$, $A'_2=0$, $A''_2=1$ und $A_1=0$, $A'_1=1$, $A''_1=0$ ist, nach sich zieht, dass

$$A \gtrless 0 \quad \textbf{(61. i.)}$$

sein müsse, so überzeugt man sich, dass statt der Bedingung (61. g.) auch die $2\beta\beta'\beta''=0$ genommen werden könne, und diess ist in der That die, in welche die oben in (60. a.) angegebene für $\alpha=0$, $\alpha'=0$, $\alpha''=0$ übergeht, woraus erhellet, dass jene Bedingung auch in dem gegenwärtigen Falle noch brauchbar ist. Die Bedingungen (61. h.) geben, weil $A \lessgtr 0$ sein muss,

$$\beta=0\,,\quad \beta'=0\,,\quad \beta''=0$$

und diess sind in der That auch die, in welche sich die oben in (60. c.) angegebenen verwandeln, wenn gleichzeitig $\alpha=0$, $\alpha'=0$, $\alpha''=0$ ist. Sie zeigen, dass in diesem letzten Falle die ursprüngliche Gleichung aufhören müsste eine Gleichung des zweiten Grades zu sein, und geben eben dadurch die Unmöglichkeit dieser Erscheinung bei den Flächen zweiter Ordnung zu erkennen.

207) Nachdem gezeigt worden ist, wie sich jede Fläche der zweiten Ordnung an einem, ja an unzählig vielen, jederzeit leicht bestimmbaren Coordinatensystemen, welche mit dem ursprünglichen eine gemeinschaftliche Spitze haben, und deren eine Grund- oder Polaraxe dabei fast immer in einer Grund- oder Polaraxe des ursprünglichen Systems liegen bleiben kann, durch eine Gleichung darstellen lässt, welche nach Verlangen die eine oder die andere der in (55. a.) angegebenen Formen annimmt; und nachdem die Kennzeichen hervorgehoben worden sind, woran sich gleich aus der ursprünglich gegebenen Gleichung entscheiden lässt, ob in diesen letztern Gleichungen eines oder zwei von den Gliedern fehlen werden, welche x^2, x'^2, x''^2 oder u^2, u'^2, u''^2 zu Factoren haben, wollen wir jetzt noch zusehen, welchen Einfluss eine Aenderung der Coordinatenspitze, ohne dass die Richtungen der Axen eine Aenderung erleiden, auf die Form einer solchen Gleichung haben kann. Zu diesem Ende stellen wir uns vor, dass die Axen AX, AX′, AX″, an welchen die Fläche zweiter Ordnung durch eine der Gleichungen (55. a.) dargestellt wird, mit sich selber parallel und gleichläufig durch einen beliebigen andern Punct O des Raumes gelegt werden, und deuten diese neuen Axen durch OX, OX′, OX″ an; dann erhalten wir die Gleichung, welche dieselbe Fläche zweiter Ordnung an diesen neuen Axen darstellt, indem wir in die gegebene Gleichung für x, x', x'' oder u, u', u'' ihre in den Gleichungen (44.) enthaltenen Ausdrücke setzen, und unter ξ, ξ', ξ'' und

η, η', η'' die schiefen und senkrechten Coordinaten verstehen, welche der Punct O an den Axen AX, AX', AX'' giebt, so wie unter x_0, x'_0, x''_0 und u_0, u'_0, u''_0 die schiefen und senkrechten Coordinaten an den Axen OX, OX', OX'' von demjenigen beliebigen Puncte, der an den Axen AX, AX', AX'' die x, x', x'' und u, u', u'' hat. Durch die hier angezeigte Substitution geht aber die erste Gleichung (55. a.) über in:

(62. a.)
$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha'_0 x_0'^2 + \alpha''_0 x_0''^2 = 2(-\alpha_0\xi + \gamma_0)x_0 + 2(-\alpha'_0\xi' + \gamma'_0)x'_0 + 2(-\alpha''_0\xi'' + \gamma''_0)x''_0$$
$$-\alpha_0\xi^2 - \alpha'_0\xi'^2 - \alpha''_0\xi''^2 + 2\gamma_0\xi + 2\gamma'_0\xi' + 2\gamma''_0\xi'' + \mu_0,$$

und die zweite Gleichung (55. a.) wird:

(62. b.)
$$\delta_0 u_0^2 + \delta'_0 u_0'^2 + \delta''_0 u_0''^2 = 2(-\delta_0\eta + \zeta_0)u_0 + 2(-\delta'_0\eta' + \zeta'_0)u'_0 + 2(-\delta''_0\eta'' + \zeta''_0)u''_0$$
$$-\delta_0\eta^2 - \delta'_0\eta'^2 - \delta''_0\eta''^2 + 2\zeta_0\eta + 2\zeta'_0\eta' + 2\zeta''_0\eta'' + \nu_0,$$

wobei man es im Allgemeinen durch die geeignete Wahl des Punctes O dahin wird bringen können, dass

(62. c.)
$$-\alpha_0\xi + \gamma_0 = 0\,,\quad -\alpha'_0\xi' + \gamma'_0 = 0\,,\quad -\alpha''_0\xi'' + \gamma''_0 = 0$$

oder

(62. d.)
$$-\delta_0\eta + \zeta_0 = 0\,,\quad -\delta'_0\eta' + \zeta'_0 = 0\,,\quad -\delta''_0\eta'' + \zeta''_0 = 0$$

wird; dann verschwinden aus den vorstehenden Gleichungen (62. a. oder b.) die Theile der ersten Dimension, und es bleibt in ihnen neben einem von der Lage des Punctes O abhängigen constanten Gliede nur noch der Theil der zweiten Dimension zurück, in welchem die Glieder fehlen, welche mit dem Product von zwei Coordinaten versehen sind. Es lassen sich die schiefen Coordinaten ξ, ξ', ξ'' oder die senkrechten η, η', η'' des Punctes O, welcher diese Umänderung der Gleichung bewirkt, jedesmal aus den Gleichungen (62. c.) oder (62. d.) finden, wenn keiner der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 null ist; dann findet man nur einen einzigen Punct O, der diese Eigenschaft besitzt, weil die angeführten Gleichungen sämmtlich nur vom ersten Grade in Bezug auf die zu findenden Grössen sind, und deswegen für jede von diesen nur einen einzigen Werth liefern. Durch diese Werthe verwandelt sich die Gleichung (62. a.) in:

(62. e.)
$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha'_0 x_0'^2 + \alpha''_0 x_0''^2 = \mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + \frac{\gamma_0'^2}{\alpha'_0} + \frac{\gamma_0''^2}{\alpha''_0}$$

und die Gleichung (62. b.) geht über in:

(62. f.)
$$\delta_0 u_0^2 + \delta'_0 u_0'^2 + \delta''_0 u_0''^2 = \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + \frac{\zeta_0'^2}{\delta'_0} + \frac{\zeta_0''^2}{\delta''_0}\,.$$

Ist aber einer der erwähnten Coeffizienten null, wir nehmen an α''_0 oder δ''_0, während die übrigen, hier α_0, α'_0 oder δ_0, δ'_0, nicht null sind, welches geschieht, wenn die Bedingung (60. a.) oder (60. b.) von der ursprünglich gegebenen Gleichung erfüllt wird, so lassen sich aus den beiden ersten Gleichungen (62. c. oder d.) noch immer die Coordinaten ξ und ξ' oder η und η', welche ein Glied der ersten Dimension zum Verschwinden bringen, angeben, aber aus der dritten Gleichung fällt ξ'' oder η'' von selber weg, wodurch diese Gleichung, wenn nicht zufällig γ''_0 oder ζ''_0 null ist, unmöglich wird, und dadurch zu verstehen giebt, dass aus der neuen Gleichung das Glied der ersten Dimension, welches x''_0 oder u''_0 zum Factor hat, sich nicht entfernen lässt. In einem solchen Falle verwandelt sich die Gleichung (62. a.) in:

(62. g.)
$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha'_0 x_0'^2 - 2\gamma''_0 x''_0 = \mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + \frac{\gamma_0'^2}{\alpha'_0} + 2\gamma''_0\xi''$$

und die Gleichung (62. b.) wird:

$$\delta_0 u_0^2 + \delta_0' u_0'^2 - 2\zeta_0'' u_0'' = \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + \frac{\zeta_0'^2}{\delta_0'} + 2\zeta_0''\eta''; \qquad \textbf{(62. h.)}$$

sind dagegen zwei von jenen Coeffizienten null, wir nehmen an die α_0'' und α_0' oder die δ_0'' und δ_0', so kann man nur noch aus der ersten Gleichung (62. c. oder d.), die Coordinate ξ oder η bestimmen, welche das mit x_0 oder u_0 behaftete Glied der ersten Dimension zum Verschwinden bringt, aber aus den zwei letzten Gleichungen (62. c. oder d.) fallen ξ' und ξ'' oder η' und η'' von selber weg, wodurch diese Gleichungen, wenn nicht γ_0', γ_0'' oder ζ_0', ζ_0'' zufällig null sind, unmöglich werden und dadurch zu verstehen geben, dass die mit x_0', x_0'' oder u_0', u_0'' behafteten Glieder der ersten Dimension sich durchaus nicht entfernen lassen. Die Gleichung (62. a.) verwandelt sich in diesem Falle in:

$$\alpha_0 x_0^2 - 2\gamma_0' x_0' - 2\gamma_0'' x_0'' = \mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + 2\gamma_0'\xi' + 2\gamma_0''\xi'' \qquad \textbf{(62. i.)}$$

und die Gleichung (62. b.) wird:

$$\delta_0 u_0^2 - 2\zeta_0' u_0' - 2\zeta_0'' u_0'' = \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + 2\zeta_0'\eta' + 2\zeta_0''\eta''. \qquad \textbf{(62. k.)}$$

Weil jedoch in der Gleichung (62. g. oder h.) die Coordinate ξ'' oder η'' noch ganz nach Belieben genommen werden kann, so kann man sie so wählen, dass

$$\mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + \frac{\gamma_0'^2}{\alpha_0'} + 2\gamma_0''\xi'' = 0 \quad \text{oder} \quad \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + \frac{\zeta_0'^2}{\delta_0'} + 2\zeta_0''\eta'' = 0 \qquad \textbf{(62. l.)}$$

wird, welches immer und zwar nur auf eine einzige Weise geschehen kann, den einen Fall ausgenommen, wo zufällig γ_0'' oder ζ_0'' null ist, wo dann aber die Gleichung (62. g. oder h.) blos besondere Fälle von denen (62. e. oder f.) sind, und deswegen nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen. In allen andern Fällen gehen aber die Gleichungen (62. g. oder h.) mittelst der (62. l.) über in:

$$\alpha_0 x_0^2 + \alpha_0' x_0'^2 - 2\gamma_0'' x_0'' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u_0^2 + \delta_0' u_0'^2 - 2\zeta_0'' u_0'' = 0. \qquad \textbf{(62. m.)}$$

Weil ferner in den Gleichungen (62. i. oder k.) die beiden Coordinaten ξ' und ξ'' oder η' und η'' ganz beliebig genommen werden können, so kann man sie so wählen, dass

$$\mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + 2\gamma_0'\xi' + 2\gamma_0''\xi'' = 0 \quad \text{oder} \quad \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + 2\zeta_0'\eta' + 2\zeta_0''\eta'' = 0, \qquad \textbf{(62. n.)}$$

was immer und zwar auf unzählig viele Arten, wobei der Punct O in einer mit der Coordinatenebene X′OX″ parallelen Geraden liegen bleibt, geschehen kann, wenn nicht zufällig von den Coeffizienten γ_0', γ_0'' oder ζ_0', ζ_0'' einer oder beide null sind; wo dann aber die Gleichungen (62. i. oder k.) blos besondere Fälle von denen (62. e. oder f.) oder von denen (62. m.) werden, und als solche nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen. In allen andern Fällen nehmen aber die Gleichungen (62. i. oder k.) mit Zuziehung derer (62. n.) die folgende Gestalt an:

$$\alpha_0 x_0^2 - 2\gamma_0' x_0' - 2\gamma_0'' x_0'' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u_0^2 - 2\zeta_0' u_0' - 2\zeta_0'' u_0'' = 0. \qquad \textbf{(62. o.)}$$

Es ist indessen leicht zu zeigen, dass die Gestalten der Flächen zweiter Ordnung, welche in einer der Gleichungen (62. o.) enthalten sind, schon in den Gleichungen (62. m.) als ein besonderer Fall vorkommen. Hierbei dürfen wir voraussetzen, dass keiner der Coeffizienten γ_0',

γ''_0 oder ζ'_0, ζ''_0 null ist, weil schon der blose Anblick in diesem Falle die Gleichungen (62. o.) als einen besondern Fall von denen (62. m.) zu erkennen giebt; dass aber, auch wenn keiner von diesen Coeffizienten null ist, die Gleichungen (62. o.) nur besondere Fälle von den in (62. m.) gegebenen sind, lässt sich so darthun.

Wäre an den Axen AX, AX', AX'' eines beliebigen Coordinatensystems eine Gleichung von der Form

(63 a.) $$\alpha_0 x^2 - 2\gamma'_0 x' - 2\gamma''_0 x'' = 0$$

gegeben, und denkt man sich durch die Spitze dieses Coordinatensystems drei neue Axen AY, AY', AY'' gelegt, von welchen die eine AY in der AX liegen bleibt, so dass $A=1$, $A'=0$, $A''=0$, die zwei andern AY' und AY'' aber in Richtungen gebracht werden, für welche

$$A_1 = 0\ ,\quad A'_1 = -\gamma''_0 m\ ,\quad A''_1 = \gamma'_0 m \quad \text{und} \quad A_2 = 0\ ,\quad A'_2 = \gamma'_0 n\ ,\quad A''_2 = \gamma''_0 n$$

wird, wobei A, A', A''; A_1, A'_1, A''_1; A_2, A'_2, A''_2 die schiefen Projectionszahlen vorstellen, welche die Richtungen AY, AY', AY'' an den Axen AX, AX', AX'' geben, so werden die Gleichungen zwischen den Coordinaten, welche die Puncte an den neuen und an den vorigen Axen liefern, den Relationen (41. a.) gemäss

$$x = y\ ,\quad x' = -m\gamma''_0 y' + n\gamma'_0 y''\ ,\quad x'' = m\gamma'_0 y' + n\gamma''_0 y''\ ;$$

setzt man die hier für x, x', x'' gegebenen Ausdrücke in die Gleichung (63. a.), so geht diese über in:

(63. b.) $$\alpha_0 y^2 - 2n(\gamma'^2_0 + \gamma''^2_0)\, y'' = 0$$

und hat nun die Form der ersten Gleichung (62. m.), aus welcher sie hervorgeht, wenn man in letzterer $\alpha'_0 = 0$ und $\gamma''_0 = n\ (\gamma'^2_0 + \gamma''^2_0)$ werden lässt. — Oder wäre an den Axen AX, AX', AX'' eines beliebigen Coordinatensystems eine Gleichung von der Form

(63. c.) $$\delta_0 u^2 - 2\zeta'_0 u' - 2\zeta''_0 u'' = 0$$

gegeben, und denkt man sich durch die Spitze A dieses Coordinatensystems drei neue Axen AY, AY', AY'' sammt den dazu gehörigen Polaraxen $A\mathfrak{Y}$, $A\mathfrak{Y}'$, $A\mathfrak{Y}''$ so gelegt, dass die Polaraxe $A\mathfrak{Y}$ in der Grundaxe AX liegen bleibt, also

$$(\Gamma) = 1\ ,\quad (\Gamma') = 0\ ,\quad (\Gamma'') = 0$$

ist, die Richtungen der zwei andern Polaraxen $A\mathfrak{Y}'$ und $A\mathfrak{Y}''$ aber so genommen werden, dass

$$(\Gamma_1) = 0\ ,\quad (\Gamma'_1) = -m\zeta''_0\ ,\quad (\Gamma''_1) = m\zeta'_0$$

und

$$(\Gamma_2) = 0\ ,\quad (\Gamma'_2) = n\zeta'_0\ ,\quad (\Gamma''_2) = n\zeta''_0$$

ist, wobei (Γ), (Γ'), (Γ''); (Γ_1), (Γ'_1), (Γ''_1); (Γ_2), (Γ'_2), (Γ''_2) die senkrechten Projectionszahlen vorstellen, welche die Polaraxen $A\mathfrak{Y}$, $A\mathfrak{Y}'$, $A\mathfrak{Y}''$ an den Axen AX, AX', AX'' geben, so ist nach Aussage der Gleichungen (41. f.)

$$u = \frac{v}{\mathfrak{D}}\ ,\quad u' = -m\zeta''_0 \frac{v'}{\mathfrak{D}'_1} + n\zeta'_0 \frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}\ ,\quad u'' = m\zeta'_0 \frac{v'}{\mathfrak{D}'_1} + n\zeta''_0 \frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}\ ,$$

und setzt man diese für u, u', u'' erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung (63. c.), so verwandelt sie sich in:

$$\delta_0 \frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} - 2n(\zeta_0'^2 + \zeta_0''^2) \frac{v''}{\mathfrak{D}_2''} = 0 \qquad \textbf{(63. d.)}$$

und ist nun ein besonderer Fall von der hintern (62. m.) geworden, aus der sie hervorgeht, wenn man an die Stelle von δ_0, δ_0' und ζ_0'' setzt $\frac{\delta_0}{\mathfrak{D}^2}$, 0 und $\frac{n(\zeta_0'^2 + \zeta_0''^2)}{\mathfrak{D}_2''}$. Hierbei wollen wir noch bemerken, dass es stets möglich ist den neuen Axen die vorgeschriebenen Richtungen anzuweisen, die Coeffizienten γ_0', γ_0'' oder ζ_0', ζ_0'' mögen gleich oder ungleich sein, weil diese drei Richtungen nie in einer und derselben Ebene liegen, also stets die drei Axen eines Coordinatensystems vorstellen können. Da in den beiden hier besprochenen Fällen immer eine von den drei Coordinaten aus der Gleichung ganz fortgeht, so beweist dieser Umstand, dass die durch eine Gleichung von der Form (63. a.) oder (63. c.) dargestellte Fläche der zweiten Ordnung eine Cylinderfläche ist. (Abschnitt III. §. 14. Nr. 139.).

Aus den vorangegangenen Betrachtungen erhellet, dass alle möglichen Gestalten, welche Flächen der zweiten Ordnung annehmen können, in den Gleichungen (62. e. oder f.) und (62. m.) enthalten sind, welche, wenn wir die Axen des Coordinatensystems auf das sich diese beziehen, wieder durch AX, AX′, AX″ vorstellen, und dem gemäss die Coordinaten der Puncte durch x, x′, x″ und u, u′, u″ bezeichnen, so wie die in diesen Gleichungen vorkommenden constanten Glieder durch (μ_0) oder (ν_0), sich so schreiben lassen:

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + \alpha_0'' x''^2 = (\mu_0) \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + \delta_0' u'^2 + \delta_0'' u''^2 = (\nu_0) \qquad \textbf{(64. a.)}$$

und

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + 2\gamma_0'' x'' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + \delta_0'' u'^2 + 2\zeta_0'' u'' = 0, \qquad \textbf{(64. b.)}$$

wo wir den Gliedern $2\gamma_0'' x''$ und $2\zeta_0'' u''$ das Vorzeichen + gegeben haben, was sich durch eine blose Gegensetzung in der Richtung der Axe AX″ bewirken lässt. Es ist zwar wahr, dass noch andere Formen entstehen können, wenn man anstatt α_0'' oder δ_0'' allein verschwinden zu lassen, α_0' oder δ_0' allein, so wie auch α_0 oder δ_0 allein verschwinden liesse, oder wenn man statt $\alpha_0''=0$ und $\alpha_0'=0$ oder $\delta_0''=0$ und $\delta_0'=0$ zu nehmen, $\alpha_0''=0$ und $\alpha_0=0$ oder $\delta_0''=0$ und $\delta_0=0$, so wie auch $\alpha_0'=0$ und $\alpha_0=0$ oder $\delta_0'=0$ und $\delta_0=0$ werden liesse; allein dadurch entstünden blos solche neue Formen, die sich aus den vorigen durch eine in Bezug der Accente vorgenommene Vertauschung der dritten und zweiten oder der ersten und zweiten Art herleiten liessen, und eben dadurch an den Tag geben, dass sie keine neuen Gestalten in sich bergen, sondern blos dieselben Gestalten auf anders benannte Axen beziehen, daher da wo es sich lediglich um die Kenntniss der verschiedenen Gestalten der Flächen zweiter Ordnung handelt, gänzlich ausser Acht gelassen werden können.

Die Coeffizienten α_0, α_0', α_0'' und γ_0, γ_0', γ_0'' oder δ_0, δ_0', δ_0'' und ζ_0, ζ_0', ζ_0'' in solchen Gleichungen, welche aus den ursprünglichen nach Art der in (64. a. und b.) besprochenen hervorgehen, bleiben ganz die gleichen, wie sie in den Gleichungen (55. a.) geworden sind, und wie wir sie in den Gleichungen (55. b. bis k.) angegeben haben, sowohl für den Fall, dass die ursprüngliche Gleichung schiefe Coordinaten in sich trägt, als auch für den Fall, wo die ursprüngliche Gleichung senkrechte Coordinaten in sich aufgenommen hat. Die Grössen (μ_0) und (ν_0) hingegen, wodurch die constanten Glieder in den Gleichungen (64. a.) bezeichnet worden sind, vertreten die auf der rechten Seite der Gleichungen (62. i.) und (62. k.) stehenden Ausdrücke, so dass also

(64. c.) $$(\mu_0) = \mu_0 + \frac{\gamma_0^2}{\alpha_0} + \frac{\gamma_0'^2}{\alpha_0'} + \frac{\gamma_0''^2}{\alpha_0''} \quad \text{und} \quad (\nu_0) = \nu_0 + \frac{\zeta_0^2}{\delta_0} + \frac{\zeta_0'^2}{\delta_0'} + \frac{\zeta_0''^2}{\delta_0''}$$

ist, wobei auch für μ_0 und ν_0 entweder die ersten oder die zweiten in den Gleichungen (55. h.) und (55. i.) ihnen gegebenen Werthe genommen werden müssen, je nachdem die ursprüngliche Gleichung in schiefen oder in senkrechten Coordinaten gegeben war. Es ist folglich mit Zuziehung der in (55. h.) eingeführten Bezeichnungen

(64. d.) $$\left\{\begin{array}{l} (\mu_0) = \mu + \frac{1}{\alpha''}\left[\gamma''^2 + \frac{(\mathfrak{f}'\mathrm{A} + \mathfrak{f}\mathrm{A}')^2}{\varkappa \mathrm{A}'^2 + \varkappa' \mathrm{A}^2 + 2\lambda'' \mathrm{A}\mathrm{A}'} + \frac{(\mathfrak{f}'\mathrm{A}_1 + \mathfrak{f}\mathrm{A}_1')^2}{\varkappa \mathrm{A}_1'^2 + \varkappa' \mathrm{A}_1^2 + 2\lambda'' \mathrm{A}_1\mathrm{A}_1'}\right] \\ \text{oder} \\ (\mu_0) = \nu + \frac{1}{\delta''}\left[\zeta''^2 + \frac{(\mathfrak{g}'\mathrm{C} + \mathfrak{g}\mathrm{C}')^2}{\sigma \mathrm{C}'^2 + \sigma' \mathrm{C}^2 + 2\tau'' \mathrm{C}\mathrm{C}'} + \frac{(\mathfrak{g}'\mathrm{C}_1 + \mathfrak{g}\mathrm{C}_1')^2}{\sigma \mathrm{C}_1'^2 + \sigma' \mathrm{C}_1^2 + 2\tau'' \mathrm{C}_1\mathrm{C}_1'}\right], \end{array}\right.$$

so wie auch:

(64. e.) $$\left\{\begin{array}{l} (\nu_0) = \mu + \frac{1}{\alpha''}\left[\gamma''^2 + \frac{(\mathfrak{f}'(A) + \mathfrak{f}(A'))^2}{\varkappa (A')^2 + \varkappa' (A^2) + 2\lambda'' (A)(A')} + \frac{(\mathfrak{f}'(A_1) + \mathfrak{f}(A_1'))^2}{\varkappa (A_1')^2 + \varkappa' (A_1)^2 + 2\lambda'' (A_1)(A_1')}\right] \\ \text{oder} \\ (\nu_0) = \nu + \frac{1}{\delta''}\left[\zeta''^2 + \frac{(\mathfrak{g}'(\Gamma) + \mathfrak{g}(\Gamma'))^2}{\sigma (\Gamma')^2 + \sigma' (\Gamma)^2 + 2\tau'' (\Gamma)(\Gamma')} + \frac{(\mathfrak{g}'(\Gamma_1) + \mathfrak{g}(\Gamma_1'))^2}{\sigma (\Gamma_1')^2 + \sigma' (\Gamma_1)^2 + 2\tau'' (\Gamma_1)(\Gamma_1')}\right], \end{array}\right.$$

und man hat für μ_2 sowohl als für ν_2 entweder die obern oder die untern der hier für sie erhaltenen Ausdrücke zu nehmen, je nachdem die ursprüngliche Gleichung in schiefen oder in senkrechten Coordinaten gegeben war.

Die vorstehenden Ausdrücke gestatten eine eigenthümliche Umgestaltung, die zu kennen von Nutzen sein kann, wobei wir uns jedoch auf den ersten in (64. d.) stehenden Werth von (μ_0) beschränken werden, da der zweite so wie die beiden Werthe von (ν_0) durch eine blose Vertauschung aus diesem abgeleitet werden können. Bringt man nämlich die zwei in den eckigen Klammern der obern Gleichung (64. d.) vorkommenden Quotienten auf gleiche Benennung, addirt sie, schafft die Klammern im Zähler weg und zieht die $\mathfrak{f}'^2$, $\mathfrak{f}'\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}^2$ enthaltenden Theile immer in ein Glied zusammen, so kann man diesem Zähler zunächst die folgende Form geben:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{f}'^2\left[\varkappa(\mathrm{A}^2\mathrm{A}_1'^2 + \mathrm{A}'^2\mathrm{A}_1^2) + 2\mathrm{A}\mathrm{A}_1[\varkappa'\mathrm{A}\mathrm{A}_1 + \lambda''(\mathrm{A}\mathrm{A}_1' + \mathrm{A}'\mathrm{A}_1)]\right] \\ \quad + 2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'[2\lambda''\mathrm{A}\mathrm{A}_1\mathrm{A}'\mathrm{A}_1' + (\mathrm{A}\mathrm{A}_1' + \mathrm{A}'\mathrm{A}_1)(\varkappa\mathrm{A}'\mathrm{A}_1' + \varkappa'\mathrm{A}\mathrm{A}_1)] \\ + \mathfrak{f}^2\left[\varkappa'(\mathrm{A}^2\mathrm{A}_1'^2 + \mathrm{A}'^2\mathrm{A}_1^2) + 2\mathrm{A}'\mathrm{A}_1'[\varkappa\mathrm{A}'\mathrm{A}_1' + \lambda''(\mathrm{A}\mathrm{A}_1' + \mathrm{A}'\mathrm{A}_1)]\right] \end{array}$$

und ihn sodann mittelst der Gleichung (48. a.) überführen in:

$$(\mathfrak{f}^2\varkappa' + \mathfrak{f}'^2\varkappa - 2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\lambda'')(\mathrm{A}\mathrm{A}_1' - \mathrm{A}'\mathrm{A}_1)^2,$$

so dass man als Summe jener beiden Quotienten findet:

$$\frac{(\mathfrak{f}^2\varkappa' + \mathfrak{f}'^2\varkappa - 2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\lambda'')(\mathrm{A}\mathrm{A}_1' - \mathrm{A}'\mathrm{A}_1)^2}{(\varkappa\mathrm{A}'^2 + \varkappa'\mathrm{A}^2 + 2\lambda''\mathrm{A}\mathrm{A}')(\varkappa\mathrm{A}_1'^2 + \varkappa'\mathrm{A}_1^2 + 2\varkappa''\mathrm{A}_1\mathrm{A}_1')}$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\mathrm{A}^2\mathrm{A}_1^2$ dividirt, und die Bezeichnungen (56. a.) in Anwendung bringt:

$$\frac{(\mathfrak{f}^2\varkappa' + \mathfrak{f}'^2\varkappa - 2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\lambda'')(\mathrm{n}' - \mathrm{m}')^2}{(\varkappa\mathrm{m}'^2 + \varkappa' + 2\lambda''\mathrm{m}')(\varkappa\mathrm{n}'^2 + \varkappa' + 2\lambda''\mathrm{n}')},$$

und dieser Ausdruck geht mittelst der Gleichungen (57. a.) und (57. e.) über in:

$$\frac{\mathfrak{f}^2\varkappa'+\mathfrak{f}'^2\varkappa-2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\lambda''}{\varkappa\varkappa'-\lambda''^2},$$

so dass man schliesslich anstatt der obern Gleichung (64. d.) die folgende gefunden hat:

$$(\mu_0)=\mu+\frac{\gamma''^2}{\alpha''}+\frac{\mathfrak{f}^2\varkappa'+\mathfrak{f}'^2\varkappa-2\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\lambda''}{\alpha''(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}, \quad \textbf{(64. f.)}$$

wobei die Art, in welcher sich der Uebergang von jener zu dieser macht, Beachtung verdient. Die erste Gleichung (64. e.) liefert für (ν_0) denselben Werth den die (64. f.) für (μ_0) gegeben hat und aus ihm lassen sich die untern in den Gleichungen (64. d.) und (64. e.) vorkommenden Werthe von (μ_0) und (ν_0), die wieder einander gleich sind, ableiten, wenn man die Grundzeichen δ, $\mathfrak{g}$, ζ, σ, τ an die Stelle derer α, $\mathfrak{f}$, γ, $\varkappa$, λ und zugleich ν für μ setzt.

208) Nachdem wir gesehen haben, dass alle Gestalten, welche die Flächen zweiter Ordnung annehmen können, in den Gleichungen (64. a. und b.) enthalten sind, machen wir uns daran, die specifische Verschiedenheit der durch diese Gleichungen dargestellten Flächen näher kennen zu lernen. Die Gleichungen von der in (64. a.) angegebenen Form ändern sich nicht, wenn man in ihnen gleichzeitig $-x$, $-x'$, $-x''$ an die Stelle von x, x', x'' oder $-u$, $-u'$, $-u''$ an die Stelle von u, u', u'' setzt, und geben hierdurch zu erkennen, dass jedem Puncte, dessen Coordinaten eine solche Gleichung befriedigen, und der eben dadurch ein Punct der durch diese Gleichung dargestellten Fläche wird, ein zweiter entspricht, dessen Coordinaten denen des ersten Punctes an Grösse gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind; je zwei solche Puncte liegen daher in einer durch die Coordinatenspitze hindurch gehenden Geraden, und stehen von dieser Spitze nach beiden Seiten hin gleich weit ab. Es verhält sich also die Coordinatenspitze zu je zwei solchen Puncten der Fläche zweiter Ordnung gerade so wie der Mittelpunct einer Kugelfläche zu den Endpuncten ihrer Durchmesser, weswegen auch die Coordinatenspitze bei einer Fläche zweiter Ordnung, die durch eine der Gleichungen (64. a.) dargestellt wird, der Mittelpunct dieser Fläche genannt wird. Es haben mithin alle Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichungen sich auf eine der in (64. a.) angegebenen Formen bringen lassen, einen Mittelpunct, der die Spitze derjenigen Coordinatensysteme bildet, an welchen die Gleichung der Fläche diese Form annimmt. Dagegen lässt sich zeigen, dass solche Flächen zweiter Ordnung, deren Gleichung sich auf eine der in (64. b.) angegebenen Formen bringen lässt, keinen Mittelpunct haben. In der That da sich, wo Gleichungen von einer dieser letztern Formen aus den Gleichungen (55. a.) hervorgehen, wie wir in Nr. 207. gesehen haben, kein Punct O im Raume auffinden lässt, welcher, zur Spitze eines neuen Coordinatensystems genommen, machte, dass aus der neuen Gleichung der ganze Theil der ersten Dimension wegfällt, dieser Theil aber nothwendig gerade entgegengesetzte Werthe annimmt, wenn man den drei Coordinaten bei ungeänderter Grösse entgegengesetzte Vorzeichen beilegt, und also die so abgeänderten Coordinaten die Gleichungen (64. b.) nicht befriedigen können, wenn die vorigen es thun, es müsste denn zufällig $\gamma''=0$ oder $\delta''=0$ sein, wo dann aber die Formen (64. b.) blos besondere Fälle der Formen (64. a.) würden, so sieht man ein, dass es in Bezug auf Flächen, welche durch eine Gleichung, wie die (64. b.) sind, dargestellt werden, keinen Punct im Raume giebt, der die Eigenschaft besässe, dass jede durch ihn gelegte Gerade der Fläche nur in solchen Puncten be-

gegnet, die paarweise von jenem Punkt im Raume gleich weit abliegen, dass mithin solche Flächen zweiter Ordnung keinen Mittelpunct haben.

Das Vorhandensein eines Mittelpuncts in Flächen der zweiten Ordnung hängt lediglich davon ab, ob sich ihre Gleichung so umgestalten lässt, dass aus derselben der Theil der ersten Dimension verschwindet; denn da der Theil der zweiten Dimension, selbst wenn er Glieder mit dem Producte zweier Coordinaten in sich trägt, stets den gleichen Werth behält, wenn man den drei Coordinaten bei einerlei Grösse entgegengesetzte Vorzeichen beilegt, so zeigt er da, wo neben ihm kein Theil der ersten Dimension vorhanden ist, immer das Dasein eines Mittelpuncts in der durch eine solche Gleichung dargestellten Fläche zweiter Ordnung an, der die Spitze des Coordinatensystems bildet, auf welches sich diese Gleichung bezieht, so wie umgekehrt die Unmöglichkeit, zu einer Gleichung ohne einen Theil der ersten Dimension zu gelangen, das Nichtvorhandensein eines Mittelpuncts der Fläche zu erkennen giebt. Aus den besondern Formen der Gleichungen (64. a. und b.) in welchen die zu Producten von zwei Coordinaten gehörigen Glieder fehlen, lässt sich aber noch eine andere Eigenthümlichkeit der Flächen zweiter Ordnung erkennen, die wir jetzt zur Sprache bringen wollen.

Die Gleichungen (64. a.) behalten nicht nur in allen ihren Theilen dieselben Werthe, wenn alle drei Coordinaten gleichzeitig ihr Vorzeichen umkehren, ohne ihre Grösse zu ändern, sondern diess ist auch schon dann der Fall, wenn es nur eine von den drei Coordinaten thut, und hieraus folgt, dass jedem Puncte der durch eine solche Gleichung dargestellten Fläche noch die drei andern entsprechen, welche mit jenem zwei Coordinaten gemein haben, deren dritte Coordinate hingegen der dritten von jenem Puncte an Grösse zwar gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist. Weil nun Puncte, welche die auf zwei Grundaxen sich beziehenden schiefen Coordinaten mit einander gemein haben, in einer mit der dritten Grundaxe parallelen Geraden liegen, und solche, die eine der Grösse nach gleiche dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte schiefe Coordinate an einer der Grundaxen geben, in Ebenen liegen, die mit der aus den beiden andern Grundaxen gebildeten Coordinatenebene parallel laufen und von dieser nach beiden Seiten hin gleichweit abstehen, so bestehen die Flächen, deren Gleichung von der ersten in (64. a.) angegebenen Form ist, aus Puncten die paarweise in Geraden liegen, welche mit einer der Grundaxen parallel laufen, und von der, aus den beiden andern Grundaxen gebildeten Coordinatenebene zu beiden Seiten gleichweit abstehen. Ferner weil Puncte, welche die auf zwei Grundaxen sich beziehenden senkrechten Coordinaten mit einander gemein haben, in Geraden liegen, die senkrecht gegen diese beiden Grundaxen gestellt sind, und solche, die eine der Grösse nach gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte senkrechte Coordinate an einer der Grundaxen liefern, in Ebenen liegen, die auf dieser Grundaxe senkrecht stehen und von der mit ihnen parallelen Polarcoordinatenebene nach beiden Seiten hin gleichen Abstand haben, so bestehen die Flächen, deren Gleichung von der zweiten in (64. a.) angegebenen Form ist, aus Puncten die paarweise je von einer der Polarcoordinatenebenen nach ihren beiden Seiten hin gleichweit abstehen und in Geraden liegen, die mit der Polaraxe parallel laufen, welche von der erwähnten Polarcoordinatenebene durchschnitten wird. Nennt man die Gerade, welche durch zwei Puncte einer Fläche begrenzt wird, eine Sehne dieser Fläche, so lässt sich die hier angezeigte Eigenschaft der Flächen zweiter Ordnung kurz so aussprechen. Jede Grundcoordinatenebene halbirt alle mit der sie schneidenden Grundaxe parallelen Sehnen solcher Flächen der zweiten Ordnung, deren Gleichung die erste in (64. a.) angegebene Form besitzt; und jede Polarcoordinatenebene halbirt alle mit der sie

schneidenden Polaraxe parallelen Sehnen solcher Flächen der zweiten Ordnung, deren Gleichung die zweite in (64. a.) angegebene Form besitzt. Solche Ebenen, welche alle mit einer bestimmten Geraden parallelen Sehnen einer Fläche halbiren, pflegt man die dieser Geraden entsprechende Diametralebene der Fläche zu nennen. Da bei Gleichungen von der ersten in (64. a.) enthaltenen Form jede Grundcoordinatenebene eine der sie schneidenden Grundaxe entsprechende Diametralebene der durch diese Gleichung dargestellten Fläche hergiebt, so wie bei Gleichungen von der zweiten in (64. a.) enthaltenen Form jede Polarcoordinatenebene eine der sie schneidenden Polaraxe entsprechende Diametralebene der durch diese Gleichung dargestellten Fläche vorstellt, und im ersten Falle durch die drei Grundaxen, im andern Falle durch die drei Polaraxen nicht nur die drei Geraden sondern zugleich auch die drei ihnen entsprechenden Diametralebenen gegeben sind, also die drei Geraden schon durch die drei Ebenen und umgekehrt diese durch jene bestimmt sind, so werden wir solche drei von einander abhängige Diametralebenen mit Rücksicht auf die Geraden, denen sie entsprechen, verbundene oder conjugirte Diametralebenen der durch jene Gleichungen dargestellten Fläche nennen.

Die Gleichungen (64. b.) behalten in allen ihren Theilen dieselben Werthe, wenn man statt einer der durch x und x′ oder u und u′ bezeichneten Coordinaten eine an Grösse ihr gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte nimmt; es entsprechen daher jedem Puncte der durch eine solche Gleichung dargestellten Fläche noch die zwei andern, welche mit ihm neben dem x″ oder u″ noch einen der Coordinatenwerthe x, x′ oder u, u′ gemein haben, deren zweiter dieser letztern Coordinatenwerthe aber dem von jenem ersten Puncte an Grösse zwar gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt ist. Solche Gleichungen behalten hingegen nicht in allen ihren Theilen dieselben Werthe, wenn statt der durch x″ oder u″ bezeichneten Coordinate eine an Grösse ihr gleiche, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzte genommen wird; daher entspricht einem Puncte der Fläche kein zweiter, der mit jenem die durch x und x′ oder u und u′ bezeichneten Coordinatenwerthe gemein hätte, während der durch x″ oder u″ bezeichnete bei dem einen Puncte dem bei dem andern Puncte an Grösse zwar gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt wäre. Dem zur Folge sind bei den durch die erste Gleichung (64. b.) dargestellten Flächen die Grundcoordinatenebenen XAX″ und X′AX″ zwar Diametralebenen in Bezug auf Sehnen, die mit den Grundaxen AX′ oder AX parallel laufen, dagegen giebt die Grundcoordinatenebene XAX′ keine Diametralebene in Bezug auf Sehnen ab, die mit der Grundaxe AX″ parallel laufen; und eben so sind bei den durch die zweite Gleichung (64. b.) dargestellten Flächen die Polarcoordinatenebenen 𝔛A𝔛″ und 𝔛′A𝔛″ zwar Diametralebenen in Bezug auf Sehnen, die mit den Polaraxen A𝔛′ oder A𝔛 parallel laufen, aber die Polarcoordinatenebene 𝔛A𝔛′ giebt keine Diametralebene in Bezug auf Sehnen ab, die mit der Polaraxe A𝔛″ parallel laufen. Solche Diametralebenen, wie die hier beschriebenen, wo nicht jede aus zwei Axen gebildete Coordinatenebene Diametralebene in Bezug auf Sehnen ist, die mit der dritten gleichartigen Axe parallel laufen, hat man den Namen der vereinzelten oder isolirten Diametralebenen der durch jene Gleichungen dargestellten Flächen gegeben.

Lässt man in einer Gleichung von der ersten in (64. a.) enthaltenen Form zwei der Coordinaten x, x′, x″ null werden, so erhält man für das Quadrat der dritten, welche jede der drei x, x′, x″ sein kann, der Ordnung nach

$$\frac{(\mu_0)}{\alpha_0}\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha'_0}\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}$$

und wird hierdurch auf besondere in den Axen A X, A X′, A X″ liegende Puncte hingeführt, die jedoch da, wo eines der drei Quadrate als negative Zahl sich zeigt, blos eingebildete sein werden. Wir nennen die diesen Puncten entsprechenden Werthe von x, x′, x″ die conjugirten Halbmesser der Mittelpunctsfläche, gleichviel, ob diese Puncte wirklich existirende oder eingebildete sind, und verstehen im letztern Falle unter wahrer Länge des conjugirten Halbmessers die, welche man für ihn erhält, wenn man das Vorzeichen unter der ihn darstellenden Quadratwurzel umkehrt, wodurch dann die Quadratwurzel einen reellen Werth annimmt. Auch bei Gleichungen von der zweiten in (64. a.) angegebenen Form ist es thunlich, eine ähnliche Vorstellung von ihr angehörigen conjugirten Halbmessern hervortreten zu lassen. Hat man nämlich eine Gleichung mit senkrechten Coordinaten von der Form $\delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 + \delta''_0 u''^2 = (\nu_0)$ und schreibt man diese so:

$$\delta_0 \mathfrak{C}^2 \frac{u^2}{\mathfrak{C}^2} + \delta'_0 \mathfrak{C}_1'^2 \frac{u'^2}{\mathfrak{C}_1'^2} + \delta''_0 \mathfrak{C}_2''^2 \frac{u''^2}{\mathfrak{C}_2''^2} = (\nu_0)\,,$$

so geht sie unter Beiziehung der im ersten Abschnitte aufgefundenen Gleichungen (57. b.) über in:

$$\delta_0 \mathfrak{C}^2 (x)^2 + \delta'_0 \mathfrak{C}_1'^2 (x')^2 + \delta''_0 \mathfrak{C}_2''^2 (x'')^2 = (\nu_0)\,,$$

wenn man unter (x), (x′), (x″) die auf die Polaraxen A 𝔛, A 𝔛′, A 𝔛″ bezogenen schiefen Coordinaten von demselben Flächenpuncte versteht, dessen an den Grundaxen A X, A X′, A X″ gebildete senkrechte Coordinaten u, u′, u″ sind. Da diess nun, wie zuvor, eine Gleichung mit schiefen Coordinaten ist, so stellen jetzt auch wieder

$$\frac{(\nu_0)}{\delta_0 \mathfrak{C}^2}\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta'_0 \mathfrak{C}_1'^2}\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta''_0 \mathfrak{C}_2''^2}$$

die Quadrate der conjugirten Halbmesser in dem vorigen Sinne vor, nur dass die jetzigen Halbmesser auf die Richtungen der Polaraxen wie die vorigen auf die Richtungen der Grundaxen bezogen sind, wesswegen wir die vorigen conjugirte Grundhalbmesser, die jetzigen conjugirte Polarhalbmesser zur Unterscheidung beider von einander nennen werden. Die doppelten Halbmesser einer jeden Art, welche durch die zwei, aus den doppelten Vorzeichen der Quadratwurzeln entspringenden, zu beiden Seiten der Axen liegenden, reellen oder imaginären Flächenpuncte begrenzt werden, mögen conjugirte Grund- oder Polar-Durchmesser heissen.

209) Die in den Gleichungen (64. a. und b.) enthaltenen Coeffizienten können, wie die in den Gleichungen (43. a. und b.) enthaltenen, beliebige reelle, positive oder negative Zahlen und auch null sein, und hiernach modificiren sich die verschiedenen aus diesen Gleichungen hervorgehenden Gestalten, wie wir jetzt zeigen werden. Zunächst bemerken wir, dass wenn in den Gleichungen (64. a. und b.) einer der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0, γ''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0, ζ''_0 null wird, mit ihm zugleich auch eine der Coordinaten aus der Gleichung verschwindet, und dann die Gleichung den oben (Abschn. III. §. 14. Nr. 139.) gegebenen Erörterungen zufolge nur noch eine Cylinderfläche darstellt, deren Axe und Grundfläche man kennt, und die sogar, wenn noch ein anderer von jenen Coeffizienten null wird, in einen Verein von zwei Ebenen, oder auch in eine einzige Ebene sich auflösen kann; schliessen wir daher diese particulären

Gestalten, deren Eigenschaften sich sehr leicht aus denen der Curven entnehmen lassen, von unsern fernern Betrachtungen aus, so dürfen wir an jene Gleichungen die Forderung stellen, dass keiner von den auf ihren linken Seiten stehenden Coeffizienten null sei. Sodann bemerken wir in Betreff des in den Gleichungen (64. a.) vorkommenden Coeffizienten (μ_0) oder (ν_0), dass er, wenn α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 sämmtlich positive Zahlen sind, nie eine negative, oder, wenn jene Grössen sämmtlich negative Zahlen sind, nie eine positive Zahl sein kann, ohne dass die Gleichung unfähig würde, irgend einen wirklichen Punct darzustellen; denn es lassen sich in einem solchen Falle für x, x′, x″ oder u, u′, u″ keine reellen Werthe angeben, durch welche die Gleichung befriedigt werden könnte. Wäre aber der Coeffizient (μ_0) oder (ν_0) null, und stellen die Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 entweder lauter positive oder lauter negative Zahlen vor, so wird jene Gleichung nur in dem einen Falle befriedigt, wenn man die Coordinaten sämmtlich null werden lässt; die Gleichung stellt daher in diesem Falle nichts weiter als einen Punct dar, der die Coordinatenspitze selber ist. Sind endlich, während (μ_0) oder (ν_0) null ist, zwei der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 positive Zahlen und einer eine negative Zahl oder sind zwei davon negative Zahlen und der dritte eine positive, welche beiden Fälle durch Umkehrung aller Vorzeichen in einander übergehen, so kann man jedesmal, wenn man α_0 und α'_0 so wie δ_0 und δ'_0 als die zwei Coeffizienten ansieht, welche Zahlen mit einerlei Vorzeichen sind, die Gleichungen (64. a.), in welchen (μ_0) oder (ν_0) null ist, auf die folgende Form bringen:

$$m x^2 + m' x'^2 = x''^2 \quad \text{oder} \quad n u^2 + n' u'^2 = u''^2, \qquad \textbf{(65. a.)}$$

wobei m und m′ sowohl wie n und n′ positive Zahlen vorstellen. Denkt man sich nun unter

$$p x + p' x' = x'' \quad \text{oder} \quad q u + q' u' = u'' \qquad \textbf{(65. b.)}$$

die Gleichung einer noch völlig unbestimmt gelassenen, durch die Coordinatenspitze hindurch gehenden Ebene, und will man den Durchschnitt dieser Ebene mit der durch die Gleichung (65. a.) gegebenen Fläche wissen, so hat man zu diesem Ende blos die vordern oder hintern Gleichungen (65. a.) und (65. b.) als gleichzeitig bestehende anzusehen; setzt man aber den Werth von x″ oder u″ aus der Gleichung (65. b.) in die (65. a.), so erhält man:

$$(p^2 - m) x^2 + (p'^2 - m') x'^2 + 2 p p' x x' = 0 \quad \text{oder} \quad (q^2 - n) u^2 + (q'^2 - n') u'^2 + 2 q q' u u' = 0,$$

welche sich durch Auflösung nach einer der Veränderlichen x, x′ oder u, u′ auch so schreiben lassen:

$$\left.\begin{array}{l} (p^2 - m) x + [p p' \mp \sqrt{p^2 p'^2 - (p^2 - m)(p'^2 - m')}]\, x' = 0 \\ \text{oder} \\ (q^2 - n) u + [q q' \mp \sqrt{q^2 q'^2 - (q^2 - n)(q'^2 - n')}]\, u' = 0, \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots \qquad \textbf{(65. c.)}$$

und im Allgemeinen einen Verein von zwei durch die Grundaxe AX″ oder durch die Polaraxe A𝔛″ hindurch gehenden Ebenen darstellen. Sie geben zu erkennen, dass die Ebene (65. b.) die Fläche (65. a.) gar nicht trifft, so lange

$$p^2 p'^2 - (p^2 - m)(p'^2 - m') < 0 \quad \text{oder} \quad q^2 q'^2 - (q^2 - n)(q'^2 - n') < 0 \qquad \textbf{(65. d.)}$$

ist, hingegen in zwei Geraden, welche durch die Coordinatenspitze hindurch gehen, schneidet, so lange

$$p^2 p'^2 - (p^2 - m)(p'^2 - m') > 0 \quad \text{oder} \quad q^2 q'^2 - (q^2 - n)(q'^2 - n') > 0 \qquad \textbf{(65. e.)}$$

ist, endlich dass jene Ebene die Fläche in einer einzigen Geraden berührt, sobald

(65. f.) $$p^2 p'^2 - (p^2 - m)(p'^2 - m') = 0 \quad \text{oder} \quad q^2 q'^2 - (q^2 - n)(q'^2 - n') = 0$$

wird. Es stellen mithin die Gleichungen (64. a.), wenn (μ_0) oder (ν_0) null ist, und keiner der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 verschwindet, eine Kegelfläche dar, deren Scheitel in der Coordinatenspitze liegt, und deren Schnitte durch Ebenen, die parallel mit der Grundcoordinatenebene XAX' oder parallel mit der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ und in einem gegebenen Abstande von diesen geführt werden, Ellipsen sind, welche durch die Gleichung (65. a.) dargestellt werden, wenn man in ihr für x'' oder u'' den gegebenen Abstand setzt. Da diese Kegelflächen nach dem bisher Gesagten keiner weitern Untersuchung mehr bedürfen, so werden wir im fernern Verlaufe unserer Betrachtung der Flächen zweiter Ordnung nur die Fälle noch weiter verfolgen, wo weder einer der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 noch (μ_0) oder (ν_0) null ist.

Die Hauptarten der in den so beschränkten Gleichungen der Flächen zweiter Ordnung noch verborgenen verschiedenen Gestalten richten sich darnach, ob die in diesen Gleichungen enthaltenen Coeffizienten positive oder negative Zahlen sind, wie die folgende Betrachtung zeigt. Betrachten wir zuerst die Gleichungen (64. a.) und legen wir einer der in ihnen vorkommenden Coordinaten, wozu wir die x'' oder u'' nehmen wollen, einen bestimmten Werth ξ'' oder η'' bei, so hat man die Curve vor Augen, in welcher die Fläche

(66. a.) $$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + \alpha''_0 x''^2 = (\mu_0) \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 + \delta''_0 u''^2 = (\nu_0)$$

von der Ebene

(66. b.) $$x'' = \xi'' \quad \text{oder} \quad u'' = \eta''$$

geschnitten wird. Verlegt man die Axen des Coordinatensystems, auf welches sich diese Gleichungen beziehen, mit sich selber parallel und gleichläufig durch einen Punct O hindurch, dessen schiefe oder senkrechte Coordinaten

$$0,\ 0,\ \xi'' \quad \text{oder} \quad 0,\ 0,\ \eta''$$

sind, und nennt x_1, x'_1, x''_1 und u_1, u'_1, u''_1 die schiefen und senkrechten Coordinaten an diesen neuen Axen von demjenigen Puncte der an den vorigen Axen die x, x', x'' und u, u', u'' hatte, so ist den Gleichungen (44.) gemäss:

$$x = x_1,\quad x' = x'_1,\quad x'' = x''_1 + \xi'' \quad \text{oder} \quad u = u_1,\quad u' = u'_1,\quad u'' = u''_1 + \eta''$$

und setzt man diese für die ursprünglichen Coordinaten erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (66. a. und b.), so werden sie:

(66. c.) $$\alpha_0 x_1^2 + \alpha'_0 x_1'^2 + \alpha''_0 (x''_1 + \xi'')^2 = (\mu_0) \quad \text{oder} \quad \delta_0 u_1^2 + \delta'_0 u_1'^2 + \delta''_0 (u''_1 + \eta'')^2 = (\nu_0)$$

und

(66. d.) $$x''_1 = 0 \quad \text{oder} \quad u''_1 = 0,$$

und da jetzt alle Puncte der ins Auge gefassten Curve in der aus den neuen Grundaxen OX_1 und OX'_1 oder Polaraxen $O\mathfrak{X}_1$ und $O\mathfrak{X}'_1$ gebildeten Coordinatenebene liegen, so kann man diese Axen als die Grund- oder Polaraxen eines ebenen Systems ansehen, an welchem die herausgehobene Curve durch die Gleichung (66. c.), nachdem man $x''_1 = 0$ oder $u''_1 = 0$ gesetzt hat, dargestellt wird, wo dann jene Gleichung an diesem ebenen Systeme die folgende Form annimmt:

(66. e.) $$\alpha_0 x_1^2 + \alpha'_0 x_1'^2 = (\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u_1^2 + \delta'_0 u_1'^2 = (\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$$

und nun vermöge der im vorigen Paragraph durchgeführten Untersuchungen zeigt, dass diese Curve eine Hyperbel ist, wenn α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen sind, hingegen eine Ellipse, wenn α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 Zahlen mit einerlei Vorzeichen sind; diess letztere indessen nur so lange als $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ eine Zahl mit dem gleichen Vorzeichen wie α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 liefert, denn diese Ellipse zieht sich in einen einzigen Punct zusammen, wenn $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2 = 0$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2 = 0$ ist, und enthält auch nicht einmal diesen einen Punct mehr in sich, wenn $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ eine Zahl wird, welche das entgegengesetzte Vorzeichen von dem annimmt, welches die Coeffizienten α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 in sich aufgenommen haben. — Haben zum Ersten α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 einerlei Vorzeichen, so begegnet die Ebene (66. b.) der Fläche (66. a.) in Ellipsen nur so lange als $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ dasselbe Vorzeichen wie α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 behalten, jene Ebene berührt diese Fläche in einem Puncte oder trifft sie gar nicht mehr, so wie die auf den rechten Seiten der Gleichungen (66. c.) stehenden Ausdrücke null werden oder Zahlen liefern, die das entgegengesetzte Vorzeichen von dem annehmen, welches die auf ihren rechten Seiten befindlichen Coeffizienten in sich tragen; die Ausdrücke $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ und $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ können indessen nur dann null werden, wenn (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 einerlei Vorzeichen haben, dann aber sowohl wenn $\xi'' = -\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ oder $\eta'' = -\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$ als wenn $\xi'' = +\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ oder $\eta'' = +\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$ wird. Es ergeben sich mithin Ellipsen durch alle Schnitte, welche zwischen diese beiden Grenzen fallen, wenn α''_0 und α_0, α'_0 oder δ''_0 und δ_0, δ'_0 einerlei Vorzeichen haben, hingegen durch alle ausserhalb dieser Grenzen liegende Schnitte, wenn α''_0 oder δ''_0 das entgegengesetzte Vorzeichen von α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 haben; dagegen können die Ausdrücke $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ nie null werden, wenn (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben, dann liefert jeder durch eine Gleichung, wie die (66. c.) sind, angezeigte Schnitt eine Ellipse, wenn α''_0 oder δ''_0 und α_0, α'_0 oder δ_0, δ'_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben, aber es begegnet keine solche Ebene der Fläche (66. a.), wenn α''_0 oder δ''_0 und α_0, α'_0 oder δ_0, δ'_0 einerlei Vorzeichen haben, in diesem letztern Falle wird aber auch durch jene Gleichung gar nichts dargestellt, wie schon vorhin angemerkt worden ist. — Haben zum Andern α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 entgegengesetzte Vorzeichen, wobei der Schnitt eine Hyperbel liefert, so kommt diese immer zu Stande, den einen Fall ausgenommen, wo der Ausdruck $(\mu_0) - \alpha''_0 \xi''^2$ oder $(\nu_0) - \delta''_0 \eta''^2$ Null giebt, welches nur da geschehen kann, wo (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 einerlei Vorzeichen haben, in welchem Falle die Hyperbel in einen Verein von zwei Geraden übergeht. Alles, was hier in Bezug auf Schnitte, die mit der Grundcoordinatenebene X A X' oder mit der Polarcoordinatenebene 𝔛 A 𝔛' parallel laufen, gesagt worden ist, gilt ganz eben so für Schnitte, die mit einer der übrigen Grund- oder Polarcoordinatenebenen parallel geführt werden, und zwar Wort für Wort, so dass sich die hierher gehörigen Resultate aus den vorigen ergeben, wenn man in Betreff der Accente eine Vertauschung der dritten oder zweiten Art vornimmt.

210) Mit Hilfe der eben aus einander gesetzten Beschaffenheit der Schnittcurven, welche eine mit einem Mittelpuncte begabte Fläche zweiter Ordnung durch Ebenen, die entweder mit den Grundcoordinatenebenen oder mit den Polarcoordinatenebenen parallel gelegt werden, liefern kann, ist es nun leicht, die verschiedenen in den Gleichungen (64. a.) enthaltenen Gestalten zu

entdecken. Nehmen wir zuvörderst an, dass α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 in der Gleichung (64. a.) sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, so müssen wir zugleich annehmen, dass (μ_0) oder (ν_0) das gleiche hat, weil ausserdem diese Gleichung gar nichts darzustellen vermöchte. Weil nun in diesem Falle α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 einerlei Vorzeichen haben und zugleich (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 dasselbe Vorzeichen besitzen, so liefert die durch eine solche Gleichung dargestellte Fläche nach den in der vorigen Nummer gegebenen Auseinandersetzungen mittelst Ebenen, welche der Grundcoordinatenebene XAX' oder der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallel laufen, von $x''=-\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ bis $x''=+\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ oder von $u''=-\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$ bis $u''=+\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$ Ellipsen als Schnittcurven, welche an diesen Grenzen selbst in Puncte sich zusammen ziehen, und jenseits dieser Grenzen treffen solche Ebenen keinen Punct der Fläche mehr. Weil ferner in diesem Falle auch α_0 und α''_0 oder δ_0 und δ''_0 einerlei Vorzeichen haben und das Gleiche auch von α'_0 und (μ_0) oder δ'_0 und (ν_0) gilt, so liefern auch die Ebenen, welche mit der Grundcoordinatenebene XAX'' oder der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, von $x'=-\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha'_0}}$ bis $x'=+\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha'_0}}$ oder von $u'=-\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta'_0}}$ bis $u'=+\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta'_0}}$ Ellipsen als Schnittcurven, welche an diesen Grenzen in Puncte zusammenlaufen, und jenseits dieser Grenzen treffen solche Ebenen gar keinen Punct der Fläche mehr. Endlich weil in diesem Falle auch α'_0 und α''_0 oder δ'_0 und δ''_0 einerlei Vorzeichen haben, und das Gleiche auch von α_0 und (μ_0) oder δ_0 und (ν_0) gilt, so liefern auch die Ebenen, welche mit der Grundcoordinatenebene $X'AX''$ oder der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, von $x=-\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha_0}}$ bis $x=+\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha_0}}$ oder von $x=-\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta_0}}$ bis $x=+\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta_0}}$ Ellipsen als Schnittcurven, welche an diesen Grenzen in Puncte zusammenlaufen, und jenseits dieser Grenzen treffen solche Ebenen gar keinen Punct der Fläche mehr. Hieraus folgt, dass die durch eine so beschaffene Gleichung dargestellte Fläche eine völlig begrenzte ist, indem sich ihre Puncte in der Richtung der Grundaxen AX'', AX', AX nicht über eine Strecke $\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$, $\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha'_0}}$, $\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha_0}}$ oder in der Richtung der Polaraxen $A\mathfrak{X}''$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}$ nicht über eine Strecke $\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$, $\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta'_0}}$, $\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta_0}}$ zu beiden Seiten der Coordinatenspitze hinaus erstrecken, und da diese Fläche innerhalb dieser Ausdehnungen durch Ebenen, welche mit den Grund- oder Polarcoordinatenebenen parallel laufen, lauter Ellipsen als Schnittcurven liefert, so hat man ihr den Namen **Ellipsoid** gegeben.

Haben die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 in der Gleichung (64. a.) nicht sämmtlich einerlei Vorzeichen, so müssen zwei von ihnen dasselbe und der dritte das entgegengesetzte haben; wir nehmen an, dass α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 dasselbe Vorzeichen haben, hingegen α''_0 oder δ''_0 das entgegengesetzte. Während diess nun statt findet sind noch zwei Fälle möglich. Es kann nämlich die Grösse (μ_0) oder (ν_0) dasselbe Vorzeichen wie die zwei Coeffizienten α_0, α'_0 oder δ_0, δ'_0 oder dasselbe wie der eine α''_0 oder δ''_0 in sich tragen. Fasst man nun bei diesen Flächen die mit der Grundcoordinatenebene XAX' oder der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallelen Schnitte ins Auge, so wird man nach Anleitung der in der vorigen

Nummer gegebenen Auseinandersetzungen gewahr, weil α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 einerlei Vorzeichen haben, dass die so erhaltenen Schnittcurven nur Ellipsen sein können, die sich

a) wenn (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 einerlei Vorzeichen haben, sämmtlich nur ausserhalb der Grenzen $x''=-\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ und $x''=+\sqrt{\frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}}$ oder $u''=-\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$ und $u''=+\sqrt{\frac{(\nu_0)}{\delta''_0}}$, hier aber überall vorfinden, und an diesen Grenzen selbst in Puncte zusammenlaufen, wesshalb die Fläche in diesem Falle aus zwei von einander völlig getrennten Theilen besteht; die hingegen

b) wenn (μ_0) und α''_0 oder (ν_0) und δ''_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben, an jeder Stelle gefunden werden und sich nirgends in einen Punct zusammenziehen, wesshalb die Fläche in diesem Falle ein einziges überall in sich zusammenhängendes Ganzes bildet.

Fasst man dagegen solche Schnitte dieser Flächen ins Auge, welche mit den Grundcoordinatenebenen XAX'', X'AX'' oder mit den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}''$, $\mathfrak{X}'A\mathfrak{X}''$ parallel laufen, so zeigen sich diese, weil nicht nur α_0 und α''_0 oder δ_0 und δ''_0, sondern auch α'_0 und α''_0 oder δ'_0 und δ''_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben, sämmtlich als Hyperbeln, den in der vorigen Nummer gegebenen Auseinandersetzungen gemäss. Aus diesem Grunde nennt man die durch eine solche Gleichung dargestellte Fläche Hyperboloid; weil aber im Baue dieser Hyperboloide noch der unter a) und b) beschriebene Unterschied stattfindet, so wollen wir sie dadurch von einander unterscheiden, dass wir dasjenige, bei welchem, wie unter b) vorausgesetzt worden ist, die Grösse (μ_0) oder (ν_0) das entgegengesetzte Vorzeichen von dem besitzt, welches nur der eine von den Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0. δ'_0, δ''_0 hat, weil die Fläche dann ein einziges, in sich überall zusammenhängendes Ganzes bildet, das einmantelige Hyperboloid, hingegen das, bei welchem, wie unter a) vorausgesetzt worden ist, (μ_0) oder (ν_0) dasselbe Vorzeichen besitzt, welches nur dem einen von den Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 zukommt, weil die Fläche dann aus zwei von einander gesonderten Theilen besteht, das zweimantelige Hyperboloid nennen.

So wie in Nr. 205. die Kennzeichen angegeben worden sind, durch die man unmittelbar aus den Coeffizienten der ursprünglich gegebenen Gleichung erkennen kann, ob aus den reducirten Gleichungen (55. a.) eines oder zwei Glieder aus ihren Theilen der zweiten Dimension verschwinden oder nicht, d. h., ob sich die ursprünglich gegebenen Gleichungen in andere von der in (64. b.) aufgeführten Form oder von der in (64. a.) aufgeführten durch eine Veränderung des Coordinatensystems umwandeln lassen, so werden wir jetzt die Kennzeichen angeben, durch welche man in dem Falle, wo eine Gleichung von der Form (64. a.) entsteht, gleich aus den Coeffizienten der ursprünglich gegebenen Gleichung erkennen kann, welche Vorzeichen die Coeffizienten der zu erzielenden Gleichung von der Form (64. a.) annehmen werden, d. h., ob die so sich bildende Gleichung einem Ellipsoide oder einem Hyperboloide angehören werde. Wir haben oben in Nr. 204. in den Gleichungen (55. b. bis g.) die Coeffizienten der Gleichungen (55. a.) aus denen der ursprünglich gegebenen finden gelehrt, und in den Gleichungen (57. e.) sind die zwei ersten von jenen noch in einer andern Form geliefert worden. Man hat den Gleichungen (55. b.) und (57. e.) zur Folge

(67. a.)
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0=\left[\frac{1}{2}\,\varkappa\Delta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\,\varkappa^2\Delta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}\right]\frac{\Delta A^2}{\alpha''},\quad \alpha'_0=\left[\frac{1}{2}\,\varkappa\Delta\mp\sqrt{\frac{1}{4}\,\varkappa^2\Delta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}\right]\frac{\Delta A_1^2}{\alpha''} \\ \qquad\qquad\qquad\text{und}\quad \alpha''_0=\alpha'', \end{array}\right.$$

und es gehören die so bestimmten Coeffizienten auch noch der ersten Gleichung (64. a.) an, weil sie sich bei diesem zweiten Uebergange nicht verändert haben, während die constanten Glieder (μ_0) und (ν_0) dieser letztern Gleichungen andere und die geworden sind, welche die Gleichungen (64. d. und e.) an die Hand geben, und von denen der erste in (64. d.) gegebene durch die Gleichung (64. f.) noch mehr entwickelt dargestellt wird, wonach man hat:

(67. b.)
$$(\mu_0)=\mu+\frac{\gamma''^2}{\alpha''}+\frac{f^2\varkappa'+f'^2\varkappa-2ff'\lambda''}{\alpha''(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)},$$

wodurch (μ_0), zufolge der in (47. a.) und (55. h.) eingeführten Bezeichnungen, sich aus den Coeffizienten der ursprünglich gegebenen Gleichungen herholen lässt. Es folgt hieraus, dass (μ_0) denselben Werth behält, welchen Werth man auch der beliebigen Grösse Δ geben mag, also bei allen Coordinatensystemen, auf die man durch die verschiedenen dazu tauglichen Werthe von Δ hingeführt wird, wesswegen man (μ_0) bei allen diesen möglichen Systemen stets als eine und dieselbe constante Grösse anzusehen hat. — Multiplicirt man die zwei ersten Gleichungen (67. a.) mit einander, so erhält man:

(67. c.)
$$\alpha_0\alpha'_0=\frac{A^2A_1^2\Delta^2}{\alpha''^2}(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2),$$

und da weder Δ noch α'' der Null gleich sind, so wird, wenn weder A noch A_1 null ist, $\frac{A^2A_1^2\Delta^2}{\alpha''^2}$ stets eine positive Zahl sein; es wird daher unter dieser Voraussetzung $\alpha_0\alpha'_0$ mit $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2$ zugleich entweder positiv oder negativ werden, oder mit andern Worten, es werden α_0 und α'_0 entweder einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, je nachdem

(67. d.)
$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2>0 \quad\text{oder}\quad \varkappa\varkappa'-\lambda''^2<0$$

ist.

I. Ist nun erstlich $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2>0$ und nehmen daher α_0 und α'_0 einerlei Vorzeichen an, so bewegen sich die möglichen Werthe von $\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\Delta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}$ alle zwischen $-\frac{1}{2}\varkappa\Delta$ und $+\frac{1}{2}\varkappa\Delta$ herum, wesshalb $\frac{1}{2}\varkappa\Delta\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varkappa^2\Delta^2-(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)}$ stets ein und dasselbe Vorzeichen wie $\varkappa\Delta$ selber annimmt, und in Folge dessen nehmen α_0 und α'_0 unausgesetzt dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\varkappa\Delta^2}{\alpha''}$ oder wie $\frac{\varkappa}{\alpha''}$ an, wie aus den Gleichungen (67. a.) sich auf den ersten Blick erkennen lässt. Es werden demnach

a) die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 der reducirten Gleichung einerlei Vorzeichen in sich tragen, so wie $\frac{\varkappa}{\alpha''}$ und α''_0 oder α'' es thun, und $\frac{\varkappa}{\alpha''}$ und α'' werden einerlei Vorzeichen in sich tragen, so wie ihr Product $\varkappa$ eine positive Zahl ist. Folglich nehmen die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 der reducirten Gleichung einerlei Vorzeichen in sich auf, wenn

(67. e.)
$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2>0 \quad\text{und}\quad \varkappa>0$$

ist. In diesem Falle hat jeder Coeffizient dasselbe Vorzeichen, welches dem einen α''_0 oder α'' angehört. Es werden hingegen

b) die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 der reducirten Gleichung nicht einerlei Vorzeichen annehmen, obgleich die beiden α_0 und α'_0 es thun, wenn das Vorzeichen dieser letzten beiden, d. h. das von $\frac{\varkappa}{\alpha''}$ das entgegengesetzte von dem ist, welches α''_0 oder α'' in sich trägt, und diese beiden Grössen werden entgegengesetzte Vorzeichen in sich aufnehmen, wenn ihr Product $\varkappa$ eine negative Zahl ist. Folglich nehmen die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 der reducirten Gleichung nie einerlei Vorzeichen in sich auf, wenn

$$\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 > 0 \quad \text{und} \quad \varkappa < 0 \qquad (67.\ f.)$$

ist. In diesem Falle hat der eine Coeffizient, dessen Vorzeichen dem der zwei andern entgegengesetzt ist, das gleiche wie das Product von allen dreien, sonach das, welches in $\alpha''(\varkappa\varkappa' - \lambda''^2)$ enthalten ist.

II. Ist aber zweitens $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 < 0$ und tragen dem zur Folge schon α_0 und α'_0 entgegengesetzte Vorzeichen in sich, so können die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 der reducirten Gleichung nicht einerlei Vorzeichen besitzen; es nehmen also diese Coeffizienten auch dann noch verschiedene Vorzeichen in sich auf, wenn

$$\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 < 0 \qquad (67.\ g.)$$

ist. In diesem Falle hat wieder der eine Coeffizient, dessen Vorzeichen dem der zwei andern entgegengesetzt ist, das gleiche wie das Product von allen dreien, sonach das, welches in $\alpha''(\varkappa\varkappa' - \lambda''^2)$ enthalten ist.

Die vorstehenden Kennzeichen, welche sich auf eine ursprünglich in schiefen Coordinaten gegebene Gleichung beziehen, geben die für eine ursprünglich in senkrechten Coordinaten gegebene Gleichung an die Hand, wenn man die Grundzeichen α, $\varkappa$ und λ durch die δ, σ und τ ersetzt, vorausgesetzt, dass nicht $\delta'' = 0$ ist. An die Stelle der obigen Kennzeichen können aber auch die treten, welche man aus jenen durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung der dritten oder zweiten Art erhält, vorausgesetzt, dass da, wo eine Vertauschung der dritten Art vorgenommen wird, nicht $\alpha' = 0$, und bei einer Vertauschung der zweiten Art nicht $\alpha = 0$ ist. Die so sich ergebenden Kennzeichen liefern, wenn man die Grundzeichen δ, σ und τ an die Stelle derer α, $\varkappa$ und λ setzt, die, welche einer ursprünglich in senkrechten Coordinaten gegebenen Gleichung angehören, für den Fall, wo entweder δ' oder δ nicht null ist.

Da die Aufstellung dieser Kennzeichen von der Voraussetzung ausgieng, dass einer der drei Coeffizienten α, α', α'' oder derer δ, δ', δ'' nicht null sei, so bleibt noch der sehr besondere Fall zu betrachten übrig, wo diese drei Coeffizienten in der ursprünglich gegebenen Gleichung sämmtlich null sind. In diesem Falle kann man, wie die obigen Betrachtungen dargethan haben, nicht unmittelbar von der ursprünglich gegebenen Gleichung auf dem in den Nummern 200 bis 203 betretenen Wege zu einer Gleichung von einer der Formen (64. a.) gelangen, sondern man muss, wie dort gezeigt worden ist, zuvor erst eine zweite Gleichung aufsuchen, deren Coeffizienten andere als in der ursprünglich gegebenen Gleichung, nämlich die werden, welche in den Gleichungen (61. b.) für den Fall angegeben worden sind, dass die ursprüngliche Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben ist, und man wieder zu einer Glei-

chung in schiefen Coordinaten gelangen will. In diesen Gleichungen, aus welchen sich leicht die jedem andern Falle entsprechenden herholen lassen, stellen die mit Klammern umgebenen Zeichen die Coeffizienten der gesuchten zweiten Gleichung vor, welche denen in der ursprünglichen Gleichung ohne Klammern vorkommenden analog sind. Diese zweite Gleichung hat man den obigen Betrachtungen gemäss als neue ursprüngliche zu nehmen, und aus ihr nun die Gleichung von der in (64. a.) aufgestellten Form herzuleiten, welches stets geschehen kann. Auf diese Weise wird nach Aussage der Gleichungen (61. f.):

$$(\alpha')(\alpha'')-(\beta)^2=-\beta^2,\ (\alpha)(\alpha'')-(\beta')^2=-(\beta A'+\beta' A)^2,\ (\alpha)(\alpha')-(\beta'')^2=-(\beta A''+\beta'' A)^2,$$

und es sind die auf den linken Seiten dieser Gleichungen stehenden Ausdrücke in Bezug auf die in dem gegenwärtigen Falle aufzustellenden Kennzeichen das, was zuvor durch $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ bezeichnet worden ist; weil aber, den auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen befindlichen Grössen gemäss, die jetzt für $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ zu nehmenden Werthe nothwendig negative Zahlen oder null, also nie positive Zahlen werden, so folgt, dass eine Gleichung von der hier angenommenen speciellen Form nie die zweite der (67. e.) entsprechenden Bedingungen erfüllen kann, also nie eine Gleichung von der Form (64. a.) giebt, in welcher die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 einerlei Vorzeichen besitzen. Genau zu denselben Resultaten wäre man aber auch gelangt, wenn man die oben erhaltenen Kennzeichen unmittelbar auf die gegebene Gleichung, in welcher die Coeffizienten α, α', α'' oder δ, δ', δ'' sämmtlich fehlen, in Anwendung gebracht hätte; denn in diesem Falle hätten die Gleichungen (47. a.)

$$\varkappa=-\beta^2,\quad \varkappa'=-\beta'^2,\quad \varkappa''=-\beta''^2$$

also für $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ nur negative Zahlen oder null gegeben, wodurch man wieder auf die Kennzeichen von der in (67. f.) oder (67. g.) angezeigten Art hingewiesen wird. Es lassen also jene Kennzeichen selbst in diesem besondern Falle noch erkennen, dass die reducirte Gleichung von einer der in (64. a.) aufgestellten Form eine solche wird, deren Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder auch δ_0, δ'_0, δ''_0 nicht alle drei einerlei Vorzeichen haben. Um aber in diesem besondern Falle das Vorzeichen zu ermitteln, welches nur in einem der drei Coeffizienten vorkommt, hat man blos zu bedenken, dass es im Allgemeinen das von $\alpha''(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)$ oder $\alpha'(\varkappa\varkappa''-\lambda'^2)$ oder $\alpha(\varkappa'\varkappa''-\lambda^2)$ ist, wie bei der Bedingung (67. g.) angemerkt wurde, oder den Gleichungen (47. c.) zur Folge das, welches demjenigen von den drei Producten

$$\alpha''^2\mathfrak{L},\quad \alpha'^2\mathfrak{L},\quad \alpha^2\mathfrak{L}$$

angehört, dessen vorderer Factor nicht null ist, so dass eben desswegen dieses Vorzeichen das von $\mathfrak{L}$ selber ist. Man erhält aus diesem Grunde das verlangte Vorzeichen in dem gegenwärtigen besondern Falle mit dem von $\mathfrak{L}$ zugleich, wenn man die in diesem letztern Ausdrucke erscheinenden Coeffizienten mit Klammern umgiebt, und hierauf für diese neuen Coeffizienten ihre durch die Gleichungen (61. b.) gegebenen Werthe setzt. So wird

$$\mathfrak{L}=2\beta(\beta A'+\beta' A)(\beta A''+\beta'' A)-2\beta^2(\beta A' A''+\beta' A A''+\beta'' A A')$$

oder

(67. h.) $$\mathfrak{L}=2\beta\beta'\beta'' A^2,$$

wie schon in der Gleichung (61. c.) erwiesen worden ist, woraus man sieht, dass der Coeffizient in der reducirten, auf ein reelles Coordinatensystem bezogenen Gleichung, dessen Vorzeichen nur in einem der drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 vorkommt, mit dem Producte $\beta\beta'\beta''$ einerlei Vorzeichen hat.

211) Wir sind nun im Stande die Merkmale anzugeben, woran sich gleich aus der ursprünglich gegebenen Gleichung erkennen lässt, welche Art der Flächen zweiter Ordnung in ihr enthalten ist. Diese Gleichung stellt nämlich

I) ein Ellipsoid dar, wenn nicht nur eine der drei Grössen $\varkappa\varkappa'-\lambda''^2$, $\varkappa\varkappa''-\lambda'^2$, $\varkappa'\varkappa''-\lambda^2$ oder $\alpha''\mathfrak{L}$, $\alpha'\mathfrak{L}$, $\alpha\mathfrak{L}$ grösser als Null ist, wozu erforderlich ist, dass nicht alle drei Coeffizienten α, α', α'' gleichzeitig null sind, sondern noch überdiess eine der drei Grössen

$$\varkappa\,,\quad \varkappa'\,,\quad \varkappa''\quad \text{oder}\quad \alpha'\alpha''-\beta^2,\quad \alpha\alpha''-\beta'^2,\quad \alpha\alpha'-\beta''^2$$

und zwar eine von den beiden, welche in der vorigen Bedingung auftreten, eine Zahl liefert, die grösser als Null ist. In diesem Falle erhalten nämlich die drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0, von welchen einer einem der α, α', α'' gleich ist, einerlei Vorzeichen, und dann stellt die reducirte Gleichung ein Ellipsoid dar, wenn dieses Vorzeichen dem von (μ_0), welche Grösse durch die Gleichung (67. b.) gegeben wird, gleich ist, gar nichts, wenn diese beiden Vorzeichen einander entgegengesetzt sind, und einen einzigen Punct, wenn $(\mu_0)=0$ ist. Jene Gleichung stellt hingegen

II) ein Hyperboloid dar, 1° wenn wieder eine der drei Grössen

$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2,\quad \varkappa\varkappa''-\lambda'^2,\quad \varkappa'\varkappa''-\lambda^2\quad \text{oder}\quad \alpha''\mathfrak{L}\,,\quad \alpha'\mathfrak{L}\,,\quad \alpha\mathfrak{L}$$

grösser als Null und zugleich eine von den drei Grössen

$$\varkappa\,,\quad \varkappa'\,,\quad \varkappa''\quad \text{oder}\quad \alpha'\alpha''-\beta^2,\quad \alpha\alpha''-\beta'^2,\quad \alpha\alpha'-\beta''^2$$

und zwar eine von den beiden, welche in der vorigen Bedingung auftreten, kleiner als Null ist; 2° wenn eine der drei Grössen

$$\varkappa\varkappa'-\lambda''^2,\quad \varkappa\varkappa''-\lambda'^2,\quad \varkappa'\varkappa''-\lambda^2\quad \text{oder}\quad \alpha''\mathfrak{L}\,,\quad \alpha'\mathfrak{L}\,,\quad \alpha\mathfrak{L}$$

kleiner als Null ist. In diesen beiden Fällen nimmt derjenige von den drei Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0, dessen Vorzeichen das entgegengesetzte von dem der beiden andern ist, dasjenige an, welches in der entsprechenden Grösse

$$\alpha''(\varkappa\varkappa'-\lambda''^2)\,,\quad \alpha'(\varkappa\varkappa''-\lambda'^2)\,,\quad \alpha(\varkappa'\varkappa''-\lambda^2)\,,\quad \text{d. h. in } \mathfrak{L}$$

enthalten ist. Weil nun dieses Hyperboloid ein zweimanteliges oder ein einmanteliges ist, je nachdem dieses Vorzeichen das gleiche oder das entgegengesetzte von dem in (μ_0) enthaltenen ist, so folgt noch weiter, dass

a) dieses Hyperboloid ein zweimanteliges ist, wenn die in $\mathfrak{L}$ und (μ_0) enthaltenen Vorzeichen die gleichen sind; hingegen dass

b) dieses Hyperboloid ein einmanteliges ist, wenn die in $\mathfrak{L}$ und (μ_0) enthaltenen Vorzeichen einander entgegengesetzt sind, wobei (μ_0) immer den durch die Gleichung (67. b.) gegebenen Ausdruck vorstellt.

Besitzt die ursprünglich gegebene Gleichung keinen der drei Coeffizienten α, α', α'', wo dann immer der Fall II) eintritt, so hat man in a) und b) anstatt $\mathfrak{L}$ das Product $2\beta\beta'\beta''$ zu nehmen, in welches sich $\mathfrak{L}$ in der That verwandelt, wenn gleichzeitig $\alpha=0$, $\alpha'=0$ und $\alpha''=0$ ist; zu gleicher Zeit hat man aber auch an die Stelle von (μ_0) das zu setzen, was die Gleichung (67. b.) dafür giebt, wenn man auf ihrer rechten Seite statt der dortigen Coeffizienten die der zweiten Gleichung setzt, in welche die ursprüngliche vorläufig umgeändert werden muss,

da wo dieser Fall vorkommt, um von ihr aus auf dem obigen Wege zu der Gleichung von einer der in (64. a.) aufgestellten Formen gelangen zu können. Obschon die vorstehenden Merkmale nur den Fall angehen, wo die ursprüngliche Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben ist, und man wieder zu einer Gleichung in schiefen Coordinaten gelangen will, so kann man aus ihnen doch mittelst der bekannten einfachen Substitutionen alle andern ableiten *).

Die für das Hyperboloid und für das Ellipsoid erhaltenen Kennzeichen hängen, wie sich leicht zeigen lässt, in bestimmter Weise von dem analytischen Baue des Theils der zweiten Dimension in der ursprünglich gegebenen Gleichung ab. Hierbei werden wir blos die Gleichung (43. a.), welche schiefe Coordinaten in sich trägt, berücksichtigen, da, was von ihr gezeigt wird, nothwendig auch von der (43. b.) gilt, indem beide, analytisch genommen, völlig die gleichen sind, und auch bei jener wollen wir voraussetzen, dass einer der ihr zugehörigen Coefficienten α, α', α'' nicht null sei, was immer, wie wir gesehen haben, der Fall ist, wenn diese Gleichung einem Ellipsoid angehört. Wir wollen ferner auf einen Augenblick annehmen, dass die Gleichung so geschrieben sei, dass dieser eine Coeffizient, worunter wir den α'' verstehen wollen, als positive Zahl auftritt, was stets geschehen kann, so lässt sich zeigen, dass der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung, nämlich:

$$\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + 2\beta x'x'' + 2\beta' x x'' + \beta'' x x'$$

sich immer auf die Form

$$\pm (m x)^2 \pm (n x + n' x')^2 + (p x + p' x' + p'' x'')^2$$

bringen lässt; denn schafft man in diesem letzten Ausdruck die Klammern weg, und setzt man die zu einerlei Coordinatenausdruck gehörigen Coeffizienten in ihm und in dem Theile der zweiten Dimension einander gleich, so stösst man auf die folgenden Gleichungen:

$$\pm m^2 \pm n^2 + p^2 = \alpha, \quad \pm n'^2 + p'^2 = \alpha', \quad p''^2 = \alpha''$$

und

$$\pm n n' + p p' = \beta'', \quad p p'' = \beta', \quad p' p'' = \beta.$$

Die letzte auf erster Zeile und die zwei letzten auf zweiter Zeile von diesen Gleichungen geben:

$$p'' = \sqrt{\alpha''}, \quad p' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha''}}, \quad p = \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha''}}$$

und man sieht, dass diese drei Zahlen reell werden, da α'' positiv vorausgesetzt worden ist, zugleich aber auch, dass bei einem negativen Werth von α'' das Gleiche sich noch immer dadurch erzielen lässt, dass man dem dritten Quadrate das Vorzeichen — anstatt das + giebt. Die zweite auf erster Zeile und die erste auf zweiter Zeile stehende Gleichung geben hierauf

$$\pm n'^2 = \alpha' - \frac{\beta^2}{\alpha''} \quad \text{und} \quad \pm n n' = \beta'' - \frac{\beta\beta'}{\alpha''}$$

oder mit Benützung der in (47. a.) eingeführten Bezeichnungen

*) Will man die hier gefundenen Merkmale mit jenen, die Euler im Anhange zum zweiten Bande seiner Introductio aufgestellt hat, vergleichen, so muss man in Rechnung bringen, dass dieser Analyst bei seinen Betrachtungen immer einen der drei zu den Quadraten der Coordinaten gehörigen Coeffizienten als nicht null seiend und dabei positiv voraussetzt. (Michelsens Uebersetzung Cap. V. §. 109).

$$\pm n'^2 = \frac{\varkappa}{\alpha''} \quad \text{und} \quad \pm n n' = \frac{\lambda''}{\alpha''},$$

und diess zeigt, dass man durch die Wahl des vordern Vorzeichens $\pm$ immer machen kann, dass n′ und dann auch n eine reelle Zahl wird. Endlich liefert die auf erster Zeile stehende Gleichung

$$\pm m^2 = \alpha - \frac{\beta'^2}{\alpha''} - \frac{\lambda''^2}{\alpha''\varkappa},$$

oder mit Benützung derselben Bezeichnungen:

$$\pm m^2 = \frac{\varkappa\varkappa' - \lambda''^2}{\alpha''\varkappa};$$

man kann also durch die Wahl des Vorzeichens $\pm$ immer machen, dass auch noch m reell werde. Verlangt man aber, dass von den doppelten Vorzeichen immer nur das obere, nämlich $+$, genommen werde, so wird n′ und in Folge dessen auch n nur dann eine reelle Zahl, wenn $\varkappa$ und α'' einerlei Vorzeichen haben, und m wird nur dann reell, wenn $\alpha''\varkappa$ und $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2$ einerlei Vorzeichen haben. Die Bedingung, dass das Glied der zweiten Dimension in der ursprünglich gegebenen Gleichung sich als Summe jener drei Quadrate mit reellen Basen darstellen lasse, besteht also darin, dass

$$\alpha''\varkappa > 0 \quad \text{und zugleich} \quad \varkappa\varkappa' - \lambda''^2 > 0$$

sei, welche Bedingungen, da α'' positiv vorausgesetzt ist, mit dem Kennzeichen für das Ellipsoid Eins sind und bei einem negativen α'' die gleichen bleiben, wenn man allen drei Quadraten das Vorzeichen — giebt.

Aehnlich lässt sich zeigen, dass das Kennzeichen für das Hyperboloid Eins ist mit der analytischen Eigenschaft des Theils der zweiten Dimension, sich in drei Quadrate zerlegen zu lassen, die jedoch nicht alle drei zugleich dasselbe Vorzeichen annehmen können, wenn ihre Basen reell bleiben sollen. Man kann demnach auch sagen, die ursprünglich gegebene Gleichung stellt ein Ellipsoid oder Hyperboloid dar, je nachdem sich ihr Theil der zweiten Dimension als eine durch blose Addition oder durch blose Subtraction entstandene Vereinigung von drei Quadraten mit reellen Basen, oder als eine theils durch Addition und theils durch Subtraction entstandene darstellen lässt.

212) Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch in Betreff der Gleichungen (64. b.) anstellen. Legt man nämlich in diesen Gleichungen der Coordinate x″ oder u″ einen constanten Werth ξ'' oder η'' bei, wodurch sie übergehen in:

$$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 = -2\gamma''_0 \xi'' \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 = -2\zeta''_0 \eta'',$$

und nun auf das aus den Grundaxen AX, AX′ oder aus den Polaraxen A𝔛, A𝔛′ gebildete ebene System bezogen, die Curve anzeigen, in der die Fläche, welche durch die Gleichung (64. b.) dargestellt wird, von der Ebene $x'' = \xi''$ oder $u'' = \eta''$ geschnitten wird, so sieht man, dass diese Schnittcurven, wenn α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 beide zugleich positive oder beide zugleich negative Zahlen vorstellen, nur Ellipsen sein können, und zwar nur so lange als $-2\gamma''_0\xi''$ oder $-2\zeta''_0\eta''$ dasselbe Vorzeichen, wie α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0, haben, was jedoch stets auf einer von den beiden Seiten der Coordinatenspitze in der Richtung der Grundaxe AX″ oder der Polaraxe A𝔛″, wiewohl nur auf dieser einen Seite, der Fall ist; und eben

so sieht man, dass diese Schnittcurven, wenn α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 entgegengesetzte Vorzeichen haben, Hyperbeln werden, welche nur an der Coordinatenspitze in einen Verein von zwei Geraden übergehen, die entweder in der Grundcoordinatenebene XAX' oder in der Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ liegen und durch die Coordinatenspitze hindurch gehen. Legt man aber einer der Coordinaten x und x' oder u und u' einen constanten Werth ξ und ξ' oder η und η' bei, so gehen jene Gleichungen über in:

$$\alpha_0 x^2 + 2\gamma''_0 x'' = -\alpha'_0 \xi'^2 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + 2\zeta''_0 u'' = -\delta'_0 \eta'^2,$$

wenn man ξ' oder η' für x' oder u' setzt und in

$$\alpha'_0 x'^2 + 2\gamma''_0 x'' = -\alpha_0 \xi^2 \quad \text{oder} \quad \delta'_0 u'^2 + 2\zeta''_0 u'' = -\delta_0 \eta^2,$$

wenn man ξ oder η für x oder u setzt, und von diesen gehen die einen in die andern durch eine Vertauchung der ersten Art über, was zu verstehen giebt, dass die einen Schnittcurven in Bezug auf die Axe AX oder A$\mathfrak{X}$ dasselbe sind, was die andern in Bezug auf die Axe AX' oder A$\mathfrak{X}'$. Alle diese Schnittcurven, welche durch Ebenen, wie

$$x' = \xi' \quad \text{oder} \quad u' = \eta' \quad \text{und} \quad x = \xi \quad \text{oder} \quad u = \eta$$

erzeugt werden, sind lauter gleichgestaltete Parabeln, von denen die durch die Gleichung (64. b.) dargestellte Fläche, die man **Paraboloid** nennt, ihren Namen erhalten hat. Dieses Paraboloid wird ein **elliptisches** oder ein **hyperbolisches** genannt, je nachdem die zuerst betrachteten hier mit XAX' oder $\mathfrak{X}A\mathfrak{X}'$ parallelen Schnitte Ellipsen oder Hyperbeln sind. Das Kennzeichen, ob eine ursprünglich in schiefen Coordinaten gegebene Gleichung ein Paraboloid darstelle oder nicht, ist das in der Gleichung (60. a.) oder (60. b.) enthaltene. Ist nämlich diese Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben, so enthält sie ein Paraboloid in sich, so oft

(68. a.) $$\mathfrak{L} = 0$$

ist; ist aber die Gleichung ursprünglich in senkrechten Coordinaten gegeben, so enthält sie ein Paraboloid in sich, so oft

(68. b.) $$\Delta = 0$$

ist.

Ob das Paraboloid ein elliptisches oder ein hyperbolisches sein werde, hängt lediglich davon ab, ob die Coeffizienten der zwei rückständigen Glieder des Theils der zweiten Dimension in den Gleichungen von den in (55. a.) enthaltenen Formen einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen erhalten; denn da die weitern Veränderungen, welche wir an solchen Gleichungen in der Nr. 207. vorgenommen haben, um zu Gleichungen von einer der in (64. a. und b.) aufgestellten Formen zu gelangen, diese Coeffizienten stets lassen, wie sie zuvor waren, so stellen α_0 und α'_0, so wie δ_0 und δ'_0 in den letztern Gleichungen dasselbe vor, was die gleichen Zeichen in jenen frühern Gleichungen bedeuteten, und wir haben hier das Paraboloid ein elliptisches oder hyperbolisches genannt, je nachdem α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da nun in jenen frühern Gleichungen der zu x''^2 oder u''^2 gehörige Coeffizient α''_0 oder δ''_0 stets von Null verschieden ist, so ist das Paraboloid ein elliptisches oder ein hyperbolisches, je nachdem der eine bei x^2 und x'^2 oder bei u^2 und u'^2 noch übrig bleibende Coeffizient mit dem α''_0 oder δ''_0 einerlei oder entgegengesetztes Vorzeichen hat; es ist aber bei dem Paraboloid, wo man $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0$ hat, dieser Coeffizient, den in Nr. 205.

gegebenen Auseinandersetzungen gemäss, wenn die ursprüngliche Gleichung in schiefen Coordinaten gegeben ist, entweder

$$A^2 \Delta^2 \frac{\varkappa}{\alpha''} \quad \text{oder} \quad A_1^2 \Delta^2 \frac{\varkappa}{\alpha''},$$

und nimmt also in jedem Falle mit dem α'' einerlei oder entgegengesetztes Vorzeichen an, je nachdem das Product aus ihm und α'', nämlich $A^2 \Delta^2 \varkappa$ oder $A_1^2 \Delta^2 \varkappa$, positiv oder negativ ist. Das an reellen Coordinatensystemen aufgefasste Paraboloid ist mithin ein elliptisches oder hyperbolisches, je nachdem

$$\varkappa > 0 \quad \text{oder} \quad \varkappa < 0 \qquad \textbf{(69. a.)}$$

ist. Da jene frühern Gleichungen unter der Voraussetzung erhalten worden sind, dass α'' oder δ'' nicht null sei, so ist die Bedingung (69. a.) noch von dieser Voraussetzung eingeengt; allein man überzeugt sich leicht, dass diese Beschränkung eine blos scheinbare ist. Denn erstlich springt in die Augen, dass $\varkappa \lesseqgtr 0$ in Folge der Bedingung $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0$ auch $\varkappa' \lesseqgtr 0$ nach sich zieht, so wie umgekehrt $\varkappa' \lesseqgtr 0$ auch $\varkappa \lesseqgtr 0$ zur Folge hat; man kann also in dem Kennzeichen (69. a.) $\varkappa'$ an die Stelle von $\varkappa$ setzen. Wäre nun auch $\alpha'' = 0$, so könnte doch beim Paraboloid, wie wir gesehen haben, nicht zugleich auch $\alpha' = 0$ und $\alpha = 0$ sein, und dann wäre man berechtigt, in dem Kennzeichen (69. a.) an die Stelle von $\varkappa$ entweder $\varkappa$ und $\varkappa''$ oder $\varkappa'$ und $\varkappa''$ zu setzen, wodurch es aber in keinem Falle eine andere Veränderung erlitte, als die aus einer an den Accenten vorgenommenen Vertauschung der dritten oder zweiten Art hervorgeht. Es ist folglich das specifische Kennzeichen für das elliptische Paraboloid jedes der drei folgenden:

$$\varkappa > 0, \quad \varkappa' > 0, \quad \varkappa'' > 0, \qquad \textbf{(69. b.)}$$

so wie für das hyperbolische Paraboloid jedes der drei folgenden:

$$\varkappa < 0, \quad \varkappa' < 0, \quad \varkappa'' < 0. \qquad \textbf{(69. c.)}$$

Ganz auf die gleiche Weise überzeugt man sich da, wo die ursprüngliche Gleichung in senkrechten Coordinaten gegeben ist, dass das Paraboloid ein elliptisches ist, wenn eines der drei Kennzeichen

$$\sigma > 0, \quad \sigma' > 0, \quad \sigma'' > 0 \qquad \textbf{(69. d.)}$$

stattfindet; hingegen ein hyperbolisches bei jedem einzelnen der drei Kennzeichen

$$\sigma < 0, \quad \sigma' < 0, \quad \sigma'' < 0. \qquad \textbf{(69. e.)}$$

Die in dieser Nummer den Paraboloiden vindicirten Merkmale entsprechen wieder einem bestimmten Baue des Theils der zweiten Dimension in der ursprünglich gegebenen Gleichung. Die Bedingung $\mathfrak{L} = 0$ oder $\Delta = 0$ sagt nämlich nichts anders aus, als dass sich der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung auf die Form

$$(\mathrm{m\,x + m'x' + m''x''})^2 + (\mathrm{n\,x + n'x'})^2$$

bringen lassen muss, wenn die Gleichung in schiefen Coordinaten vorliegt, und auf die Form

$$(\mathrm{m\,u + m'u' + m''u''})^2 + (\mathrm{n\,u + n'u'})^2,$$

wenn die Gleichung in senkrechten Coordinaten vorliegt, wobei m, m′, m″ und n, n′ jederzeit als reelle Grössen angesehen werden können, wenn man vor jedes dieser Quadrate eben sowohl das Vorzeichen — wie das + zu setzen gestattet. Schafft man nämlich aus den vorstehenden x, x′, x″ enthaltenden Quadraten die Klammern weg, und setzt man die zu den Producten und

Quadraten der Coordinaten gehörigen Coeffizienten denen gleich, welche in der ersten Gleichung (45. b.) vorkommen, so wird man auf die folgenden Relationen hingeführt:

$$m^2 + n^2 = \alpha\,,\quad m'^2 + n'^2 = \alpha'\,,\quad m''^2 = \alpha''\,,\quad m\,m' + n\,n' = \beta''\,,\quad m\,m'' = \beta'\,,\quad m'm'' = \beta\,,$$

und im Falle die zweite Gleichung (45. b.) gegeben wäre, würden die obigen u, u', u'' enthaltenden Quadrate durch Vergleichung mit ihr dieselben Relationen geben, nur dass die Grundzeichen α und β durch die δ und ε ersetzt würden, wesshalb wir unsere Behauptung blos an den einen Formen zu erweisen brauchen. Aus der dritten und den zwei letzten dieser Relationen findet man:

$$m'' = \sqrt{\alpha''}\,,\quad m' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha''}}\,,\quad m = \frac{\beta'}{\sqrt{\alpha''}}\,,$$

und mittelst dieser Werthe liefern die zwei ersten:

$$n = \frac{\sqrt{\alpha\alpha'' - \beta'^2}}{\sqrt{\alpha''}} \quad \text{und} \quad n' = \frac{\sqrt{\alpha'\alpha'' - \beta^2}}{\sqrt{\alpha''}}\,,$$

während die vierte jener Relationen in die Bedingungsgleichung

$$\beta'' = \frac{\beta\beta'}{\alpha''} + \frac{1}{\alpha''}\sqrt{(\alpha'\alpha'' - \beta^2)(\alpha\alpha'' - \beta'^2)} \quad \text{oder} \quad \beta''\alpha'' - \beta\beta' = \sqrt{(\alpha'\alpha'' - \beta^2)(\alpha\alpha'' - \beta'^2)}$$

übergeht, wodurch die zwischen den Coeffizienten der gegebenen Gleichung erforderliche Relation ausgesprochen wird, wenn die angezeigte Umformung ihres Theils der zweiten Dimension möglich sein soll, und die, nachdem man sie quadrirt hat, in der That in die Bedingung (68. a), nämlich $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0$ oder $\mathfrak{L} = 0$, übergeht. Die vorstehenden Gleichungen zeigen, dass m, m', m'' eine imaginäre Form annehmen, wenn α'' negativ sein sollte, zugleich aber sieht man ein, dass diese Grössen selbst in diesem Falle noch reell werden, wenn man dem Quadrate, worin sie vorkommen, das Vorzeichen — giebt. Eben so nehmen die Grössen n, n' eine imaginäre Form an, wenn $\alpha\alpha'' - \beta'^2$ oder $\alpha'\alpha'' - \beta^2$ und α'' Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen sind, dem man jedoch immer dadurch entgehen kann, dass man dem Quadrate, worin sie vorkommen, das Vorzeichen — giebt, oder, was dasselbe ist, $n\sqrt{-1}$ und $n'\sqrt{-1}$ an die Stelle von n und n' setzt; denn man überzeugt sich bald, dass diese beiden Grössen nur gleichzeitig entweder reell oder imaginär sein können, weil sich aus den oben sie darstellenden Gleichungen

$$n\,n' = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha'' - \beta'^2)(\alpha'\alpha'' - \beta^2)}}{\alpha''}$$

ergiebt, und diess zufolge der zuletzt gegebenen Bedingungsgleichung $\beta''\alpha'' - \beta\beta' = \sqrt{(\alpha'\alpha'' - \beta^2)(\alpha\alpha'' - \beta'^2)}$

$$n\,n' = \frac{\beta''\alpha'' - \beta\beta'}{\alpha''}$$

giebt, also das Product n n' stets reell werden muss. Es ist somit erwiesen, dass **Paraboloide den Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung immer als algebraische Summe von zwei Quadraten, deren Grundzahlen lauter reelle Be-**

standtheile in sich aufnehmen, zu schreiben gestatten *). In dem besondern Falle, wo die Bedingung des Paraboloids $\varkappa\varkappa' - \lambda''^2 = 0$ sich in die drei $\varkappa = 0$, $\varkappa' = 0$, $\lambda'' = 0$ auflöst, welcher Fall in den Gleichungen (58. c.) ausgesprochen ist, hat man

$$\alpha' = \frac{\beta^2}{\alpha''}, \quad \alpha = \frac{\beta'^2}{\alpha''}, \quad \beta'' = \frac{\beta\beta'}{\alpha''}$$

und durch diese Werthe von α', α, β'' lässt sich der Theil der zweiten Dimension in der ersten Gleichung (45. b.) auf die Form

$$\left(\frac{\alpha'' x'' + \beta x' + \beta' x}{\sqrt{\alpha''}}\right)^2$$

bringen. Hieraus folgt, dass sich in diesem besondern Falle der Theil der zweiten Dimension in der gegebenen Gleichung als ein einziges additives oder subtractives Quadrat mit lauter reellen Bestandtheilen anschreiben lässt; dann aber ist in der gegebenen Gleichung kein Paraboloid mehr, sondern eine Cylinderfläche enthalten, deren Leitcurve eine Parabel ist.

Wir übergehen hier, wie schon bei den Hyperboloiden geschehen ist, die Unterscheidung der zwei Arten solcher Flächen von einander, da diese oben schon auf anderm Wege geschehen ist, und zudem in den gegenwärtigen Formen sich gleichsam schon von selbst ergiebt.

213) Nachdem wir erkannt haben, dass sich jede Gleichung von einer der in (43. a. oder b.) angegebenen Formen stets entweder auf eine der in (64. a.) oder auf eine der in (64. b.) stehenden Formen bringen lässt, und nachdem wir die Kennzeichen kennen gelernt haben, an denen sich die Gattung und Art der in diesen Formen enthaltenen krummen Flächen zum Voraus schon aus den zuerst gegebenen allgemeinsten Gleichungen erkennen lässt, wollen wir jetzt denselben Gegenstand in seinem ganzen Umfange zur Sprache bringen. Da nämlich bei den bisherigen Ueberführungen nicht nur eine der Axen vom ursprünglichen Coordinatensystem fast immer in das neue System mit herüber genommen werden konnte, und noch überdiess in den Endresultaten eine auf die Lage der neuen Axen sich beziehende Grösse unbestimmt blieb, die innerhalb gewisser Grenzen ganz nach Gefallen gewählt werden konnte, so leuchtet ein, dass es unendlich viele Coordinatensysteme geben werde, an welchen eine Gleichung von den in (64. a.) oder (64. b.) enthaltenen Formen aufersteht; daher ist unser Zweck jetzt der, den Zusammenhang dieser unendlich vielen Coordinatensysteme unter einander zur Anschauung zu bringen. Bei den nun folgenden Betrachtungen setzen wir voraus, dass für die in Untersuchung gegebene Fläche zweiter Ordnung bereits eine Gleichung von den in (64. a.) oder (64. b.) angegebenen Formen aufgesucht worden sei, und wollen erfahren, an welchen andern Coordinatensystemen diese Fläche wieder eine Gleichung von einer dieser Formen annehmen könne. Diese Untersuchung spaltet sich von selber in zwei Theile, deren einer von den in (64. a.) und deren anderer von den in (64. b.) enthaltenen Gleichungen ausgeht.

I) Hat fürs Erste die Gleichung, von welcher ausgegangen wird, die erste in (64. a.) enthaltene Form, und hat man zur Absicht die von ihr dargestellte Fläche an einem völlig unbestimmt bleibenden Coordinatensystem durch eine Gleichung mit schiefen Coordinaten wieder

*) Euler spricht dieses Kennzeichen (a. a. O. §. 112.) so aus, dass er sagt: Der Theil der zweiten Dimension lasse sich beim Paraboloid in zwei Factoren zerlegen, die entweder reell oder imaginär werden können.

zu geben, so muss man in die gegebene Gleichung für x, x′, x″ deren durch die allgemeinen Gleichungen (41. a.) gegebene Werthe einsetzen, wodurch die vordere Gleichung (64. a.) sich verwandelt in:

$$(\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2 + \alpha''_0 A''^2) y^2 + (\alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2 + \alpha''_0 A_1''^2) y'^2 + (\alpha_0 A_2^2 + \alpha'_0 A_2'^2 + \alpha''_0 A_2''^2) y''^2$$
$$+ 2(\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1 + \alpha''_0 A'' A''_1) y y' + 2(\alpha_0 A A_2 + \alpha'_0 A' A'_2 + \alpha''_0 A'' A''_2) y y''$$
$$+ 2(\alpha_0 A_1 A_2 + \alpha'_0 A'_1 A'_2 + \alpha''_0 A''_1 A''_2) y' y'' = (\mu_0);$$

will man daher, dass in dieser Gleichung die Glieder nicht zum Vorschein kommen, welche das Product von zweien der drei Coordinaten zum Factor haben, so muss man die neuen Coordinatenaxen dahin beschränken, dass in Bezug auf sie gleichzeitig

(70. a.) $\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1 + \alpha''_0 A'' A''_1 = 0, \quad \alpha_0 A A_2 + \alpha'_0 A' A'_2 + \alpha''_0 A'' A''_2 = 0, \quad \alpha_0 A_1 A_2 + \alpha'_0 A'_1 A'_2 + \alpha''_0 A''_1 A''_2 = 0$

sei, wodurch dann die vorstehende Gleichung der Fläche, wenn man

(70. b.) $\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2 + \alpha''_0 A''^2 = (\alpha_0), \quad \alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2 + \alpha''_0 A_1''^2 = (\alpha'_0), \quad \alpha_0 A_2^2 + \alpha'_0 A_2'^2 + \alpha''_0 A_2''^2 = (\alpha''_0)$

setzt, wird:

(70. c.) $$(\alpha_0) y^2 + (\alpha'_0) y'^2 + (\alpha''_0) y''^2 = (\mu_0),$$

und so die verlangte Form erhalten hat. In dieser Gleichung behält (μ_0) denselben Werth, den das constante Glied in der Gleichung hatte, aus welcher diese abgeleitet worden ist.

II) Hat zum Andern die Gleichung, von welcher ausgegangen wird, zwar wieder die erste in (64. a.) angegebene Form, hat man aber jetzt die Absicht, an dem neu einzuführenden Coordinatensysteme eine Gleichung mit senkrechten Coordinaten zu erhalten, so muss man in jene Gleichung für x, x′, x″ deren durch die allgemeinen Gleichungen (41. e.) gegebene Werthe setzen, wodurch die vordere Gleichung (64. a.) sich verwandelt in:

$$(\alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A')^2 + \alpha''_0 (A'')^2) \frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} + (\alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2 + \alpha''_0 (A''_1)^2) \frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + (\alpha_0 (A_2)^2 + \alpha'_0 (A'_2)^2 + \alpha''_0 (A''_2)^2) \frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}$$
$$+ 2(\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha'_0 (A')(A'_1) + \alpha''_0 (A'')(A''_1)) \frac{v\, v'}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1} + 2(\alpha_0 (A)(A_2) + \alpha'_0 (A')(A'_2) + \alpha''_0 (A'')(A''_2)) \frac{v\, v''}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''_2}$$
$$+ 2(\alpha_0 (A_1)(A_2) + \alpha'_0 (A'_1)(A'_2) + \alpha''_0 (A''_1)(A''_2)) \frac{v'\, v''}{\mathfrak{D}'_1 \mathfrak{D}''_2} = (\mu_0);$$

will man daher, dass in dieser Gleichung die Glieder nicht zum Vorschein kommen, welche das Product von zwei der drei Coordinaten zum Factor haben, so muss man die neuen Coordinatenaxen dahin beschränken, dass in Bezug auf sie gleichzeitig

(71. a.) $$\begin{cases} \alpha_0 (A)(A_1) + \alpha'_0 (A')(A'_1) + \alpha''_0 (A'')(A''_1) = 0, \quad \alpha_0 (A)(A_2) + \alpha'_0 (A')(A'_2) + \alpha''_0 (A'')(A''_2) = 0, \\ \alpha_0 (A_1)(A_2) + \alpha'_0 (A'_1)(A'_2) + \alpha''_0 (A''_1)(A''_2) = 0 \end{cases}$$

sei, wodurch dann die vorstehende Gleichung der in Betrachtung genommenen Fläche, wenn man

(71. b.) $$\begin{cases} \alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A')^2 + \alpha''_0 (A'')^2 = (\delta_0)\mathfrak{D}^2, \quad \alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2 + \alpha''_0 (A''_1)^2 = (\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2, \\ \alpha_0 (A_2)^2 + \alpha'_0 (A'_2)^2 + \alpha''_0 (A''_2)^2 = (\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2 \end{cases}$$

setzt, wird:

(71. c.) $$(\delta_0) v^2 + (\delta'_0) v'^2 + (\delta''_0) v''^2 = (\mu_0),$$

und so die verlangte Form erhalten hat. In dieser Gleichung behält wieder (μ_0) denselben Werth, den das constante Glied in der Gleichung hatte, aus welcher diese abgeleitet worden ist.

III) Hat zum Dritten die Gleichung, von welcher ausgegangen wird, die zweite der in (64. a.) aufgestellten Formen, und hat man zur Absicht, an irgend einem neuen Coordinatensysteme eine Gleichung der Fläche mit schiefen Coordinaten zu erhalten, so muss man in jene Gleichung für u, u′, u″ deren in den allgemeinen Gleichungen (41. c.) ausgesprochene Werthe einsetzen, wodurch die hintere Gleichung (64. a.) sich verwandelt in:

$$(\delta_0 C^2 + \delta'_0 C'^2 + \delta''_0 C''^2)\, y^2 + (\delta_0 C_1^2 + \delta'_0 C_1'^2 + \delta''_0 C_1''^2)\, y'^2 + (\delta_0 C_2^2 + \delta'_0 C_2'^2 + \delta''_0 C_2''^2)\, y''^2$$
$$+ 2(\delta_0 C C_1 + \delta'_0 C' C'_1 + \delta''_0 C'' C''_1)\, y y' + 2(\delta_0 C C_2 + \delta'_0 C' C'_2 + \delta''_0 C'' C''_2)\, y y''$$
$$+ 2(\delta_0 C_1 C_2 + \delta'_0 C'_1 C'_2 + \delta''_0 C''_1 C''_2)\, y' y'' = (\nu_0);$$

will man daher, dass in dieser Gleichung die Glieder nicht zum Vorschein kommen, welche das Product von zwei der drei Coordinaten zum Factor haben, so muss man die neuen Coordinatenaxen dahin beschränken, dass in Bezug auf sie gleichzeitig

$$\delta_0 C C_1 + \delta'_0 C' C'_1 + \delta''_0 C'' C''_1 = 0,\ \delta_0 C C_2 + \delta'_0 C' C'_2 + \delta''_0 C'' C''_2 = 0,\ \delta_0 C_1 C_2 + \delta'_0 C'_1 C'_2 + \delta''_0 C''_1 C''_2 = 0 \quad \textbf{(72. a.)}$$

sei, wodurch dann die vorstehende Gleichung der in Betrachtung gezogenen Fläche, wenn man

$$\delta_0 C^2 + \delta'_0 C'^2 + \delta''_0 C''^2 = (\alpha_0),\quad \delta_0 C_1^2 + \delta'_0 C_1'^2 + \delta''_0 C_1''^2 = (\alpha'_0),\quad \delta_0 C_2^2 + \delta'_0 C_2'^2 + \delta''_0 C_2''^2 = (\alpha''_0) \quad \textbf{(72. b.)}$$

setzt, wird:

$$(\alpha_0)\, y^2 + (\alpha'_0)\, y'^2 + (\alpha''_0)\, y''^2 = (\nu_0),$$

und so die verlangte Form erhalten hat. In dieser Gleichung behält (ν_0) unverändert denselben Werth, den das constante Glied in der Gleichung hatte, aus welcher diese hergeleitet worden ist.

IV) Hat zum Vierten die Gleichung, von welcher ausgegangen wird, zwar wieder die zweite in (64. a.) auftretende Form, hat man aber jetzt zur Absicht, an irgend einem neuen Coordinatensysteme eine Gleichung der Fläche mit senkrechten Coordinaten zu erhalten, so muss man in jene Gleichung für u, u′, u″ deren in den allgemeinen Gleichungen (41. f.) angegebene Werthe einsetzen, wodurch sich die hintere Gleichung (64. a.) verwandelt in:

$$(\delta_0(\Gamma^2) + \delta'_0(\Gamma'^2) + \delta''_0(\Gamma''^2))\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} + (\delta_0(\Gamma_1)^2 + \delta'_0(\Gamma'_1)^2 + \delta''_0(\Gamma''_1)^2)\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + (\delta_0(\Gamma_2)^2 + \delta'_0(\Gamma_2'^2)^2 + \delta''_0(\Gamma''_2)^2)\frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}$$
$$+ 2(\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1) + \delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1) + \delta''_0(\Gamma'')(\Gamma''_1))\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1} + 2(\delta_0(\Gamma)(\Gamma_2) + \delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_2) + \delta''_0(\Gamma'')(\Gamma''_2))\frac{v\,v''}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}''_2}$$
$$+ 2(\delta_0(\Gamma_1)(\Gamma_2) + \delta'_0(\Gamma'_1)(\Gamma'_2) + \delta''_0(\Gamma''_1)(\Gamma''_2))\frac{v'\,v''}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2} = (\nu_0);$$

will man daher, dass in dieser Gleichung die Glieder nicht zum Vorschein kommen, welche das Product von zwei der drei Coordinaten zum Factor haben, so muss man die neuen Coordinatenaxen dahin beschränken, dass in Bezug auf sie gleichzeitig

$$\left.\begin{matrix}\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1) + \delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1) + \delta''_0(\Gamma'')(\Gamma''_1) = 0,\quad \delta_0(\Gamma)(\Gamma_2) + \delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_2) + \delta''_0(\Gamma'')(\Gamma''_2) = 0, \\ \delta_0(\Gamma_1)(\Gamma_2) + \delta'_0(\Gamma'_1)(\Gamma'_2) + \delta''_0(\Gamma''_1)(\Gamma''_2) = 0\end{matrix}\right\} \quad \textbf{(73. a.)}$$

sei, wodurch die vorstehende Gleichung der in Betrachtung gezogenen Fläche, wenn man

(73. b.) $$\dots \left\{ \begin{array}{l} \delta_0 (\Gamma)^2 + \delta_0' (\Gamma')^2 + \delta_0'' (\Gamma'')^2 = (\delta_0)\,\mathfrak{D}^2, \quad \delta_0 (\Gamma_1)^2 + \delta_0' (\Gamma_1')^2 + \delta_0'' (\Gamma_1'')^2 = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2, \\ \delta_0 (\Gamma_2)^2 + \delta_0' (\Gamma_2')^2 + \delta_0'' (\Gamma_2'')^2 = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2 \end{array} \right.$$

setzt, wird:

(73. c.) $$(\delta_0)\,\mathrm{v}^2 + (\delta_0')\,\mathrm{v}'^2 + (\delta_0'')\,\mathrm{v}''^2 = (\nu_0),$$

und so die verlangte Form erhalten hat. In dieser Gleichung behält wieder (ν_0) denselben Werth, den das constante Glied in der Gleichung hatte, aus welcher diese hergeleitet worden ist.

Aus den in dieser Nummer aufgefundenen Formen lassen sich die nachstehenden Schlüsse ziehen: Erstlich gehen die Gleichungen (72. a. und b.) aus denen (70. a. und b.) hervor, wenn man das Grundzeichen α_0 mit dem δ_0 vertauscht und statt der schiefen Projectionszahlen, deren Grundzeichen A ist, die senkrechten, deren Grundzeichen C ist, setzt; man erhält daher die auf schiefe Coordinaten sich beziehenden Gleichungen am neuen Systeme aus der gegebenen Gleichung auf die gleiche Weise, diese letztere mag schiefe oder senkrechte Coordinaten in sich enthalten, nur dass im letztern Falle die senkrechten Projectionszahlen der neuen Axen an den ursprünglichen zu nehmen sind, wo im erstern Falle die schiefen stehen, und umgekehrt; eben so gehen aber auch die Gleichungen (73. a. und b.) aus denen (71. a. und b.) hervor. Zweitens gehen nicht nur die Gleichungen (71. a. und b.) aus denen (70. a. und b.), sondern eben so auch die (73. a. und b.) aus denen (72. a. und b.) hervor, wenn man sich an die Stelle der Grundaxen im neuen Systeme dessen entsprechende Polaraxen gesetzt denkt und statt (α_0), (α_0'), (α_0'') schreibt $(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2$, $(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2$, $(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2$; es stehen mithin die Gleichungen mit schiefen und mit senkrechten Coordinaten in der gleichen Beziehung zu einander, wenn beide aus derselben Gleichung mit schiefen oder mit senkrechten Coordinaten hervorgegangen sind, nur dass im erstern Falle schiefe Projectionszahlen auftreten, wo im letztern Falle senkrechte stehen. Drittens zeigt ein auf die vorstehenden Gleichungen geworfener vergleichender Blick, dass jedes schon gefundene neue System, an welchem die ursprüngliche Gleichung eine der Formen (70. c.) oder (71. c.) oder auch eine der Formen (72. c.) oder (73. c.) annimmt, zugleich auch eines von jenen neuen Systemen an die Hand giebt, an welchem die ursprünglich gegebene Gleichung die zweite jener Formen annimmt; man hat nämlich zu diesem Ende nichts weiter zu thun, als in dem schon gefundenen neuen System die Grund- und Polaraxen mit einander zu vertauschen. In der That ist man z. B. zu einem neuen Coordinatensysteme gelangt, welches den Bedingungen (70. a.) genügt und darum eine Gleichung von der Form (70. c.) liefert, und macht man seine Polaraxen zu Grundaxen, womit dann nothwendig zugleich auch dessen Grundaxen in Polaraxen sich verwandeln, so gehen die durch das Grundzeichen A angedeuteten Projectionszahlen in die durch das Grundzeichen (A) angedeuteten über; es finden daher an dem so abgeänderten Systeme die Bedingungen (71. a.) statt, wesshalb an ihm eine Gleichung von der Form (71. c.) sich bilden muss. Ganz auf dieselbe Weise lässt sich zeigen, dass durch das gleiche Mittel aus einer Gleichung von der Form (71. c.) eine von der Form (70. c.), so wie eine der Formen (72. c.) und (73. c.) aus der andern abgeleitet werden kann. Die vorstehend ausgesprochenen Analogien erhalten dadurch einen Zuwachs an Bedeutung, dass sie zeigen, wie die betrachteten Gleichungsformen aus einander durch eine ganz einfache Substitution abgeleitet werden können. Ausserdem lässt sich aus den Bedingungen (70. a.), (71. a.), (72. a.), (73. a.) noch leicht erkennen, dass die Ebene, welche durch zwei von drei conjugirten Grund- oder Polardurchmessern hindurch geht, der Berührungsebene der Mittelpunctsfläche an der Stelle parallel läuft,

an welcher der dritte conjugirte Durchmesser diese Fläche durchschneidet. Man pflegt von der hier erwähnten Eigenthümlichkeit der Diametralebenen am rechtwinkligen Systeme einen häufigen Gebrauch zu machen, was jedoch von uns hier nicht geschehen ist, um die Eigenthümlichkeit der neuen Formeln mehr an die Spitze stellen zu können.

Man kann die mehrerlei Formen, welche in dieser Nummer zur Sprache gekommen sind, auf folgende Art in eine einzige zusammenziehen. Stellen nämlich (y), (y′), (y″) die schiefen Coordinaten an den zum neuen System gehörigen Polaraxen $A\mathfrak{Y}$, $A\mathfrak{Y}'$, $A\mathfrak{Y}''$ des Punctes vor, dessen senkrechte Coordinaten an den neuen Grundaxen v, v′, v″ sind, so hat man nach Anleitung der im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichungen (57. b.), wenn man sie auf dieses neue System in Anwendung bringt:

$$(\mathrm{y})=\frac{\mathrm{v}}{\mathfrak{D}},\quad (\mathrm{y}')=\frac{\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}_1'},\quad (\mathrm{y}'')=\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}_2''};$$

führt man aber diese neuen Coordinaten an die Stelle derer v, v′, v″ ein, so kann man die Gleichungen (71. c.) und (73. c.) so schreiben:

$$(\alpha)(\mathrm{y})^2+(\alpha')(\mathrm{y}')^2+(\alpha'')(\mathrm{y}'')^2=(\mu_0) \quad \text{und} \quad (\delta)(\mathrm{y})^2+(\delta')(\mathrm{y}')^2+(\delta'')(\mathrm{y}'')^2=(\nu_0),$$

wenn man bei ersterer die Coefficienten (α), (α'), (α'') den Bedingungen (71. b.) gemäss so bestimmt, dass

$$\alpha_0(A)^2+\alpha_0'(A')^2+\alpha_0''(A'')^2=(\alpha),\quad \alpha_0(A_1)^2+\alpha_0'(A_1')^2+\alpha_0''(A_1'')^2=(\alpha'),$$
$$\alpha_0(A_2)^2+\alpha_0'(A_2')^2+\alpha_0''(A_2'')^2=(\alpha'')$$

wird, und bei der andern Gleichung die Coefficienten (δ), (δ'), (δ'') den Bedingungen (73. b.) gemäss so, dass

$$\delta_0(\Gamma)^2+\delta_0'(\Gamma')^2+\delta_0''(\Gamma'')^2=(\delta),\quad \delta_0(\Gamma_1)^2+\delta_0'(\Gamma_1')^2+\delta_0''(\Gamma_1'')^2=(\delta'),$$
$$\delta_0(\Gamma_2)^2+\delta_0'(\Gamma_2')^2+\delta_0''(\Gamma_2'')^2=(\delta'')$$

wird, wodurch die in II) und IV) enthaltenen Formen denen in I) und III) enthaltenen ganz ähnlich werden. Ja da auch im ursprünglichen Coordinatensysteme

$$(\mathrm{x})=\frac{\mathrm{u}}{\mathfrak{C}},\quad (\mathrm{x}')=\frac{\mathrm{u}'}{\mathfrak{C}_1'},\quad (\mathrm{x}'')=\frac{\mathrm{u}''}{\mathfrak{C}_2''}$$

ist, wenn (x), (x′), (x″) die schiefen Coordinaten an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ des Punctes bezeichnen, der an den Grundaxen AX, AX′, AX″ zu senkrechten Coordinaten die u, u′, u″ hat, so kann man sogar die zweite Gleichung (64. a.) so schreiben:

$$\delta_0\,\mathfrak{C}^2(\mathrm{x})^2+\delta_0'\,\mathfrak{C}_1'^2(\mathrm{x}')^2+\delta_0''\,\mathfrak{C}_2''^2(\mathrm{x}'')^2=(\nu_0),$$

wodurch sie am Polarsysteme dieselbe Form wie die erste am Grundsysteme annimmt, somit alle vier Fälle in eine einzige Form zusammengehen.

213*) Wir wollen jetzt in einer Nebenbetrachtung die von (70. a.) bis (70. c.) erhaltenen Gleichungen mehr ins Besondere ziehen, um solche zu erhalten, aus denen sich eine nicht unwichtige Eigenschaft der Mittelpunctsflächen zweiter Ordnung mit grösserer Leichtigkeit wird erkennen lassen.

I) Lässt man da, wo Gleichungen von der Form (70. a. bis c.) für eine Fläche, die durch eine Gleichung von der ersten Form (64. a.) gegeben ist, aufgefunden werden sollen, die neue

Grundaxe A Y'' in der ursprünglich vorhandenen A X'' liegen bleiben, so dass $A_2=0$, $A'_2=0$ und $A''_2=1$ wird, so nehmen die Bedingungen (70. a.) jetzt die nachstehende besondere Gestalt an:

(70. a.*) $$\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1 = 0 \,, \quad A'' = 0 \,, \quad A''_1 = 0 \,;$$

dem zufolge werden die Gleichungen (70. b.) in diesem Falle:

(70. b.*) $$\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2 = (\alpha_0) \,, \quad \alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2 = (\alpha'_0) \,, \quad \alpha''_0 = (\alpha''_0) \,,$$

und nun geht die Gleichung (70. c.) in die besondere über:

(70. c.*) $$(\alpha_0)\, y^2 + (\alpha'_0)\, y'^2 + \alpha''_0\, y''^2 = (\mu_0) \,,$$

in Bezug auf welche die letzte Gleichung (70. b.*) ganz überflüssig geworden ist.

II) Lässt man da, wo Gleichungen von der Form (71. a. bis c.) für eine Fläche, die durch eine Gleichung von der ersten Form (64. a.) gegeben ist, aufgefunden werden sollen, die neue Polaraxe A $\mathfrak{Y}''$ in die ursprünglich vorhandene Grundaxe A X'' fallen, so dass $(A_2)=0$, $(A'_2)=0$ und $(A''_2)=1$ wird, so nehmen die Bedingungen (71. a.) die nachstehende besondere Gestalt an:

(71. a.*) $$\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha'_0 (A')(A'_1) = 0 \,, \quad (A'') = 0 \,, \quad (A''_1) = 0 \,;$$

dem zufolge werden die Gleichungen (71. b.) jetzt:

(71. b.*) $$\alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A')^2 = (\delta_0)\, \mathfrak{D}^2, \quad \alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2 = (\delta'_0)\, \mathfrak{D}_1'^2, \quad \alpha''_0 = (\delta''_0)\, \mathfrak{D}_2''^2,$$

und nun geht die Gleichung (71. c.) über in:

(71. c.*) $$(\delta_0)\, v^2 + (\delta'_0)\, v'^2 + \alpha''_0 \frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2} = (\mu_0) \,,$$

in Bezug auf welche die letzte Gleichung (71. b.*) ganz überflüssig wird.

III) Lässt man da, wo Gleichungen von der Form (72. a. bis c.) für eine Fläche, die durch eine Gleichung von der zweiten Form (64. a.) gegeben ist, aufgefunden werden sollen, die neue Grundaxe A Y'' mit der ursprünglichen Polaraxe A $\mathfrak{X}''$ zusammenfallen, so dass $C_2=0$, $C'_2=0$ und $C''_2=\mathfrak{C}''_2$ wird, so nehmen die Bedingungen (72. a.) die nachstehende besondere Gestalt an:

(72. a.*) $$\delta_0 C C_1 + \delta'_0 C' C'_1 = 0 \,, \quad C'' = 0 \,, \quad C''_1 = 0 \,;$$

dem zufolge werden die Gleichungen (72. b.) jetzt:

(72. b.*) $$\delta_0 C^2 + \delta'_0 C'^2 = (\alpha_0) \,, \quad \delta_0 C_1^2 + \delta'_0 C_1'^2 = (\alpha'_0) \,, \quad \delta''_0\, \mathfrak{C}_2''^2 = (\alpha''_0) \,,$$

und nun geht die Gleichung (72. c.) über in:

(72. c.*) $$(\alpha_0)\, y^2 + (\alpha'_0)\, y'^2 + \delta''_0\, \mathfrak{C}_2''^2\, y''^2 = (\nu_0) \,,$$

in Bezug auf welche die letzte Gleichung (72. b.*) völlig überflüssig geworden ist.

IV) Lässt man da, wo Gleichungen von der Form (73. a. bis c.) für eine Fläche, die durch eine Gleichung von der zweiten Form (64. a.) gegeben ist, aufgesucht werden sollen, die neue Polaraxe A $\mathfrak{Y}''$ in der ursprünglichen A $\mathfrak{X}''$ liegen bleiben, so dass $(\Gamma_2)=0$, $(\Gamma'_2)=0$ und $(\Gamma''_2)=\mathfrak{C}''_2$ wird, so nehmen die Bedingungen (73. a.) unter diesen Umständen die nachstehende besondere Gestalt an:

(73. a.*) $$\delta_0 (\Gamma)(\Gamma_1) + \delta'_0 (\Gamma')(\Gamma'_1) = 0 \,, \quad (\Gamma'') = 0 \,, \quad (\Gamma''_1) = 0 \,;$$

dem zufolge werden die Gleichungen (73. b.) jetzt:

$$\delta_0(\Gamma)^2+\delta'_0(\Gamma')^2=(\delta_0)\mathfrak{D}^2,\quad \delta_0(\Gamma_1)^2+\delta'_0(\Gamma'_1)^2=(\delta'_0)\mathfrak{D}'^2_1,\quad \delta''_0\mathfrak{C}''^2_2=(\delta''_0)\mathfrak{D}''^2_2, \tag{73. b.*}$$

und nun geht die Gleichung (73. c.) über in:

$$(\delta_0)\mathrm{y}^2+(\delta'_0)\mathrm{y}'^2+\delta''_0\frac{\mathfrak{C}''^2_2}{\mathfrak{D}''^2_2}\mathrm{y}''^2=(\nu_0), \tag{73. c.*}$$

in Bezug auf welche die letzte Gleichung (73. b.) vollkommen überflüssig wird.

Was erstens die Gleichungen (70. a.* bis c.*) betrifft, so zeigen die (70. a.*), dass die Axen AY, AY′ aller möglichen neuen Systeme, deren dritte Axe AY″ in die AX″ fällt, mit denen AX, AX′ in einer und derselben Ebene liegen, dass also die Projectionszahlen A, A′ und A_1, A'_1 eben so gut auf die aus den Axen AX, AX′ und AY, AY′ gebildeten ebenen, wie auf die aus den Axen AX, AX′, AX″ und AY, AY′, AY″ gebildeten räumlichen Systeme bezogen werden können. Denkt man sich nun durch einen Punct $\mathfrak{O}$ der Axe AX″ eine Ebene gelegt, welche mit der Coordinatenebene XAX′ parallel läuft und die vorgelegte Mittelpunctsfläche in einer wirklichen Curve schneidet, so wird diese Curve durch die Gleichungen

$$\mathrm{x}''=\mathfrak{x}'' \quad\text{und}\quad \alpha_0\mathrm{x}^2+\alpha'_0\mathrm{x}'^2+\alpha''_0\mathrm{x}''^2=(\mu_0)$$

dargestellt, wenn $\mathfrak{x}''$ den Abstand A$\mathfrak{O}$ bezeichnet, oder auch durch die eine Gleichung

$$\alpha_0\mathrm{x}^2+\alpha'_0\mathrm{x}'^2=(\mu_0)-\alpha''_0\mathfrak{x}''^2,$$

wenn man diese auf ein ebenes System hezieht, dessen Axen $\mathfrak{O}$X und $\mathfrak{O}$X′ durch den Punct $\mathfrak{O}$ gehen und mit denen AX und AX′ parallel laufen; es wird aber, den im vorigen Paragraphen Nr. 186. gegebenen Erörterungen gemäss, diese Gleichung in eine andere von der Form

$$(\alpha_0)\mathrm{y}^2+(\alpha'_0)\mathrm{y}'^2=(\mu_0)-\alpha''_0\mathfrak{x}''^2$$

an jedem andern ebenen Systeme übergeführt, dessen Axen $\mathfrak{O}$Y und $\mathfrak{O}$Y′ mit den vorigen einerlei Spitze und Ebene haben, wenn die Projectionszahlen A, A′ und A_1, A'_1, welche diese neuen Axen $\mathfrak{O}$Y, $\mathfrak{O}$Y′ an denen $\mathfrak{O}$X, $\mathfrak{O}$X′ jenes ersten ebenen Systems liefern, die erste Bedingung (70. a.*) einhalten und die Coeffizienten (α_0), (α'_0) der letztern Gleichung durch die zwei ersten Gleichungen (70. b.*) bestimmt werden. Desswegen und weil die Axen $\mathfrak{O}$X, $\mathfrak{O}$X′ denen AX, AX′ parallel sind, werden zwei mit denen $\mathfrak{O}$Y, $\mathfrak{O}$Y′ parallele Axen AY, AY′ in Verbindung mit der in AX″ liegenden AY″ alle Bedingungen (70. a.*) erfüllen und die Gleichung (70. c.*) liefern, wenn (α_0) und (α'_0) wie zuvor durch die zwei ersten Gleichungen (70. b.*) bestimmt werden. Weil aber den Ergebnissen des vorigen Paragraphen zur Folge die Axen $\mathfrak{O}$Y und $\mathfrak{O}$Y′, welche zu einer Diametralgleichung führen, immer die Lage von zwei conjugirten Durchmessern der Schnittcurve bestimmen, so spricht sich in den vorstehenden Betrachtungen der nachfolgende Satz aus: Man kann aus einem Coordinatensysteme, an dessen Axen AX, AX′, AX″ eine vorgelegte Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung von der ersten in (64. a.) enthaltenen Form dargestellt wird, eine Menge neuer aus den Axen AY, AY′, AY″ zusammengesetzter Coordinatensysteme ableiten, an denen dieselbe Fläche durch eine Gleichung von der Form (70. c.*) dargestellt wird, wenn man die eine Axe AY″ in der AX″ liegen und die zwei andern AY und AY′ den conjugirten Durchmessern irgend eines der Coordinatenebene XAX′ parallel geführten Schnittes der Fläche parallel sein lässt.

Was zweitens die Gleichungen (71. a.* bis c.*) betrifft, so lässt sich die (71. c.*) mit Zuziehung derer (71. b.*) so schreiben:

$$(\alpha_0(A)^2+\alpha'_0(A')^2)\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}+(\alpha_0(A_1)^2+\alpha'_0(A'_1)^2)\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}+\alpha''_0\frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}=(\mu_0),$$

und diese geht, nach Aussage der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (57. b.), wenn (y), (y'), (y'') die schiefen Coordinaten an den Polaraxen A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, A$\mathfrak{Y}''$ von demselben Puncte vorstellen, der an den Grundaxen AY, AY', AY'' die senkrechten Coordinaten v, v', v'' giebt, über in:

$$(\alpha_0(A)^2+\alpha'_0(A')^2)(y)^2+(\alpha_0(A_1)^2+\alpha'_0(A'_1)^2)(y')^2+\alpha''_0(y'')^2=(\mu_0);$$

es verwandeln sich also die Gleichungen (70. a.* bis c.*) in die (71. a.* bis c.*), so wie man bei jenen die neuen Axen AY, AY', AY'' durch deren Polaraxen ersetzt, worin sich der folgende Satz ausspricht: Man kann aus einem durch die Axen AX, AX', AX'' gebildeten Coordinatensysteme, an welchem eine Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung von der ersten Form (64. a.) dargestellt wird, eine Menge neuer aus den Axen AY, AY', AY'' zusammengesetzte Coordinatensysteme ableiten, an denen dieselbe Fläche durch eine Gleichung von der Form (71. c.*) dargestellt wird, wenn man die eine, diesen neuen Axen entsprechende Polaraxe A$\mathfrak{Y}''$ in der einen ursprünglichen Grundaxe AX'' liegen, und die zwei andern neuen Polaraxen A$\mathfrak{Y}$ und A$\mathfrak{Y}'$ irgend zwei conjugirten Durchmessern einer mit der Ebene XAX' parallel geführten Schnittcurve der vorgelegten Mittelpunctsfläche parallel laufen lässt.

Was endlich die Gleichungen (72. a.* bis c.*) und (73. a.* bis c.*) anlangt, so ist es leicht, das hierher Gehörige aus dem zuvor Gesagten abzuleiten. Ist nämlich eine Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung von der zweiten in (64. a.) stehenden Form:

$$\delta_0 u^2+\delta'_0 u'^2+\delta''_0 u''^2=(\nu_0)$$

gegeben, und schreibt man diese so:

$$\delta_0\mathfrak{E}^2\frac{u^2}{\mathfrak{E}^2}+\delta'_0\mathfrak{E}_1'^2\frac{u'^2}{\mathfrak{E}_1'^2}+\delta''_0\mathfrak{E}_2''^2\frac{u''^2}{\mathfrak{E}_2''^2}=(\nu_0),$$

so geht dieselbe, den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (57. b.) zur Folge, wenn (x), (x'), (x'') die schiefen Coordinaten an den Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ von demselben Puncte vorstellen, der an den ihnen entsprechenden Grundaxen AX, AX', AX'', worauf die gegebene Gleichung sich bezieht, die senkrechten Coordinaten u, u', u'' giebt, über in:

$$\delta_0\mathfrak{E}^2(x)^2+\delta'_0\mathfrak{E}_1'^2(x')^2+\delta''_0\mathfrak{E}_2''^2(x'')^2=(\nu_0),$$

und weil diese wie die von der ersten Form (64. a.) wieder in schiefen Coordinaten gegeben ist, nur dass letztere sich jetzt auf die Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ beziehen, so müssen auch die beiden vorigen Sätze bei ihr noch wahr bleiben, wenn man in ihnen an die Stelle der Grundaxen AX, AX', AX'' die Polaraxen A$\mathfrak{X}$, A$\mathfrak{X}'$, A$\mathfrak{X}''$ treten lässt, wodurch man zu den nachstehenden Satz hingeführt wird: Ist eine Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung von der zweiten Form (64. a.) gegeben, so kann man aus dem zu dieser Gleichung gehörigen Coordinatensysteme noch eine Unzahl anderer Coordinatensysteme ableiten, an denen dieselbe Fläche wieder eine Gleichung von der ersten so-

wohl als von der zweiten Form (64. a.) liefert; man hat nur im ersten Falle eine der neuen Grundaxen AY'', im andern Falle eine der neuen Polaraxen A𝔜'' in der einen ursprünglichen Polaraxe A𝔛'' liegen zu lassen, und im ersten Falle die beiden andern neuen Grundaxen AY und AY', im zweiten Falle die beiden andern neuen Polaraxen A𝔜 und A𝔜' irgend zwei conjugirten Durchmessern von einer der Schnittcurven, die man durch eine mit der ursprünglichen Polarcoordinatenebene 𝔛A𝔛' parallele Ebene erhalten kann, parallel zu nehmen.

Mit Hilfe der vorstehenden Sätze kann man in vielen Fällen das Aufsuchen von conjugirten Diametralebenen bei Mittelpunctsflächen zweiter Ordnung auf die Ermittelung von conjugirten Durchmessern bei Mittelpunctscurven zweiter Ordnung zurückführen, und dann den Betrachtungen die gleiche Anschaulichkeit geben, wie den Betrachtungen der ebenen Curven.

214) Die durch die Buchstaben a und b von einander gehaltenen Gleichungen (70 bis 73) der vorigen Nummer, worin sich die Relationen aussprechen, die zwischen den Coeffizienten zweier derselben Fläche zweiter Ordnung angehörigen Diametralgleichungen und den Coordinatensystemen, worauf sich diese Gleichungen beziehen, statt finden müssen, lassen bemerkenswerthe Umgestaltungen zu, wodurch die Behandlung solcher Gleichungen sehr erleichtert wird, und die wir desswegen in dieser Nummer mittheilen werden.

Nehmen wir zunächst die Bedingungen (70. a.) zur Hand, und eliminiren wir aus der ersten und zweiten einmal $\alpha'_0 A'$ und ein andermal $\alpha''_0 A''$, aus der ersten und dritten einmal $\alpha'_0 A'_1$ und ein andermal $\alpha''_0 A''_1$, aus der zweiten und dritten einmal $\alpha'_0 A'_2$ und ein andermal $\alpha''_0 A''_2$, so ergeben sich sechs Gleichungen, die sich in Form von Verhältnissen wie folgt schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 A : \alpha'_0 A' : \alpha''_0 A'' &= A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2 : A_2 A''_1 - A''_2 A_1 : A_1 A'_2 - A'_1 A_2 ,\\
\alpha_0 A_1 : \alpha'_0 A'_1 : \alpha''_0 A''_1 &= A' A''_2 - A'' A'_2 : A_2 A'' - A''_2 A : A A'_2 - A' A_2 ,\\
\alpha_0 A_2 : \alpha'_0 A'_2 : \alpha''_0 A''_2 &= A' A''_1 - A'' A'_1 : A_1 A'' - A''_1 A : A A'_1 - A' A_1 ,
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots \quad (74.\ a.)$$

worin sich ein ganz gleiches Verhalten von je einer neuen Coordinatenaxe zu den zwei andern ausspricht. Aus diesen Gleichungen folgt, dass man

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 A &= \varrho\,(A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2) , & \alpha'_0 A' &= \varrho\,(A_2 A''_1 - A''_2 A_1) , & \alpha''_0 A'' &= \varrho\,(A_1 A'_2 - A'_1 A_2) ,\\
\alpha_0 A_1 &= \varrho_1 (A' A''_2 - A'' A'_2) , & \alpha'_0 A'_1 &= \varrho_1 (A_2 A'' - A''_2 A) , & \alpha''_0 A''_1 &= \varrho_1 (A A'_2 - A' A_2) ,\\
\alpha_0 A_2 &= \varrho_2 (A' A''_1 - A'' A'_1) , & \alpha'_0 A'_2 &= \varrho_2 (A_1 A'' - A''_1 A) , & \alpha''_0 A''_2 &= \varrho_2 (A A'_1 - A' A_1) ,
\end{aligned}\right\} \quad (74.\ b.)$$

setzen kann, wenn man ϱ, ϱ_1, ϱ_2 darin noch völlig unbestimmte Grössen sein lässt; multiplicirt man aber die auf erster Zeile stehenden Gleichungen (74. b.) ihrer Ordnung nach mit A, A', A'', die auf zweiter Zeile stehenden mit A_1, A'_1, A''_1, zuletzt die auf dritter Zeile stehenden mit A_2, A'_2, A''_2, und addirt jedesmal die drei zu einer Zeile gehörigen Gleichungen zu einander, so erhält man mit Zuziehung des im ersten Abschnitte durch die obern Gleichungen (81. b.) eingeführten Zeichens:

$$\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2 + \alpha''_0 A''^2 = \varrho\,[\overset{3}{A}] , \quad \alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2 + \alpha''_0 A_1''^2 = \varrho_1 [\overset{3}{A}] ,$$

$$\alpha_0 A_2^2 + \alpha'_0 A_2'^2 + \alpha''_0 A_2''^2 = \varrho_2 [\overset{3}{A}] , \quad (74.\ c.)$$

und diese, verglichen mit den in (70. b.) festgestellten Gleichungen zeigen, dass

(74. d.) $\varrho[\overset{3}{A}]=(\alpha_0)\,,\quad -\varrho_1[\overset{3}{A}]=(\alpha'_0)\,,\quad \varrho_2[\overset{3}{A}]=(\alpha''_0)$ oder $\varrho=\dfrac{(\alpha_0)}{[\overset{3}{A}]}\,,\quad \varrho_1=-\dfrac{(\alpha'_0)}{[\overset{3}{A}]}\,,\quad \varrho_2=\dfrac{(\alpha''_0)}{[\overset{3}{A}]}$

gesetzt werden muss, wodurch die Gleichungen (74. b.) übergehen in:

(75. a.)

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_0 A\,[\overset{3}{A}]=(\alpha_0)\,(A'_1 A''_2-A''_1 A'_2)\,,\quad \alpha'_0 A'\,[\overset{3}{A}]=(\alpha_0)\,(A_2 A''_1-A''_2 A_1)\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0 A''\,[\overset{3}{A}]=(\alpha_0)\,(A_1 A'_2-A'_1 A_2)\,,\\
&\alpha_0 A_1\,[\overset{3}{A}]=(\alpha'_0)\,(A'' A'_2-A' A''_2)\,,\quad \alpha'_0 A'_1\,[\overset{3}{A}]=(\alpha'_0)\,(A\, A''_2-A'' A_2)\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0 A''_1\,[\overset{3}{A}]=(\alpha'_0)\,(A' A_2-A\, A'_2)\,,\\
&\alpha_0 A_2\,[\overset{3}{A}]=(\alpha''_0)\,(A' A''_1-A'' A'_1)\,,\quad \alpha'_0 A'_2\,[\overset{3}{A}]=(\alpha''_0)\,(A_1 A''-A''_1 A)\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0 A''_2\,[\overset{3}{A}]=(\alpha''_0)\,(A\, A'_1-A' A_1)\ {}^{*)}\,.
\end{aligned}\right.$$

Da sich nun die Gleichungen (71. a. und b.) von denen (70. a. und b.) blos dadurch unterscheiden, dass das Grundzeichen $(\mathcal{A})$ an die Stelle von dem A getreten ist, und dass $(\delta_0)\mathfrak{D}^2$, $(\delta'_0)\mathfrak{D}'^2_1$, $(\delta''_0)\mathfrak{D}''^2_2$ steht, wo zuvor (α_0), (α'_0), (α''_0) stand, so erhält man die ihnen entsprechenden, denen (75. a.) analogen Resultate aus diesen durch die gleiche Substitution, nämlich:

(75. b.)

$$\left\{\begin{aligned}
&\alpha_0(\mathcal{A})[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta_0)\mathfrak{D}^2\,((\mathcal{A}'_1)(\mathcal{A}''_2)-(\mathcal{A}''_1)(\mathcal{A}'_2))\,,\quad \alpha'_0(\mathcal{A}')[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta_0)\mathfrak{D}^2\,((\mathcal{A}_2)(\mathcal{A}''_1)-(\mathcal{A}''_2)(\mathcal{A}_1))\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0(\mathcal{A}'')[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta_0)\mathfrak{D}^2\,((\mathcal{A}_1)(\mathcal{A}'_2)-(\mathcal{A}'_1)(\mathcal{A}_2))\,,\\
&\alpha_0(\mathcal{A}_1)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta'_0)\mathfrak{D}'^2_1\,((\mathcal{A}'')(\mathcal{A}'_2)-(\mathcal{A}')(\mathcal{A}''_2))\,,\quad \alpha'_0(\mathcal{A}'_1)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta'_0)\mathfrak{D}'^2_1\,((\mathcal{A})(\mathcal{A}''_2)-(\mathcal{A}'')(\mathcal{A}_2))\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0(\mathcal{A}''_1)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta'_0)\mathfrak{D}'^2_1\,((\mathcal{A}')(\mathcal{A}_2)-(\mathcal{A})(\mathcal{A}'_2))\,,\\
&\alpha_0(\mathcal{A}_2)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta''_0)\mathfrak{D}''^2_2\,((\mathcal{A}')(\mathcal{A}''_1)-(\mathcal{A}'')(\mathcal{A}'_1))\,,\quad \alpha'_0(\mathcal{A}'_2)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta''_0)\mathfrak{D}''^2_2\,((\mathcal{A}_1)(\mathcal{A}'')-(\mathcal{A}''_1)(\mathcal{A}))\,,\\
&\qquad\qquad \alpha''_0(\mathcal{A}''_2)[(\overset{3}{\mathcal{A}})]=(\delta''_0)\mathfrak{D}''^2_2\,((\mathcal{A})(\mathcal{A}'_1)-(\mathcal{A}')(\mathcal{A}_1))\,.
\end{aligned}\right.$$

Da ferner die Gleichungen (72. a. und b.) sich von denen (70. a. und b.) blos dadurch unterscheiden, dass das Grundzeichen C an die Stelle von dem A getreten ist, und dass δ_0, δ'_0, δ''_0 steht, wo zuvor α_0, α'_0, α''_0 stand, so erhält man die diesen Gleichungen entsprechenden, denen (75. a.) analogen Resultate aus diesen durch die gleiche Substitution; man findet so:

(75. c.)

$$\left\{\begin{aligned}
&\delta_0 C\,[\overset{3}{C}]=(\alpha_0)\,(C'_1 C''_2-C''_1 C'_2)\,,\quad \delta'_0 C'\,[\overset{3}{C}]=(\alpha_0)\,(C_2 C''_1-C''_2 C_1)\,,\\
&\qquad\qquad \delta''_0 C''\,[\overset{3}{C}]=(\alpha_0)\,(C_1 C'_2-C'_1 C_2)\,.\\
&\delta_0 C_1\,[\overset{3}{C}]=(\alpha'_0)\,(C'' C'_2-C' C''_2)\,,\quad \delta'_0 C'_1\,[\overset{3}{C}]=(\alpha'_0)\,(C\, C''_2-C'' C_2)\,,\\
&\qquad\qquad \delta''_0 C''_1\,[\overset{3}{C}]=(\alpha'_0)\,(C' C_2-C\, C'_2)\,,
\end{aligned}\right.$$

*) Diese Gleichungen lassen sich kürzer fassen, wenn man rechts vom Gleichheitszeichen die Projectionszahlen einführt, deren Grundzeichen unserm Uebereinkommen zur Folge B ist, eine Vereinfachung, die wir jedoch hier noch auf der Seite liegen lassen wollen.

$$\delta_0 C_2 [\overset{3}{C}] = (\alpha_0'')(C' C_1'' - C'' C_1') , \quad \delta_0' C_2' [\overset{3}{C}] = (\alpha_0'')(C_1 C'' - C_1'' C) ,$$
$$\delta_0'' C_2'' [\overset{3}{C}] = (\alpha_0'')(C C_1' - C' C_1) .$$

Da endlich die Gleichungen (73. a. und b.) sich von denen (71. a. und b.) blos dadurch unterscheiden, dass das Grundzeichen (Γ) an die Stelle von dem ($\mathcal{A}$) getreten ist, und dass δ_0, δ_0', δ_0'' steht, wo zuvor α_0, α_0', α_0'' stand, so ergeben sich die den jetzigen Gleichungen entsprechenden, denen (75. a.) analogen Resultate aus denen (75. b.) durch die gleiche Substitution, wodurch man findet:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_0 (\Gamma) [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0)\, \mathfrak{D}^2\, ((\Gamma_1')(\Gamma_2'') - (\Gamma_1'')(\Gamma_2')) , \; \delta_0' (\Gamma') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0)\, \mathfrak{D}^2\, ((\Gamma_2)(\Gamma_1'') - (\Gamma_2'')(\Gamma_1)) , \\
\qquad \delta_0'' (\Gamma'') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0)\, \mathfrak{D}^2\, ((\Gamma_1)(\Gamma_2') - (\Gamma_1')(\Gamma_2)) , \\
\delta_0 (\Gamma_1) [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0')\, \mathfrak{D}_1'^2\, ((\Gamma'')(\Gamma_2') - (\Gamma')(\Gamma_2'')) , \; \delta_0' (\Gamma_1') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0')\, \mathfrak{D}_1'^2\, ((\Gamma)(\Gamma_2'') - (\Gamma'')(\Gamma_2)) , \\
\qquad \delta_0'' (\Gamma_1'') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0')\, \mathfrak{D}_1'^2\, ((\Gamma')(\Gamma_2) - (\Gamma)(\Gamma_2')) , \\
\delta_0 (\Gamma_2) [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0'')\, \mathfrak{D}_2''^2\, ((\Gamma')(\Gamma_1'') - (\Gamma'')(\Gamma_1')) , \; \delta_0' (\Gamma_2') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0'')\, \mathfrak{D}_2''^2\, ((\Gamma_1)(\Gamma'') - (\Gamma_1'')(\Gamma)) , \\
\qquad \delta_0'' (\Gamma_2'') [(\overset{3}{\Gamma})] = (\delta_0'')\, \mathfrak{D}_2''^2\, ((\Gamma)(\Gamma_1') - (\Gamma')(\Gamma_1)) .
\end{array}\right\} \quad (75.\ d.)$$

Aus den Gleichungen (75. a. bis d.) nun lassen sich mit grosser Leichtigkeit die umgestalteten entnehmen, worauf im Eingange zu dieser Nummer angespielt worden ist. Multiplicirt man nämlich die drei vordersten Gleichungen (75. a.) ihrer Aufeinanderfolge nach einmal mit $\frac{A'}{(\alpha_0)}, \frac{A_1'}{(\alpha_0')}, \frac{A_2'}{(\alpha_0'')}$ und ein andermal mit $\frac{A''}{(\alpha_0)}, \frac{A_1''}{(\alpha_0')}, \frac{A_2''}{(\alpha_0'')}$ und addirt jedesmal die drei resultirenden Gleichungen, so erhält man zwei neue, und eben so erhält man zwei neue, sowohl wenn man die mittlern Gleichungen (75. a.) einmal mit $\frac{A}{(\alpha_0)}, \frac{A_1}{(\alpha_0')}, \frac{A_2}{(\alpha_0'')}$ und ein andermal mit $\frac{A''}{(\alpha_0)}$, $\frac{A_1''}{(\alpha_0')}, \frac{A_2''}{(\alpha_0'')}$ oder die hintersten einmal mit $\frac{A}{(\alpha_0)}, \frac{A_1}{(\alpha_0')}, \frac{A_2}{(\alpha_0'')}$ und ein andermal mit $\frac{A'}{(\alpha_0)}, \frac{A_1'}{(\alpha_0')}, \frac{A_2'}{(\alpha_0'')}$ multiplicirt und jedesmal die drei resultirenden Gleichungen zu einander addirt. Diese sechs Gleichungen sind jedoch paarweise die gleichen, so dass man eigentlich nur die drei folgenden Gleichungen erhält:

$$\frac{A\,A'}{(\alpha_0)} + \frac{A_1 A_1'}{(\alpha_0')} + \frac{A_2 A_2'}{(\alpha_0'')} = 0 , \quad \frac{A\,A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1 A_1''}{(\alpha_0')} + \frac{A_2 A_2''}{(\alpha_0'')} = 0 , \quad \frac{A'\,A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1' A_1''}{(\alpha_0')} + \frac{A_2' A_2''}{(\alpha_0'')} = 0 . \quad (76.\ a.)$$

Setzt man ferner die aus den vordersten der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (75. a.) entnommenen Werthe von A und A_1 in die zweite und dritte derselben auf dritter Zeile stehenden Gleichungen, so stösst man zuvörderst auf folgende Resultate:

$$\alpha_0 \alpha_0' A_2' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') [A_2' (\frac{A''^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1''^2}{(\alpha_0')}) - A_2'' (\frac{A' A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1' A_1''}{(\alpha_0')})] ,$$
$$\alpha_0 \alpha_0'' A_2'' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') [A_2'' (\frac{A'^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1'^2}{(\alpha_0')}) - A_2' (\frac{A' A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1' A_1''}{(\alpha_0')})] .$$

Auf ähnliche zwei Gleichungen stösst man, wenn man die Werthe von A' und A_1' aus den mittlern der auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (75. a.) in die erste und dritte der auf dritter Zeile stehenden, oder wenn man die Werthe von A'' und A_1'' aus den letzten auf erster und zweiter Zeile stehenden in die zwei ersten Gleichungen der dritten Zeile einsetzt; von den so in Allem sich ergebenden sechs Gleichungen führen aber je zwei immer zu dem gleichen Resultate, wesshalb wir zu den vorigen beiden nur noch die eine gesellen:

$$\alpha_0' \alpha_0'' A_2'' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') [A_2'' (\frac{A^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1^2}{(\alpha_0')}) - A_2 (\frac{A A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1 A_1''}{(\alpha_0')})] .$$

Die letzten drei Gleichungen gehen mit Zuziehung derer (76. a.), zufolge welcher $-(\frac{A' A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1' A_1''}{(\alpha_0')}) = \frac{A_2' A_2''}{(\alpha_0'')}$ und $-(\frac{A A''}{(\alpha_0)} + \frac{A_1 A_1''}{(\alpha_0')}) = \frac{A_2 A_2''}{(\alpha_0'')}$ ist, über in:

$$\alpha_0 \alpha_0' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') (\frac{A''^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1''^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2''^2}{(\alpha_0'')}),$$

$$\alpha_0 \alpha_0'' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') (\frac{A'^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1'^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2'^2}{(\alpha_0'')}),$$

$$\alpha_0' \alpha_0'' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'') (\frac{A^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2^2}{(\alpha_0'')});$$

multiplicirt man diese letztern Gleichungen aber ihrer Aufeinanderfolge nach mit α_0'', α_0', α_0 und addirt sie, so findet man mit Zuziehung der Gleichungen (70. b.), dass

(76. b.) $$\alpha_0 \alpha_0' \alpha_0'' [\overset{3}{A}]^2 = (\alpha_0)(\alpha_0')(\alpha_0'')$$

ist, und mittelst des hieraus für $[\overset{3}{A}]^2$ sich ergebenden Werthes nehmen dieselben Gleichungen die folgende Form an:

(76. c.) $$\frac{1}{\alpha_0''} = \frac{A''^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1''^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2''^2}{(\alpha_0'')}, \quad \frac{1}{\alpha_0'} = \frac{A'^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1'^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2'^2}{(\alpha_0'')}, \quad \frac{1}{\alpha_0} = \frac{A^2}{(\alpha_0)} + \frac{A_1^2}{(\alpha_0')} + \frac{A_2^2}{(\alpha_0'')}$$ *).

Die Gleichungen (76. a. und c.) sind sehr merkwürdige Umformungen derer (70. a. und b.), und ähnliche Umformungen der Gleichungen (71. a. und b.), (72. a. und b.), (73. a. und b.) lassen sich in analoger Weise aus den Gleichungen (75. b.), (75. c.), (75. d.) herholen, die man jedoch noch bequemer aus den so eben erhaltenen durch die vorhin angegebenen Substitutionen unmittelbar erhalten kann. Man mag den einen oder andern Weg einschlagen, so gelangt man in jedem Falle aus den Gleichungen (71. a. und b.) zu den folgenden:

*) Diese Gleichungen lassen sich auch unmittelbar aus denen (75. a.) herleiten, wenn man die vordern mit A, A_1, A_2, die mittlern mit A', A_1', A_2', die hintern mit A'', A_1'', A_2'' multiplicirt und jedesmal die drei Productengleichungen zu einander addirt.

$$\frac{(A)(A')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A_1)(A'_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A_2)(A'_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,,\quad \frac{(A)(A'')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A_1)(A''_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A_2)(A''_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,,$$

$$\frac{(A')(A'')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A'_1)(A''_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A'_2)(A''_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,, \qquad (77.\ a.)$$

$$\alpha_0\,\alpha'_0\,\alpha''_0\,[(\overset{3}{A})]^2=(\delta_0)(\delta'_0)(\delta''_0)\,\mathfrak{D}^2\,\mathfrak{D}_1'^2\,\mathfrak{D}_2''^2\,, \qquad (77.\ b.)$$

$$\frac{1}{\alpha''_0}=\frac{(A'')^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A''_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A''_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,,\quad \frac{1}{\alpha'_0}=\frac{(A')^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A'_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A'_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,,$$

$$\frac{1}{\alpha_0}=\frac{(A)^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(A_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(A_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,. \qquad (77.\ c.)$$

Eben so führen die Gleichungen (72. a. und b.) zu folgenden:

$$\frac{C\,C'}{(\alpha_0)}+\frac{C_1\,C'_1}{(\alpha'_0)}+\frac{C_2\,C'_2}{(\alpha''_0)}=0\,,\quad \frac{C\,C''}{(\alpha_0)}+\frac{C_1\,C''_1}{(\alpha'_0)}+\frac{C_2\,C''_2}{(\alpha''_0)}=0\,,$$

$$\frac{C'\,C''}{(\alpha_0)}+\frac{C_1\,C''_1}{(\alpha'_0)}+\frac{C'_2\,C''_2}{(\alpha''_0)}=0\,, \qquad (78.\ a.)$$

$$\delta_0\,\delta'_0\,\delta''_0\,[\overset{3}{C}]^2=(\alpha_0)(\alpha'_0)(\alpha''_0)\,, \qquad (78.\ b.)$$

$$\frac{1}{\delta''_0}=\frac{C''^2}{(\alpha_0)}+\frac{C_1''^2}{(\alpha'_0)}+\frac{C_2''^2}{(\alpha''_0)}\,,\quad \frac{1}{\delta'_0}=\frac{C'^2}{(\alpha_0)}+\frac{C_1'^2}{(\alpha'_0)}+\frac{C_2'^2}{(\alpha''_0)}\,,$$

$$\frac{1}{\delta_0}=\frac{C^2}{(\alpha_0)}+\frac{C_1^2}{(\alpha'_0)}+\frac{C_2^2}{(\alpha''_0)}\,, \qquad (78.\ c.)$$

und die (73. a. und b.) geben:

$$\frac{(\Gamma)(\Gamma')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma_1)(\Gamma'_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma_2)(\Gamma'_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,,\quad \frac{(\Gamma)(\Gamma'')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma_1)(\Gamma''_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma_2)(\Gamma''_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,,$$

$$\frac{(\Gamma')(\Gamma'')}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma'_1)(\Gamma''_1)}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma'_2)(\Gamma''_2)}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=0\,, \qquad (79.\ a.)$$

$$\delta_0\,\delta'_0\,\delta''_0\,[(\overset{3}{\Gamma})]^2=(\delta_0)(\delta'_0)(\delta''_0)\,\mathfrak{D}^2\,\mathfrak{D}_1'^2\,\mathfrak{D}_2''^2\,, \qquad (79.\ b.)$$

$$\frac{1}{\delta''_0}=\frac{(\Gamma'')^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma''_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma''_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,,\quad \frac{1}{\delta'_0}=\frac{(\Gamma')^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma'_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma'_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,,$$

$$\frac{1}{\delta_0}=\frac{(\Gamma)^2}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{(\Gamma_1)^2}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{(\Gamma_2)^2}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}\,. \qquad (79.\ c.)$$

215) Wir können nun noch mehrere andere wichtige Eigenschaften der zu einer und derselben mit einem Mittelpunct versehenen Fläche zweiter Ordnung gehörigen Diametralgleichungen aus den bisher gelieferten Gleichungen ableiten, wie an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

I) Ein auf die einander entsprechenden Gleichungen (70. b.) und (76. c.) geworfener Blick zeigt unmittelbar, dass, wenn die Coeffizienten der einen von zwei zu derselben Mittel-

punctsfläche zweiter Ordnung gehörigen Gleichungen mit schiefen Coordinaten, die sich beide auf reelle Coordinatensysteme beziehen und einerlei constantes Glied haben, alle drei einerlei Vorzeichen haben, die in der andern Gleichung nothwendig auch einerlei und zwar dasselbe Vorzeichen besitzen müssen, und die Vergleichung der einander entsprechenden Gleichungen (71. b.) und (77. c.), (72. b.) und (78. c.), (73. b.) und (79. c.) zeigt noch überdiess, dass der hier ausgesprochene Satz noch wahr bleibt, auch wenn die eine oder die andere oder auch beide von jenen Gleichungen senkrechte Coordinaten in sich aufgenommen haben.

II) Quadrirt man die Gleichungen (75. a.) und setzt man für $[\overset{3}{A}]^2$ dessen Werth aus (76. b.) ein, so werden sie:

$$\frac{(\alpha_0')(\alpha_0'')}{(\alpha_0)} A^2 = \frac{\alpha_0' \alpha_0''}{\alpha_0} (A_1' A_2'' - A_1'' A_2')^2 , \quad \frac{(\alpha_0')(\alpha_0'')}{(\alpha_0)} A'^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0''}{\alpha_0'} (A_2 A_1'' - A_2'' A_1)^2 ,$$

$$\frac{(\alpha_0')(\alpha_0'')}{(\alpha_0)} A''^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0'}{\alpha_0''} (A_1 A_2' - A_1' A_2)^2 ,$$

$$\frac{(\alpha_0)(\alpha_0'')}{(\alpha_0')} A_1^2 = \frac{\alpha_0' \alpha_0''}{\alpha_0} (A'' A_2' - A' A_2'')^2 , \quad \frac{(\alpha_0)(\alpha_0'')}{(\alpha_0')} A_1'^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0''}{\alpha_0'} (A A_2'' - A'' A_2)^2 ,$$

$$\frac{(\alpha_0)(\alpha_0'')}{(\alpha_0')} A_1''^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0'}{\alpha_0''} (A' A_2 - A A_2')^2 ,$$

$$\frac{(\alpha_0)(\alpha_0')}{(\alpha_0'')} A_2^2 = \frac{\alpha_0' \alpha_0''}{\alpha_0} (A' A_1'' - A'' A_1')^2 , \quad \frac{(\alpha_0)(\alpha_0')}{(\alpha_0'')} A_2'^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0''}{\alpha_0'} (A_1 A'' - A_1'' A)^2 ,$$

$$\frac{(\alpha_0)(\alpha_0')}{(\alpha_0'')} A_2''^2 = \frac{\alpha_0 \alpha_0'}{\alpha_0''} (A A_1' - A' A_1)^2 ,$$

woraus sich sogleich schliessen lässt, dass, wenn die zu derselben Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung gehörigen Diametralgleichungen mit schiefen Coordinaten sich beide auf reelle Coordinatensysteme beziehen, und einerlei constantes Glied besitzen, die Quotienten

$$\frac{(\alpha_0')(\alpha_0'')}{(\alpha_0)} , \quad \frac{(\alpha_0)(\alpha_0'')}{(\alpha_0')} , \quad \frac{(\alpha_0)(\alpha_0')}{(\alpha_0'')} , \quad \frac{\alpha_0' \alpha_0''}{\alpha_0} , \quad \frac{\alpha_0 \alpha_0''}{\alpha_0'} , \quad \frac{\alpha_0 \alpha_0'}{\alpha_0''}$$

sämmtlich ein und dasselbe Vorzeichen in sich tragen müssen, was mit der Aussage in I) zusammengehalten nichts anders sagt, als dass unter den Coeffizienten der einen Gleichung eben so viele positive und negative Zahlen vorkommen müssen, wie unter den Coeffizienten der andern Gleichung, und die analoge Behandlung der Gleichungen (75. b.), (75. c.) und (75. d.) zeigt noch überdiess, dass der so eben aufgestellte Satz noch wahr bleibt, auch wenn die eine oder die andere und selbst beide Gleichungen senkrechte Coordinaten in sich aufgenommen haben.

III) Die im ersten Abschnitte aufgestellte Richtungsgleichung (51.) auf die drei neuen Axen AY, AY', AY'' angewandt, giebt an den drei Grundaxen AX, AX', AX'':

$$1 = A^2 + A'^2 + A''^2 + 2 A A' \cos W + 2 A A'' \cos W' + 2 A' A'' \cos W'' ,$$

$$1 = A_1^2 + A_1'^2 + A_1''^2 + 2 A_1 A_1' \cos W + 2 A_1 A_1'' \cos W' + 2 A_1' A_1'' \cos W'' ,$$

$$1 = A_2^2 + A_2'^2 + A_2''^2 + 2 A_2 A_2' \cos W + 2 A_2 A_2'' \cos W' + 2 A_2' A_2'' \cos W'' .$$

Dividirt man diese Gleichungen ihrer Ordnung nach mit (α_0), (α'_0), (α''_0) und addirt sie hierauf zusammen, so erhält man:

$$\frac{1}{(\alpha_0)}+\frac{1}{(\alpha'_0)}+\frac{1}{(\alpha''_0)}=\frac{A^2}{(\alpha_0)}+\frac{A_1^2}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2^2}{(\alpha''_0)}+\frac{A'^2}{(\alpha_0)}+\frac{A_1'^2}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2'^2}{(\alpha''_0)}+\frac{A''^2}{(\alpha_0)}+\frac{A_1''^2}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2''^2}{(\alpha''_0)}$$
$$+2\cos W\left(\frac{A\,A'}{(\alpha_0)}+\frac{A_1A_1'}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2A_2'}{(\alpha''_0)}\right)+2\cos W'\left(\frac{A\,A''}{(\alpha_0)}+\frac{A_1A_1''}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2A_2''}{(\alpha''_0)}\right)$$
$$+2\cos W''\left(\frac{A'A''}{(\alpha_0)}+\frac{A_1'A_1''}{(\alpha'_0)}+\frac{A_2'A_2''}{(\alpha''_0)}\right),$$

welche Gleichung mit Zuziehung derer (76. a. und c.) übergeht in:

$$\frac{1}{(\alpha_0)}+\frac{1}{(\alpha'_0)}+\frac{1}{(\alpha''_0)}=\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}\,. \qquad \textbf{(80. a.)}$$

Ebenso liefert dieselbe Richtungsgleichung, auf die drei neuen Polaraxen $A\mathfrak{Y}$, $A\mathfrak{Y}'$, $A\mathfrak{Y}''$ angewandt, an den drei ursprünglichen Grundaxen:

$$1=(A)^2+(A')^2+(A'')^2+2(A)(A')\cos W+2(A)(A'')\cos W'+2(A')(A'')\cos W'',$$
$$1=(A_1)^2+(A_1')^2+(A_1'')^2+2(A_1)(A_1')\cos W+2(A_1)(A_1'')\cos W'+2(A_1')(A_1'')\cos W'',$$
$$1=(A_2)^2+(A_2')^2+(A_2'')^2+2(A_2)(A_2')\cos W+2(A_2)(A_2'')\cos W'+2(A_2')(A_2'')\cos W'';$$

und dividirt man diese ihrer Ordnung nach mit $(\delta_0)\mathfrak{D}^2$, $(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2$, $(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2$, nimmt hierauf die Summe von allen dreien, so findet man mit Rücksicht auf die Gleichungen (77. a. und c.):

$$\frac{1}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2}+\frac{1}{(\delta'_0)\mathfrak{D}_1'^2}+\frac{1}{(\delta''_0)\mathfrak{D}_2''^2}=\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}\,. \qquad \textbf{(80. b.)}$$

Ferner giebt die im ersten Abschnitte aufgestellte Richtungsgleichung (52. a.), auf die drei neuen Grundaxen angewandt, an den ursprünglichen Grundaxen:

$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}C^2+\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}C'^2+\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''}C''^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)C\,C'+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''}\right)C\,C''+\left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}+\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''}\right)C'\,C'',$$
$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}C_1^2+\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}C_1'^2+\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''}C_1''^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)C_1\,C_1'+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''}\right)C_1\,C_1''+\left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}+\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''}\right)C_1'\,C_1'',$$
$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}C_2^2+\frac{\mathfrak{A}_1'}{\mathfrak{C}_1'}C_2'^2+\frac{\mathfrak{A}_2''}{\mathfrak{C}_2''}C_2''^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}_1'}\right)C_2\,C_2'+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}_2''}\right)C_2\,C_2''+\left(\frac{\mathfrak{A}_1''}{\mathfrak{C}_1'}+\frac{\mathfrak{A}_2'}{\mathfrak{C}_2''}\right)C_2'\,C_2'';$$

addirt man aber diese drei Gleichungen zu einander, nachdem man sie ihrer Ordnung nach mit (α_0), (α'_0), (α''_0) dividirt hat, so erhält man, die Gleichungen (78. a. und c.) berücksichtigend:

$$\frac{1}{(\alpha_0)}+\frac{1}{(\alpha'_0)}+\frac{1}{(\alpha''_0)}=\frac{\mathfrak{A}}{\delta_0\,\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1'}{\delta'_0\,\mathfrak{C}_1'}+\frac{\mathfrak{A}_2''}{\delta''_0\,\mathfrak{C}_2''},$$

oder mit Beiziehung der im ersten Abschnitt mitgetheilten Gleichungen (36.):

$$\frac{1}{(\alpha_0)}+\frac{1}{(\alpha'_0)}+\frac{1}{(\alpha''_0)}=\frac{1}{\delta_0\,\mathfrak{C}^2}+\frac{1}{\delta'_0\,\mathfrak{C}_1'^2}+\frac{1}{\delta''_0\,\mathfrak{C}_2''^2}\,. \qquad \textbf{(80. c.)}$$

Dieselbe Richtungsgleichung (52. a.) giebt, auf die drei neuen Polaraxen angewandt, an den ursprünglichen Grundaxen:

$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}(\Gamma)^2+\frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}(\Gamma')^2+\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}(\Gamma'')^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)(\Gamma)(\Gamma')+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma)(\Gamma'')+\left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1}+\frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma')(\Gamma''),$$

$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}(\Gamma_1)^2+\frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}(\Gamma'_1)^2+\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}(\Gamma''_1)^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)(\Gamma_1)(\Gamma'_1)+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma_1)(\Gamma''_1)+\left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1}+\frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma'_1)(\Gamma''_1),$$

$$1=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}(\Gamma_2)^2+\frac{\mathfrak{A}'_1}{\mathfrak{C}'_1}(\Gamma'_2)^2+\frac{\mathfrak{A}''_2}{\mathfrak{C}''_2}(\Gamma''_2)^2+\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}'_1}\right)(\Gamma_2)(\Gamma'_2)+\left(\frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma_2)(\Gamma''_2)+\left(\frac{\mathfrak{A}''_1}{\mathfrak{C}'_1}+\frac{\mathfrak{A}'_2}{\mathfrak{C}''_2}\right)(\Gamma'_2)(\Gamma''_2),$$

und addirt man diese drei Gleichungen zu einander, nachdem man sie ihrer Ordnung nach mit $(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2$, $(\delta'_0)\,\mathfrak{D}'^2_1$, $(\delta''_0)\,\mathfrak{D}''^2_2$ dividirt hat, so erhält man mit Rücksichtsnahme auf die Gleichungen (79. a. und c.):

$$\frac{1}{(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2}+\frac{1}{(\delta'_0)\,\mathfrak{D}'^2_1}+\frac{1}{(\delta''_0)\,\mathfrak{D}''^2_2}=\frac{\mathfrak{A}}{\delta_0\,\mathfrak{C}}+\frac{\mathfrak{A}'_1}{\delta'_0\,\mathfrak{C}'_1}+\frac{\mathfrak{A}''_2}{\delta''_0\,\mathfrak{C}''_2},$$

oder mit Beiziehung der eben erwähnten Gleichungen (36.):

(80. d.) $$\frac{1}{(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2}+\frac{1}{(\delta'_0)\,\mathfrak{D}'^2_1}+\frac{1}{(\delta''_0)\,\mathfrak{D}''^2_2}=\frac{1}{\delta_0\,\mathfrak{C}^2}+\frac{1}{\delta'_0\,\mathfrak{C}'^2_1}+\frac{1}{\delta''_0\,\mathfrak{C}''^2_2}.$$

In den Gleichungen (80. a. bis d.) sprechen sich einfache und wohl zu beachtende Relationen aus, die stets zwischen den Coeffizienten zweier derselben Mittelpunctsfläche angehöriger Diametralgleichungen stattfinden müssen.

IV) Es sind zu Ende der Nr. 208. zweierlei Arten von conjugirten Halbmessern bei Mittelpunctsflächen der zweiten Ordnung zur Sprache gebracht und durch die Benennung der Grund- oder Polar-Halbmesser von einander unterschieden worden. Hat man nämlich eine Diametralgleichung in schiefen Coordinaten von der Form

$$\alpha_0\,x^2+\alpha'_0\,x'^2+\alpha''_0\,x''^2=(\mu_0),$$

und bezeichnet man durch s_0, s'_0, s''_0 die reellen oder imaginären conjugirten Halbmesser der durch diese Gleichung dargestellten Mittelpunctsfläche, so ist jenen Betrachtungen zur Folge:

(81. a.) $$\frac{(\mu_0)}{\alpha_0}=s_0^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha'_0}=s'^2_0\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha''_0}=s''^2_0\,;$$

hat man hingegen eine Diametralgleichung in senkrechten Coordinaten von der Form:

$$\delta_0\,u^2+\delta'_0\,u'^2+\delta''_0\,u''^2=(\nu_0),$$

und schreibt man diese so:

$$\delta_0\,\mathfrak{C}^2\frac{u^2}{\mathfrak{C}^2}+\delta'_0\,\mathfrak{C}'^2_1\frac{u'^2}{\mathfrak{C}'^2_1}+\delta''_0\,\mathfrak{C}''^2_2\frac{u''^2}{\mathfrak{C}''^2_2}=(\nu_0),$$

oder den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (57. b.) gemäss:

$$\delta_0\,\mathfrak{C}^2(x)^2+\delta'_0\,\mathfrak{C}'^2_1(x')^2+\delta''_0\,\mathfrak{C}''^2_2(x'')^2=(\nu_0),$$

so ist diess wieder eine Gleichung in schiefen, wiewohl jetzt auf das Polarsystem bezogenen Coordinaten, und bezeichnet man die zu diesem Polarsystem gehörigen conjugirten Halbmesser durch (s_0), (s'_0), (s''_0), so ist in derselben Weise wie zuvor:

$$\frac{(\nu_0)}{\delta_0 \mathfrak{E}^2} = (s_0)^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0' \mathfrak{E}_1'^2} = (s_0')^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0'' \mathfrak{E}''^2} = (s_0'')^2\,. \qquad \textbf{(81. b.)}$$

Die conjugirten Halbmesser s_0, s_0', s_0'' liegen in den Richtungen der Grundaxen, die (s_0), (s_0'), (s_0'') in den Richtungen der Polaraxen desjenigen Coordinatensystems, worauf die Gleichung sich bezieht, und aus diesem Grunde haben wir, um beide von einander unterscheiden zu können, jene die conjugirten Grundhalbmesser, diese die conjugirten Polarhalbmesser genannt. Dieses vorausgesetzt ist erstlich da, wo man auf dem in Nr. 213. I) angezeigten Wege aus einer Gleichung von der Form $\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + \alpha_0'' x''^2 = (\mu_0)$ zu einer von der Form $(\alpha_0) y^2 + (\alpha_0') y'^2 + (\alpha_0'') y''^2 = (\mu_0)$ gekommen ist, nach Aussage der Gleichungen (81. a.):

$$\frac{(\mu_0)}{\alpha_0} = s_0^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha_0'} = s_0'^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha_0''} = s_0''^2 \quad\text{und}\quad \frac{(\mu_0)}{(\alpha_0)} = \sigma_0^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{(\alpha_0')} = \sigma_0'^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{(\alpha_0'')} = \sigma_0''^2\,, \qquad \textbf{(81. c.)}$$

wenn s_0, s_0', s_0'' und σ_0, σ_0', σ_0'' die zur ersten und zweiten Gleichung gehörigen conjugirten Grundhalbmesser vorstellen; in Folge dieser Gleichungen verwandelt sich aber die (80. a.) in:

$$s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0'^2 + \sigma_0''^2\,. \qquad \textbf{(81. c.)}$$

Zweitens ist da, wo man auf dem in Nr. 213. II) angezeigten Wege aus einer Gleichung von der Form $\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + \alpha_0'' x''^2 = (\mu_0)$ zu der andern $(\delta_0) v^2 + (\delta_0') v'^2 + (\delta_0'') v''^2 = (\mu_0)$ gekommen ist, nach Aussage der Gleichungen (81. a. und b.):

$$\frac{(\mu_0)}{\alpha_0} = s_0^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha_0'} = s_0'^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{\alpha_0''} = s_0''^2 \quad\text{und}\quad \frac{(\mu_0)}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2} = (\sigma_0)^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{(\delta_0')\mathfrak{D}_1'^2} = (\sigma_0')^2\,,\quad \frac{(\mu_0)}{(\delta_0'')\mathfrak{D}_2''^2} = (\sigma_0'')^2\,, \qquad \textbf{(81. b.)}$$

wenn s_0, s_0', s_0'' die zur ersten Gleichung gehörigen conjugirten Grundhalbmesser, (σ_0), (σ_0'), (σ_0'') die zur zweiten Gleichung gehörigen conjugirten Polarhalbmesser vorstellen; in Folge dieser Relationen verwandelt sich aber die Gleichung (80. b.) in:

$$s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 = (\sigma_0)^2 + (\sigma_0')^2 + (\sigma_0'')^2\,. \qquad \textbf{(81. d.)}$$

Drittens ist da, wo man auf dem in Nr. 213. III) bezeichneten Wege aus einer Gleichung von der Form $\delta_0 u^2 + \delta_0' u'^2 + \delta_0'' u''^2 = (\nu_0)$ zu der andern $(\alpha_0) y^2 + (\alpha_0') y'^2 + (\alpha_0'') y''^2 = (\nu_0)$ gekommen ist, nach Aussage der Gleichungen (81. a. und b.):

$$\frac{(\nu_0)}{\delta_0 \mathfrak{E}^2} = (s_0)^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0' \mathfrak{E}_1'^2} = (s_0')^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0'' \mathfrak{E}_2''^2} = (s_0'')^2 \quad\text{und}\quad \frac{(\nu_0)}{(\alpha_0)} = \sigma_0^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{(\alpha_0')} = \sigma_0'^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{(\alpha_0'')} = \sigma_0''^2\,, \qquad \textbf{(81. e.)}$$

wenn (s_0), (s_0'), (s_0'') die zur ersten Gleichung gehörigen conjugirten Polarhalbmesser, σ_0, σ_0', σ_0'' die zur zweiten Gleichung gehörigen conjugirten Grundhalbmesser vorstellen; es verwandelt sich aber diesen Relationen zur Folge die Gleichung (80. c.) in:

$$(s_0)^2 + (s_0')^2 + (s_0'')^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0'^2 + \sigma_0''^2\,. \qquad \textbf{(81. e.)}$$

Endlich ist da, wo man auf dem in Nr. 213. IV) bezeichneten Wege aus einer Gleichung von der Form $\delta_0 u^2 + \delta_0' u'^2 + \delta_0'' u''^2 = (\nu_0)$ zu der andern $(\delta_0) v^2 + (\delta_0') v'^2 + (\delta_0'') v''^2 = (\nu_0)$ gekommen ist, nach Aussage der Gleichungen (81. b.):

$$\frac{(\nu_0)}{\delta_0 \mathfrak{E}^2} = (s_0)^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0' \mathfrak{E}_1'^2} = (s_0')^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{\delta_0'' \mathfrak{E}_2''^2} = (s_0'')^2 \quad\text{und}\quad \frac{(\nu_0)}{(\delta_0)\mathfrak{D}^2} = (\sigma_0)^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{(\delta_0')\mathfrak{D}_1'^2} = (\sigma_0')^2\,,\quad \frac{(\nu_0)}{(\delta_0'')\mathfrak{D}_2''^2} = (\sigma_0'')^2\,, \qquad \textbf{(81. f.)}$$

wenn (s_0), (s_0'), (s_0'') und (σ_0), (σ_0'), (σ_0'') die zur ersten und zweiten Gleichung gehörigen con-

jugirten Polarhalbmesser vorstellen; es verwandelt sich aber diesen Relationen zur Folge die Gleichung (80. d.) in:

(81. f.) $$(s_0)^2+(s_0')^2+(s_0'')^2=(\sigma_0)^2+(\sigma_0')^2+(\sigma_0'')^2.$$

Aus den Gleichungen (81. c. bis f.) geht hervor, dass in zwei Diametralgleichungen, welche dieselbe Mittelpunctsfläche darstellen, die Quadrate der drei conjugirten Halbmesser stets dieselbe Summe geben, wenn man bei der Gleichung, welche schiefe Coordinaten in sich enthält, die Grundhalbmesser, und bei der Gleichung, welche senkrechte Coordinaten in sich enthält, die Polarhalbmesser nimmt.

V) Bezeichnet man, wie schon (Abschnitt I. Nr. 44.) geschehen ist, die Inhalte des ursprünglichen Grund- und Polarsystems durch h und (h), die des neu eingeführten Grund- und Polarsystems durch k und (k), so ist den im ersten Abschnitte (Nr. 40.) aufgestellten Gleichungen (84. a. und c.) zur Folge:

$$[\overset{3}{\mathrm{A}}]^2=\frac{k^2}{h^2},\quad [\overset{3}{\mathrm{C}}]^2=h^2k^2 \text{ und } [(\overset{3}{\mathit{\Delta}})]^2=\frac{(k)^2}{h^2},\quad [(\overset{3}{\mathit{\Gamma}})]^2=h^2(k)^2;$$

setzt man aber diese Werthe von $[\overset{3}{\mathrm{A}}]^2$, $[\overset{3}{\mathrm{C}}]^2$, $[(\overset{3}{\mathit{\Delta}})]^2$, $[(\overset{3}{\mathit{\Gamma}})]^2$ und zugleich die der conjugirten Grund- oder Polarhalbmesser aus (81. c., d., e., f.) in die Gleichungen (76. b.), (77. b.), (78. b.) und (79. b.) ein, so werden diese:

$$s_0^2\, s_0'^2\, s_0''^2\, h^2=\sigma_0^2\;\sigma_0'^2\;\sigma_0''^2\;k^2,$$

$$s_0^2\, s_0'^2\, s_0''^2\, h^2=(\sigma_0)^2(\sigma_0')^2(\sigma_0'')^2(k)^2,$$

$$\frac{(s_0)^2(s_0')^2(s_0'')^2\,\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{E}_1'^2\,\mathfrak{E}_2''^2}{h^2}=\sigma_0^2\;\sigma_0'^2\;\sigma_0''^2\;k^2,$$

$$\frac{(s_0)^2(s_0')^2(s_0'')^2\,\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{E}_1'^2\,\mathfrak{E}_2''^2}{h^2}=(\sigma_0)^2(\sigma_0')^2(\sigma_0'')^2(k)^2.$$

Erwägt man nun, dass den im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichungen (41.) zur Folge

$$\mathfrak{E}=\frac{h}{\sin W''},\quad \mathfrak{E}_1'=\frac{h}{\sin W'},\quad \mathfrak{E}_2''=\frac{h}{\sin W}$$

ist, und auch weil $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1'$, $\mathfrak{E}_2''$ im ursprünglichen Grund- und Polarsystem völlig einerlei Bedeutung haben:

$$\mathfrak{E}=\frac{(h)}{\sin \mathfrak{W}''},\quad \mathfrak{E}_1'=\frac{(h)}{\sin \mathfrak{W}'},\quad \mathfrak{E}_2''=\frac{(h)}{\sin \mathfrak{W}},$$

so überzeugt man sich, dass

$$\frac{\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{E}_1'^2\,\mathfrak{E}_2''^2}{h^2}=\frac{h\,(h)^3}{\sin W\sin W'\sin W''\sin \mathfrak{W}\sin \mathfrak{W}'\sin \mathfrak{W}''},$$

oder, weil kraft der im ersten Abschnitte erhaltenen Gleichungen (42.) am Grundsysteme

$$h=\sin W\sin W'\sin \mathfrak{W}''$$

und am entsprechenden Polarsysteme

$$(\mathrm{h}) = \sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}' \sin \mathrm{W}'',$$

also

$$\mathrm{h}\,(\mathrm{h}) = \sin \mathrm{W} \sin \mathrm{W}' \sin \mathrm{W}'' \sin \mathfrak{W} \sin \mathfrak{W}' \sin \mathfrak{W}''$$

ist,

$$\frac{\mathfrak{C}^2\,\mathfrak{C}_1'^2\,\mathfrak{C}_2''^2}{\mathrm{h}^2} = (\mathrm{h})^2$$

ist, wodurch die vorhin aufgestellten vier Gleichungen sich auch so schreiben lassen:

$$s_0^2 \;\; s_0'^2 \;\; s_0''^2 \;\; h^2 = \sigma_0^2 \;\; \sigma_0'^2 \;\; \sigma_0''^2 \;\; k^2 \;, \qquad \textbf{(82. a.)}$$

$$s_0^2 \;\; s_0'^2 \;\; s_0''^2 \;\; h^2 = (\sigma_0)^2 (\sigma_0')^2 (\sigma_0'')^2 (k)^2 \;, \qquad \textbf{(82. b.)}$$

$$(s_0)^2 (s_0')^2 (s_0'')^2 (h)^2 = \sigma_0^2 \;\; \sigma_0'^2 \;\; \sigma_0''^2 \;\; k^2 \;, \qquad \textbf{(82. c.)}$$

$$(s_0)^2 (s_0')^2 (s_0'')^2 (h)^2 = (\sigma_0)^2 (\sigma_0')^2 (\sigma_0'')^2 (k)^2 \;. \qquad \textbf{(82. d.)}$$

In diesen Gleichungen spricht sich der folgende Satz aus: Bei zwei Diametralgleichungen, die zu einer und derselben Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung gehören, ist der Inhalt des über den drei conjugirten entweder Grund- oder Polarhalbmessern, je nachdem in der Gleichung schiefe oder senkrechte Coordinaten auftreten, beschriebenen Parallelepipeds stets der gleiche. Bei diesem Satze kann man die Quadrate aller conjugirten Halbmesser immer als positive Zahlen, sonach von den conjugirten Halbmessern stets deren wahre Längen nehmen, weil der in II) erörterten Eigenschaft gemäss auf beiden Seiten der Gleichungen (82. a. bis d.) stets gleich viele positive und negative Quadrate erscheinen, und also in ihnen die negativen auch in positive Zahlen umgekehrt werden dürfen.

VI) Führt man mittelst der Relationen (81. c., d., e., f.) die conjugirten Grund- oder Polarhalbmesser in die Gleichungen (80. a. bis d.) ein, so gehen diese über in:

$$s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0'^2 + \sigma_0''^2 \;, \qquad \textbf{(83. a.)}$$

$$s_0^2 + s_0'^2 + s_0''^2 = (\sigma_0)^2 + (\sigma_0')^2 + (\sigma_0'')^2, \qquad \textbf{(83. b.)}$$

$$(s_0)^2 + (s_0')^2 + (s_0'')^2 = \sigma_0^2 + \sigma_0'^2 + \sigma_0''^2 \;, \qquad \textbf{(83. c.)}$$

$$(s_0)^2 + (s_0')^2 + (s_0'')^2 = (\sigma_0)^2 + (\sigma_0')^2 + (\sigma_0'')^2, \qquad \textbf{(83. d.)}$$

welche sich in Worten so aussprechen lassen: Bei zwei Diametralgleichungen, die eine und dieselbe Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung darstellen, hat die Summe der Quadrate ihrer drei conjugirten entweder Grund- oder Polarhalbmesser, je nachdem die eine oder die andere Gleichung schiefe oder senkrechte Coordinaten in sich aufgenommen hat, in allen Fällen denselben Werth.

Ein bloser Blick auf die Gleichungen (83. a. bis d.) giebt zu erkennen, dass man die Quadrate von den einer neuen, erst noch zu suchenden Diametralgleichung entsprechenden conjugirten Durchmessern aus einer, derselben Mittelpunctsfläche angehörigen und schon bekannten Diametralgleichung in ihrer positiven oder negativen Bedeutung vollkommen bestimmt schon anzugeben im Stande ist, so wie man nur deren Verhältnisse zu einander kennt. Auch gehen die mehrerlei hier von einander getrennten Fälle schon unmittelbar aus dem zu Ende der Nr. 213. angegebenen Gesichtspuncte hervor.

216) Die in Nr. 214. ermittelten Relationen sind auch noch hinreichend zur Ermittelung desjenigen Coordinatensystems, an welchem eine Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung gleichzeitig sowohl eine Diametralgleichung mit schiefen, wie eine mit senkrechten Coordinaten liefert. Zu diesem Zwecke wollen wir indessen den Gleichungen (75. a. bis d.) zuvor eine bessere Form ertheilen. Man kann nämlich den Gleichungen (75. a.) mit Zuziehung der im ersten Abschnitte aufgefundenen Relationen (88. a.), in welchen $\pm\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{h}}=[\overset{3}{\mathrm{A}}]$ ist, zunächst die andere Gestalt geben:

$$\alpha_0\,\mathrm{A}=(\alpha_0)\,\mathrm{B}\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}'=(\alpha_0)\,\mathrm{B}_1\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}''=(\alpha_0)\,\mathrm{B}_2\;,$$

$$\alpha_0\,\mathrm{A}_1=(\alpha_0')\,\mathrm{B}'\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}_1'=(\alpha_0')\,\mathrm{B}_1'\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}_1''=(\alpha_0')\,\mathrm{B}_2'\;,$$

$$\alpha_0\,\mathrm{A}_2=(\alpha_0'')\,\mathrm{B}''\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}_2'=(\alpha_0'')\,\mathrm{B}_1''\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}_2''=(\alpha_0'')\,\mathrm{B}_2''\;,$$

welche Gleichungen, wenn man anstatt der Projectionszahlen, deren Grundzeichen B ist, mittelst der letzten Gruppe der in (87.) enthaltenen Gleichungen des ersten Abschnitts die Projectionszahlen setzt, deren Grundzeichen (Γ) ist, übergehen in:

(84. a.)

$$\begin{cases} \alpha_0\,\mathrm{A}=(\alpha_0)\,\dfrac{(\Gamma)}{\mathfrak{D}}\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}'=(\alpha_0)\,\dfrac{(\Gamma')}{\mathfrak{D}}\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}''=(\alpha_0)\,\dfrac{(\Gamma'')}{\mathfrak{D}}\;, \\[2ex] \alpha_0\,\mathrm{A}_1=(\alpha_0')\,\dfrac{(\Gamma_1)}{\mathfrak{D}_1'}\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}_1'=(\alpha_0')\,\dfrac{(\Gamma_1')}{\mathfrak{D}_1'}\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}_1''=(\alpha_0')\,\dfrac{(\Gamma_1'')}{\mathfrak{D}_1'}\;, \\[2ex] \alpha_0\,\mathrm{A}_2=(\alpha_0'')\,\dfrac{(\Gamma_2)}{\mathfrak{D}_2''}\;,\quad \alpha_0'\,\mathrm{A}_2'=(\alpha_0'')\,\dfrac{(\Gamma_2')}{\mathfrak{D}_2''}\;,\quad \alpha_0''\,\mathrm{A}_2''=(\alpha_0'')\,\dfrac{(\Gamma_2'')}{\mathfrak{D}_2''}\;. \end{cases}$$

Aehnlich nehmen die Gleichungen (75. b.) mit Zuziehung der im ersten Abschnitt mitgetheilten Relationen (88. c.), wenn man berücksichtigt, dass $\pm\frac{(\mathrm{k})}{\mathrm{h}}=[(\overset{3}{A})]$ ist, die folgende Gestalt an:

$$\alpha_0(A)=(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2\,(\mathrm{B})\;,\quad \alpha_0'(A')=(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2\,(\mathrm{B}_1)\;,\quad \alpha_0''(A'')=(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2\,(\mathrm{B}_2)\;,$$

$$\alpha_0(A_1)=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2\,(\mathrm{B}')\;,\quad \alpha_0'(A_1')=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2\,(\mathrm{B}_1')\;,\quad \alpha_0''(A_1'')=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2\,(\mathrm{B}_2')\;,$$

$$\alpha_0(A_2)=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2\,(\mathrm{B}'')\;,\quad \alpha_0'(A_2')=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2\,(\mathrm{B}_1'')\;,\quad \alpha_0''(A_2'')=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2\,(\mathrm{B}_2'')\;,$$

und geben, wenn man in sie statt der Projectionszahlen, deren Grundzeichen (B) ist, mittelst der ersten Gruppe der in (87.) enthaltenen Gleichungen des ersten Abschnitts die setzt, deren Grundzeichen C ist:

(84. b.)

$$\begin{cases} \alpha_0(A)=(\delta_0)\,\mathfrak{D}\,\mathrm{C}\;,\quad \alpha_0'(A')=(\delta_0)\,\mathfrak{D}\,\mathrm{C}'\;,\quad \alpha_0''(A'')=(\delta_0)\,\mathfrak{D}\,\mathrm{C}''\;, \\ \alpha_0(A_1)=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{C}_1\;,\quad \alpha_0'(A_1')=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{C}_1'\;,\quad \alpha_0''(A_1'')=(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{C}_1''\;, \\ \alpha_0(A_2)=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{C}_2\;,\quad \alpha_0'(A_2')=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{C}_2'\;,\quad \alpha_0''(A_2'')=(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{C}_2''\;. \end{cases}$$

Eben so kann man den Gleichungen (75. c.) mit Zuziehung der im ersten Abschnitte gegebenen Relationen (90. d.), wenn man beachtet, dass $[\overset{3}{\mathrm{C}}]=\pm\mathrm{h\,k}$ ist, wobei das obere oder untere Vorzeichen in denselben Fällen genommen werden muss, wo es in den Relationen (90. d.) steht, die folgende Gestalt geben, wenn man noch berücksichtigt, dass $\frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}''}=\mathfrak{S}$, $\frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}'}=\mathfrak{S}_1'$, $\frac{\mathrm{h}}{\sin \mathrm{W}}=\mathfrak{S}_2''$ und ebenso $\frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}_1''}=\mathfrak{D}$, $\frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}_1'}=\mathfrak{D}_1'$, $\frac{\mathrm{k}}{\sin \mathrm{W}_1}=\mathfrak{D}_2''$ ist:

$$\delta_0 \mathrm{C}\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,\varDelta\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}'\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,\varDelta_1\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}''\,\mathfrak{C}_2''\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,\varDelta_2\;,$$
$$\delta_0 \mathrm{C}_1\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,\varDelta'\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}_1'\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,\varDelta_1'\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}_1''\,\mathfrak{C}_2''\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,\varDelta_2'\;,$$
$$\delta_0 \mathrm{C}_2\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')\,\varDelta''\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}_2'\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')\,\varDelta_1''\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}_2''\,\mathfrak{C}_2''\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')\,\varDelta_2''\;,$$

und diese gehen, wenn man mittelst der zweiten Gruppe der in (89.) enthaltenen Gleichungen des ersten Abschnittes statt der Projectionszahlen mit dem Grundzeichen $\varDelta$ die mit dem Grundzeichen (A) setzt, über in:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_0 \mathrm{C}\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,(A)\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}'\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,(A')\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}''\,\mathfrak{D} = (\alpha_0)\,(A'')\;,\\
\delta_0 \mathrm{C}_1\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,(A_1)\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}_1'\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,(A_1')\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}_1''\,\mathfrak{D}_1' = (\alpha_0')\,(A_1'')\;,\\
\delta_0 \mathrm{C}_2\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')(A_2)\;,\quad \delta_0' \mathrm{C}_2'\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')\,(A_2')\;,\quad \delta_0'' \mathrm{C}_2''\,\mathfrak{D}_2'' = (\alpha_0'')(A_2'')\;;
\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(84. c.)}$$

ähnlich nehmen die Gleichungen (75. d.) mit Zuziehung der im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen (90. b.), wenn man beachtet, dass $[(\overset{3}{\Gamma})] = \pm\,\mathrm{h}\,(\mathrm{k})$ und $\frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}_1''} = \mathfrak{D}$, $\frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}_1'} = \mathfrak{D}_1'$, $\frac{(\mathrm{k})}{\sin \mathfrak{W}_1} = \mathfrak{D}_2''$ ist, die andere Gestalt an:

$$\delta_0 (\Gamma)\,\mathfrak{C} = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\,(\varDelta)\;,\quad \delta_0'(\Gamma')\,\mathfrak{C}_1' = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\,(\varDelta_1)\;,\quad \delta_0''(\Gamma'')\,\mathfrak{C}_2'' = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\,(\varDelta_2)\;,$$
$$\delta_0 (\Gamma_1)\,\mathfrak{C} = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,(\varDelta')\;,\quad \delta_0'(\Gamma_1')\,\mathfrak{C}_1' = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,(\varDelta_1')\;,\quad \delta_0''(\Gamma_1'')\,\mathfrak{C}_2'' = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,(\varDelta_2')\;,$$
$$\delta_0 (\Gamma_2)\,\mathfrak{C} = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,(\varDelta'')\;,\quad \delta_0'(\Gamma_2')\,\mathfrak{C}_1' = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,(\varDelta_1'')\;,\quad \delta_0''(\Gamma_2'')\,\mathfrak{C}_2'' = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,(\varDelta_2'')\;,$$

und diese gehen, wenn man mittelst der letzten Gruppe der in (89.) enthaltenen Gleichungen des ersten Abschnitts statt der Projectionszahlen mit dem Grundzeichen $(\varDelta)$ die mit dem Grundzeichen A setzt, über in:

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_0 (\Gamma) = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\;\mathrm{A}\;,\quad \delta_0'(\Gamma') = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\;\mathrm{A}'\;,\quad \delta_0''(\Gamma'') = (\delta_0)\,\mathfrak{D}\;\mathrm{A}''\;,\\
\delta_0 (\Gamma_1) = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{A}_1\;,\quad \delta_0'(\Gamma_1') = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{A}_1'\;,\quad \delta_0''(\Gamma_1'') = (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'\,\mathrm{A}_1''\;,\\
\delta_0 (\Gamma_2) = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{A}_2\;,\quad \delta_0'(\Gamma_2') = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{A}_2'\;,\quad \delta_0''(\Gamma_2'') = (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''\,\mathrm{A}_2''\;.
\end{array}\right\}\;\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(84. d.)}$$

Aus der Form der Gleichungen (84. a. und b.) sowohl als derer (84. c. und d.) geht hervor, dass, wenn von zwei zusammengehörigen Grund- und Polaraxen eines neuen Coordinatensystems, an welchem eine gegebene Mittelpunctsfläche eine Diametralgleichung liefert, die Stellung der einen gegen die Axen des ursprünglichen Systems, an welchem dieselbe Fläche schon eine Diametralgleichung lieferte, bekannt ist, man hieraus allein schon die Stellung der andern zu den Axen des ursprünglichen Systems erkennen kann. Hieraus folgt aber, dass durch die Lage von einem der drei conjugirten neuen Durchmesser zugleich auch die Lage der ihm zugeordneten neuen Diametralebene gegeben ist und umgekehrt. Diese Eigenschaft kann in vielen Fällen zur Vereinfachung der Betrachtungen benützt werden, wiewohl wir von ihr keinen Gebrauch machen werden.

Im Allgemeinen nun beziehen sich zwar die Projectionszahlen in den Gleichungen (84. a. und b.) oder in denen (84. c. und d.), welche A, A_1, A_2 und C, C_1, C_2 oder (A), (A_1), (A_2) und (Γ), (Γ_1), (Γ_2) zum Grundzeichen haben, nicht auf dieselben drei Grundaxen AY, AY′, AY″ oder auf dieselben drei Polaraxen $\mathrm{A}\mathfrak{Y}$, $\mathrm{A}\mathfrak{Y}'$, $\mathrm{A}\mathfrak{Y}''$, weil die beiden Formen (70. c.) und (71. c.) oder (72. c.) und (73. c.), welche aus einer und derselben Diametralgleichung hergeholt wer-

den sollen, in der Regel an verschiedenen Coordinatensystemen entstehen werden; aber da, wo beide Formen gleichzeitig an einem und demselben Systeme sich bilden sollen, hat man jene Projectionszahlen immer als denselben drei Richtungen angehörig aufzufassen und die drei Richtungen, worauf die Projectionszahlen mit dem Grundzeichen A oder C sich beziehen, für die Grundaxen dieses einen Systems, hingegen die drei Richtungen, deren Projectionszahlen (A) oder (Γ) zum Grundzeichen haben, für dessen Polaraxen anzusehen. Eben desswegen haben auch in diesem Falle die Zeichen $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_1'$, $\mathfrak{D}_2''$ in den Gleichungen (84. a. und b.) oder in denen (84. c. und d.) völlig einerlei Bedeutung, und aus diesem Grunde findet man durch kreuzweise Multiplication sowohl der gleichvielten Gleichungen (84. a. und b.) wie der gleichvielten (84. c. und d.) unter der gemachten Voraussetzung:

(85. a.)
$$\left\{\begin{array}{l}(\delta_0)\,\mathrm{A}\,\mathrm{C}\,\mathfrak{D}^2=(\alpha_0)\,(\mathit{A})\,(\Gamma)\,,\ (\delta_0)\,\mathrm{A}'\,\mathrm{C}'\,\mathfrak{D}^2=(\alpha_0)\,(\mathit{A}')\,(\Gamma')\,,\ (\delta_0)\,\mathrm{A}''\,\mathrm{C}''\,\mathfrak{D}^2=(\alpha_0)\,(\mathit{A}'')\,(\Gamma'')\,,\\ (\delta_0')\,\mathrm{A}_1\,\mathrm{C}_1\,\mathfrak{D}_1'^2=(\alpha_0')\,(\mathit{A}_1)\,(\Gamma_1)\,,\ (\delta_0')\,\mathrm{A}_1'\,\mathrm{C}_1'\,\mathfrak{D}_1'^2=(\alpha_0')\,(\mathit{A}_1')\,(\Gamma_1')\,,\ (\delta_0')\,\mathrm{A}_1''\,\mathrm{C}_1''\,\mathfrak{D}_1'^2=(\alpha_0')\,(\mathit{A}_1'')\,(\Gamma_1'')\,,\\ (\delta_0'')\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{C}_2\,\mathfrak{D}_2''^2=(\alpha_0'')(\mathit{A}_2)(\Gamma_2)\,,\ (\delta_0'')\,\mathrm{A}_2'\,\mathrm{C}_2'\,\mathfrak{D}_2''^2=(\alpha_0'')\,(\mathit{A}_2')\,(\Gamma_2')\,,\ (\delta_0'')\,\mathrm{A}_2''\,\mathrm{C}_2''\,\mathfrak{D}_2''^2=(\alpha_0'')\,(\mathit{A}_2'')\,(\Gamma_2'')\,.\end{array}\right.$$

Addirt man von diesen Gleichungen immer die drei auf einer Zeile stehenden Gleichungen zu einander, so erhält man:

$$(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2\,(\mathrm{A}\,\mathrm{C}+\mathrm{A}'\,\mathrm{C}'+\mathrm{A}''\,\mathrm{C}'')=(\alpha_0)\,((\mathit{A})\,(\Gamma)+(\mathit{A}')\,(\Gamma')+(\mathit{A}'')\,(\Gamma''))\,,$$
$$(\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2\,(\mathrm{A}_1\,\mathrm{C}_1+\mathrm{A}_1'\,\mathrm{C}_1'+\mathrm{A}_1''\,\mathrm{C}_1'')=(\alpha_0')\,((\mathit{A}_1)\,(\Gamma_1)+(\mathit{A}_1')\,(\Gamma_1')+(\mathit{A}_1'')\,(\Gamma_1''))\,,$$
$$(\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2\,(\mathrm{A}_2\,\mathrm{C}_2+\mathrm{A}_2'\,\mathrm{C}_2'+\mathrm{A}_2''\,\mathrm{C}_2'')=(\alpha_0'')\,((\mathit{A}_2)(\Gamma_2)+(\mathit{A}_2')(\Gamma_2')+(\mathit{A}_2'')(\Gamma_2''))\,,$$

und diese Gleichungen gehen mit Rücksicht auf die im ersten Abschnitte angegebene Richtungsgleichung (11.) über in:

(85. b.)
$$(\delta_0)\,\mathfrak{D}^2=(\alpha_0)\ ,\quad (\delta_0')\,\mathfrak{D}_1'^2=(\alpha_0')\ ,\quad (\delta_0'')\,\mathfrak{D}_2''^2=(\alpha_0'')\,,$$

worin sich eine Relation zu erkennen giebt, die zwischen den Coeffizienten der Gleichungen (70. c.) und (71. c.), sowie zwischen denen der Gleichungen (72. c.) und (73. c.) stattfinden muss, wenn beide dieselbe Mittelpunctsfläche an einem und demselben Coordinatensysteme darstellen sollen, mit deren Hilfe die Gleichungen (85. a.) eine sehr einfache Gestalt annehmen; sie werden nämlich:

(85. c.)
$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}\,\mathrm{C}=(\mathit{A})\,(\Gamma)\ ,\quad \mathrm{A}'\,\mathrm{C}'=(\mathit{A}')(\Gamma')\ ,\quad \mathrm{A}''\,\mathrm{C}''=(\mathit{A}'')(\Gamma'')\ ,\\ \mathrm{A}_1\,\mathrm{C}_1=(\mathit{A}_1)\,(\Gamma_1)\ ,\quad \mathrm{A}_1'\,\mathrm{C}_1'=(\mathit{A}_1')\,(\Gamma_1')\ ,\quad \mathrm{A}_1''\,\mathrm{C}_1''=(\mathit{A}_1'')(\Gamma_1'')\ ,\\ \mathrm{A}_2\,\mathrm{C}_2=(\mathit{A}_2)\,(\Gamma_2)\ ,\quad \mathrm{A}_2'\,\mathrm{C}_2'=(\mathit{A}_2')\,(\Gamma_2')\ ,\quad \mathrm{A}_2''\,\mathrm{C}_2''=(\mathit{A}_2'')(\Gamma_2'')\ ,\end{array}\right.$$

und enthalten gar keine Coeffizienten der Gleichung mehr. Die Gleichungen (84. a.) geben, wenn man die auf einer Zeile stehenden in einander dividirt:

(85. d.)
$$\frac{\alpha_0\,\mathrm{A}}{\alpha_0'\,\mathrm{A}'}=\frac{(\Gamma)}{(\Gamma')}\ ,\quad \frac{\alpha_0\,\mathrm{A}}{\alpha_0''\,\mathrm{A}''}=\frac{(\Gamma)}{(\Gamma'')}\ ,\quad \frac{\alpha_0'\,\mathrm{A}'}{\alpha_0''\,\mathrm{A}''}=\frac{(\Gamma')}{(\Gamma'')}\ ,$$

und noch die, welche sich aus diesen ergeben, wenn man den Buchstaben A und Γ den Index 1 und 2 anhängt. Auf dieselbe Weise geben die Gleichungen (84. b.):

(85. e.)
$$\frac{\alpha_0\,(\mathit{A})}{\alpha_0'(\mathit{A}')}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}'}\ ,\quad \frac{\alpha_0\,(\mathit{A})}{\alpha_0''\,(\mathit{A}'')}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{C}''}\ ,\quad \frac{\alpha_0'\,(\mathit{A}')}{\alpha_0''\,(\mathit{A}'')}=\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}''}\ ,$$

und noch die, welche man aus diesen dadurch erhält, dass man an die Buchstaben $\mathit{\Delta}$ und C die Indexe 1 und 2 anhängt. Man sieht hieraus, dass, was die Gleichungen (85. d. und e.) von den zusammengehörigen Grund- und Polaraxen A Y und A 𝔜 verlangen, gleichmässig auch bei denen A Y′ und A 𝔜′, so wie bei denen A Y″ und A 𝔜″ stattfinden muss, wobei man noch bemerken kann, dass jede von diesen Gleichungen schon in den zwei andern auf derselben Zeile stehenden enthalten ist.

217) Schreibt man die Gleichungen (85. d. und e.) in der Form:

$$\alpha_0 \mathrm{A}\,(\Gamma) = \alpha'_0 \mathrm{A}'\,(\Gamma)\ ,\quad \alpha_0 \mathrm{A}\,(\Gamma'') = \alpha''_0 \mathrm{A}''\,(\Gamma)\ ,\quad \alpha'_0 \mathrm{A}'\,(\Gamma'') = \alpha''_0 \mathrm{A}''\,(\Gamma)$$

und

$$\alpha_0 (\mathit{\Delta})\,\mathrm{C}' = \alpha'_0 (\mathit{\Delta}')\,\mathrm{C}\ ,\quad \alpha_0 (\mathit{\Delta})\,\mathrm{C}'' = \alpha''_0 (\mathit{\Delta}'')\,\mathrm{C}\ ,\quad \alpha'_0 (\mathit{\Delta}')\,\mathrm{C}'' = \alpha''_0 (\mathit{\Delta}'')\,\mathrm{C}',$$

setzt hierauf in den obern für (Γ), (Γ'), (Γ''), in den untern für C, C′, C″ ihre Werthe in schiefen derselben Richtung angehörigen Projectionszahlen, den im ersten Abschnitte aufgestellten Relationen (12.) gemäss, so gelangt man zu den nachstehenden Bestimmungen:

$$\alpha_0 \mathrm{A}\,[(\mathit{\Delta}) \cos \mathrm{W} + (\mathit{\Delta}') + (\mathit{\Delta}'') \cos \mathrm{W}''] = \alpha'_0\,\mathrm{A}'\,[(\mathit{\Delta}) + (\mathit{\Delta}') \cos \mathrm{W} + (\mathit{\Delta}'') \cos \mathrm{W}']\ ,$$
$$\alpha_0 \mathrm{A}\,[(\mathit{\Delta}) \cos \mathrm{W}' + (\mathit{\Delta}') \cos \mathrm{W}'' + (\mathit{\Delta}'')] = \alpha''_0\,\mathrm{A}''\,[(\mathit{\Delta}) + (\mathit{\Delta}') \cos \mathrm{W} + (\mathit{\Delta}'') \cos \mathrm{W}']\ ,$$
$$\alpha'_0 \mathrm{A}'\,[(\mathit{\Delta}) \cos \mathrm{W}' + (\mathit{\Delta}') \cos \mathrm{W}'' + (\mathit{\Delta}'')] = \alpha''_0\,\mathrm{A}''\,[(\mathit{\Delta}) \cos \mathrm{W} + (\mathit{\Delta}') + (\mathit{\Delta}'') \cos \mathrm{W}'']$$

und

$$\alpha_0 (\mathit{\Delta})\,[\mathrm{A} \cos \mathrm{W} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' \cos \mathrm{W}''] = \alpha'_0\,(\mathit{\Delta}')\,[\mathrm{A} + \mathrm{A}' \cos \mathrm{W} + \mathrm{A}'' \cos \mathrm{W}']\ ,$$
$$\alpha_0 (\mathit{\Delta})\,[\mathrm{A} \cos \mathrm{W}' + \mathrm{A}' \cos \mathrm{W}'' + \mathrm{A}''] = \alpha''_0\,(\mathit{\Delta}'')\,[\mathrm{A} + \mathrm{A}' \cos \mathrm{W} + \mathrm{A}'' \cos \mathrm{W}']\ ,$$
$$\alpha'_0 (\mathit{\Delta}')\,[\mathrm{A} \cos \mathrm{W}' + \mathrm{A}' \cos \mathrm{W}'' + \mathrm{A}''] = \alpha''_0\,(\mathit{\Delta}'')\,[\mathrm{A} \cos \mathrm{W} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' \cos \mathrm{W}'']\ ;$$

zieht man aber die drei letzten Gleichungen der Reihe nach von den drei vor ihnen stehenden ab, so findet man:

$$\alpha_0[\mathrm{A}(\mathit{\Delta}') - \mathrm{A}'(\mathit{\Delta})] + \alpha_0[\mathrm{A}\,(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''\,(\mathit{\Delta})]\cos \mathrm{W}'' = \alpha'_0\,[\mathrm{A}'\,(\mathit{\Delta}) - \mathrm{A}\,(\mathit{\Delta}')] + \alpha'_0\,[\mathrm{A}'(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''(\mathit{\Delta}')]\cos \mathrm{W}',$$
$$\alpha_0[\mathrm{A}(\mathit{\Delta}') - \mathrm{A}'(\mathit{\Delta})]\cos \mathrm{W}'' + \alpha_0[\mathrm{A}\,(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''(\mathit{\Delta})] = \alpha''_0\,[\mathrm{A}''(\mathit{\Delta}) - \mathrm{A}\,(\mathit{\Delta}'')] + \alpha''_0[\mathrm{A}''(\mathit{\Delta}') - \mathrm{A}'(\mathit{\Delta}'')]\cos \mathrm{W},$$
$$\alpha'_0[\mathrm{A}'(\mathit{\Delta}) - \mathrm{A}(\mathit{\Delta}')]\cos \mathrm{W}' + \alpha'_0[\mathrm{A}'(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''(\mathit{\Delta}')] = \alpha''_0[\mathrm{A}''(\mathit{\Delta}) - \mathrm{A}(\mathit{\Delta}'')]\cos \mathrm{W} + \alpha''_0[\mathrm{A}''(\mathit{\Delta}') - \mathrm{A}'(\mathit{\Delta}'')],$$

welche, wenn man zur Abkürzung

$$\mathrm{A}\,(\mathit{\Delta}') - \mathrm{A}'\,(\mathit{\Delta}) = \mathrm{M}\ ,\quad \mathrm{A}(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''\,(\mathit{\Delta}) = \mathrm{M}',\quad \mathrm{A}'\,(\mathit{\Delta}'') - \mathrm{A}''\,(\mathit{\Delta}') = \mathrm{M}'' \qquad \textbf{(86. a.)}$$

setzt, die folgende Gestalt annehmen:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha_0 + \alpha'_0)\,\mathrm{M} + \alpha_0\,\mathrm{M}' \cos \mathrm{W}'' - \alpha'_0\,\mathrm{M}'' \cos \mathrm{W}' = 0\ ,\\ \alpha_0\,\mathrm{M} \cos \mathrm{W}'' + (\alpha_0 + \alpha''_0)\,\mathrm{M}' + \alpha''_0\,\mathrm{M}'' \cos \mathrm{W} = 0\ ,\\ -\alpha'_0\,\mathrm{M} \cos \mathrm{W}' + \alpha''_0 \mathrm{M}' \cos \mathrm{W} + (\alpha'_0 + \alpha''_0)\,\mathrm{M}'' = 0\ . \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(86. b.)}$$

Man sieht beim ersten Blick auf diese Gleichungen ein, dass man ihnen durch das gleichzeitige Setzen von

$$\mathrm{M} = 0\ ,\quad \mathrm{M}' = 0\ ,\quad \mathrm{M}'' = 0 \qquad \textbf{(86. c.)}$$

genügt; wollte man aber M nicht der Null gleich setzen, und dividirte man dieser Annahme gemäss die Gleichungen (86. b.) durch M, so erhielte man zur Bestimmung von $\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}}$, $\frac{\mathrm{M}''}{\mathrm{M}}$ drei

Gleichungen, deren gleichzeitiges Bestehen mithin ein besonderes Verhalten zwischen den Coefficienten α_0, α'_0, α''_0 und den Axenwinkeln W, W', W'' nöthig machte. Zu ähnlichen Bedingungen würde man geführt, wenn man annehmen wollte, dass entweder M' oder M'' nicht null sei, und alle diese speciellen Bedingungen nehmen stets eine der drei folgenden Formen an:

(86. d.)
$$\left\{\begin{array}{l} \alpha''_0 \cos W\, M = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha'_0 \cos W'\, M = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_0 \cos W''\, M = 0, \\ \text{wo der Einfachheit halber} \\ 2\,\alpha_0\,\alpha'_0\,\alpha''_0 \cos W \cos W' \cos W'' + (\alpha_0+\alpha'_0)\,\alpha''^2_0 \cos^2 W + (\alpha_0+\alpha''_0)\,\alpha'^2_0 \cos^2 W' + (\alpha'_0+\alpha''_0)\,\alpha^2_0 \cos^2 W'' \\ \qquad - (\alpha_0+\alpha'_0)(\alpha_0+\alpha''_0)(\alpha'_0+\alpha''_0) = M \end{array}\right.$$

gesetzt worden ist. Jede solche specielle Bedingung stellt jedoch eine Abhängigkeit der Mittelpunctsfläche von dem Coordinatensysteme, an welchem dieselbe durch die gegebene Gleichung dargestellt wird, fest; gehen wir daher darauf aus, nur dasjenige Coordinatensystem kennen zu lernen, an welchem jede Mittelpunctsfläche, ohne dass sie solchen Beschränkungen unterworfen wird, eine Diametralgleichung gleichzeitig sowohl mit schiefen wie mit senkrechten Coordinaten liefert, so kann diess nur dadurch geschehen, dass wir gleichzeitig die drei Bedingungen (86. c.) befriedigen oder, wenn wir für M, M', M'' wieder das setzen, was diese Buchstaben den Gleichungen (86. a.) gemäss zu bezeichnen haben, dass das gesuchte Coordinatensystem gleichzeitig die Bedingungen

$$A(\mathcal{A}') - A'(\mathcal{A}) = 0\,, \quad A(\mathcal{A}'') - A''(\mathcal{A}) = 0\,, \quad A'(\mathcal{A}'') - A''(\mathcal{A}') = 0$$

befriedige, welches geschieht, wenn

(86. e.)
$$A : A' : A'' = (\mathcal{A}) : (\mathcal{A}') : (\mathcal{A}'')$$

ist. Da aber zwei Richtungen, deren schiefe Projectionszahlen an den gleichen Axen einerlei Verhältnisse unter sich einhalten, nothwendig einander parallel sind (Abschn. I. Nr. 31.), so sagt die Bedingung (86. e.) nichts anderes aus, als dass die Polaraxe A𝔜 des gesuchten Systems in dessen jener Polaraxe entsprechenden Grundaxe AY liegen müsse; weil aber, worauf schon in der vorigen Nummer aufmerksam gemacht worden ist, von allen einander entsprechenden Grund- und Polaraxen des gesuchten Systems gilt, was von einem solchen Paare erwiesen werden kann, so folgt, dass alle Polaraxen des gesuchten Systems in dessen diesen Polaraxen entsprechenden Grundaxen liegen müssen, d. h. dass das verlangte Coordinatensystem nothwendiger Weise ein rechtwinkliges werden müsse. Auf das gleiche Resultat stösst man auf die gleiche Weise wieder, wenn man die analogen Betrachtungen an die Gleichungen (84. c. und d.) anknüpft, d. h. wenn man die Gleichung der Mittelpunctsfläche statt in schiefen in senkrechten Coordinaten gegeben voraussetzt; man stösst nämlich durch eine Behandlung der Gleichungen (84. c. und d.), welche der, die wir so eben denen (84. a. und b.) haben angedeihen lassen, völlig analog ist, wieder auf die Gleichungen (86. e.). Da sonach in dem verlangten Coordinatensysteme die durch das Grundzeichen $(\mathcal{A})$ vorgestellten Projectionszahlen denen durch das Grundzeichen A vorgestellten bei einerlei Abzeichen gleich sind, so werden die Gleichungen (85. c.) sämmtlich identische, und die Gleichungen (85. d.) sowohl wie die (85. e.) gehen gleichzeitig über in:

(86. f.)
$$\frac{\alpha_0\,A}{\alpha'_0\,A'} = \frac{C}{C'}\,, \quad \frac{\alpha_0\,A}{\alpha''_0\,A''} = \frac{C}{C''}\,, \quad \frac{\alpha'_0\,A'}{\alpha''_0\,A''} = \frac{C'}{C''}\,,$$

in welchen man wieder den Buchstaben A und C die Indexe 1 und 2 anhängen darf, was nichts anders sagt, als dass die Gleichungen (86. f.) nicht blos für die Axe AY, sondern auch für die AY' und AY'' stattfinden müssen; auch ist wieder jede dieser Gleichungen schon in den zwei andern auf die gleiche Axe sich beziehenden enthalten.

218) Um nun die Lage der Axen in diesem rechtwinkligen Systeme und dadurch es selber erst vollständig zu bestimmen, müssen wir die Gleichungen (86. f.) noch weiter zerlegen, wobei wir blos diese auf die Axe AY sich beziehenden weiter zu verfolgen brauchen, da wir schon wissen, dass alles, was sie von dieser Axe aussagen, auch bei den zwei andern Axen wahr bleiben muss. Zu unserm jetzigen Zwecke schreiben wir die Gleichungen (86. f.) so:

$$\frac{1}{\alpha_0}\cdot\frac{C}{A}=\frac{1}{\alpha'_0}\cdot\frac{C'}{A'}=\frac{1}{\alpha''_0}\cdot\frac{C''}{A''}, \qquad (87.\ a.)$$

und bezeichnen den durch diese Gleichungen dreimal gegebenen gleichen Werth durch s, so dass vorstehende Gleichungen in die drei folgenden zerfallen:

$$\frac{1}{\alpha_0}\cdot\frac{C}{A}=s\ ,\quad \frac{1}{\alpha'_0}\cdot\frac{C'}{A'}=s\ ,\quad \frac{1}{\alpha''_0}\cdot\frac{C''}{A''}=s \quad {}^{*}). \qquad (87.\ b.)$$

Giebt man diesen Gleichungen die Form

$$C=\alpha_0 A s\ ,\quad C'=\alpha'_0 A' s\ ,\quad C''=\alpha''_0 A'' s$$

und multiplicirt sie ihrer Ordnung nach mit A, A', A'', addirt hierauf die drei so sich ergebenden Gleichungen zu einander, so findet man:

$$AC+A'C'+A''C''=(\alpha_0 A^2+\alpha'_0 A'^2+\alpha''_0 A''^2)\,s,$$

oder, weil in Folge der Richtungsgleichung $AC+A'C'+A''C''=1$ ist,

$$\frac{1}{s}=\alpha_0 A^2+\alpha'_0 A'^2+\alpha''_0 A''^2,$$

so wie auch, da A𝔜 und AY in einander liegen: (87. c.)

$$\frac{1}{s}=\alpha_0 (\mathcal{A})^2+\alpha'_0(\mathcal{A}')^2+\alpha''_0(\mathcal{A}'')^2,$$

woraus man ersieht, dass $\frac{1}{s}$ der zu y^2 gehörige Coeffizient in der neu entstehenden Gleichung (70. c.), so wie $\frac{1}{s\mathfrak{D}^2}$ der zu v^2 gehörige Coeffizient in der neu entstehenden Gleichung (71. c.) wird. Aehnlich werden die zu y'^2 und y''^2 gehörigen Coeffizienten der Gleichung (70. c.) $\frac{1}{s_1}$

*) Die ganze folgende Behandlung unserer Aufgabe geht von diesen Gleichungen aus, statt deren sich aus den Gleichungen (84. c. und d.) die nachstehenden

$$\frac{A}{\delta_0 C}=s\ ,\quad \frac{A'}{\delta'_0 C'}=s\ ,\quad \frac{A''}{\delta''_0 C''}=s$$

ergeben hätten, woraus man sogleich ersieht, dass man in beiden Fällen auf völlig ähnliche Ergebnisse geführt wird.

und $\frac{1}{s_2}$, so wie die zu v'^2 und v''^2 gehörigen Coeffizienten der Gleichung (71. c.) $\frac{1}{s_1 \mathfrak{D}_1'^2}$ und $\frac{1}{s_2 \mathfrak{D}_2''^2}$, wenn s_1 und s_2 das bedeuten, was aus s in der Gleichung (87. b.) wird, wenn man den in ihr vorkommenden Buchstaben A und C den Index 1 und 2 beilegt. Setzt man in den Gleichungen (87. b.) an die Stelle der senkrechten Projectionszahlen C, C′, C″ nach Anleitung der im ersten Abschnitte (§. 1. Nr. 17.) gegebenen Gleichungen (12.) die der gleichen Richtung angehörigen schiefen, so nehmen jene Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha_0}\frac{A'}{A}\cos W+\frac{1}{\alpha_0}\frac{A''}{A}\cos W'=s\ ,\quad \frac{1}{\alpha_0'}\frac{A}{A'}\cos W+\frac{1}{\alpha_0'}+\frac{1}{\alpha_0'}\frac{A''}{A'}\cos W''=s\ ,$$

$$\frac{1}{\alpha_0''}\frac{A}{A''}\cos W'+\frac{1}{\alpha_0''}\frac{A'}{A''}\cos W''+\frac{1}{\alpha_0''}=s\ ,$$

oder, wenn man sie der Reihe nach mit α_0, α_0', α_0'' multiplicirt und die Glieder, welche keine Projectionszahlen enthalten, von der linken auf die rechte Seite schafft:

(87. d.) $$\ldots\ldots\begin{cases}\frac{A'}{A}\cos W+\frac{A''}{A}\cos W'=\alpha_0 s-1\ ,\quad \frac{A}{A'}\cos W+\frac{A''}{A'}\cos W''=\alpha_0' s-1\ ,\\ \frac{A}{A''}\cos W'+\frac{A'}{A''}\cos W''=\alpha_0'' s-1\ ,\end{cases}$$

und diese Gleichungen lassen sich, wenn man die Quotienten zwischen den schiefen Projectionszahlen in Quotienten zwischen senkrechten Projectionszahlen mittelst der Gleichungen (87. a.) umwandelt, auch so schreiben:

(87. e.) $$\ldots\begin{cases}\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}\frac{C'}{C}\cos W+\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\frac{C''}{C}\cos W'=\alpha_0 s-1\ ,\quad \frac{\alpha_0'}{\alpha_0}\frac{C}{C'}\cos W+\frac{\alpha_0'}{\alpha_0''}\frac{C''}{C'}\cos W''=\alpha_0' s-1\ ,\\ \frac{\alpha_0''}{\alpha_0}\frac{C}{C''}\cos W'+\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\frac{C'}{C''}\cos W''=\alpha_0'' s-1\ .\end{cases}$$

Der Zusammenhang, welcher zwischen den Grössen A, A′, A″ und s durch die Gleichungen (87. d.) oder zwischen den Grössen C, C′, C″ und s durch die Gleichungen (87. e.) festgestellt wird, ist ein sehr merkwürdiger und versteckter, wesshalb wir ihm unsere volle Aufmerksamkeit zuzuwenden haben. Setzen wir unter der Voraussetzung, dass A nicht null sei

(88. a.) $$\frac{A'}{A}=m' \quad\text{und}\quad \frac{A''}{A}=m''$$

und in Folge dessen $\frac{1}{m'}$, $\frac{1}{m''}$, $\frac{m''}{m'}$, $\frac{m'}{m''}$ an die Stelle von $\frac{A}{A'}$, $\frac{A}{A''}$, $\frac{A''}{A'}$, $\frac{A'}{A''}$ in die Gleichungen (87. d.), so werden sie:

$$m'\cos W+m''\cos W'=\alpha_0 s-1\ ,\quad \frac{1}{m'}\cos W+\frac{m''}{m'}\cos W''=\alpha_0' s-1\ ,$$

$$\frac{1}{m''}\cos W'+\frac{m'}{m''}\cos W''=\alpha_0'' s-1$$

und man findet aus den letzten beiden:

$$m' = \frac{(\alpha_0'' s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''}{(\alpha_0' s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W''}, \quad m'' = \frac{(\alpha_0' s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''}{(\alpha_0' s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W''}$$

und setzt man in diesen an die Stelle von m′ und m″ wieder das, was sie zufolge der Gleichungen (88. a.) zu bedeuten haben, so führen sie zu folgenden Verhältnissgleichungen:

$$A : A' : A'' = (\alpha_0' s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W'' : (\alpha_0'' s - 1)\cos W + \cos W' \cos W'' : (\alpha_0' s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''; \quad \text{(88. b.)}$$

setzen wir aber in jenen Gleichungen unter der Voraussetzung, dass A′ nicht null sei

$$\frac{A}{A'} = n \quad \text{und} \quad \frac{A''}{A'} = n'' \quad \text{(88. c.)}$$

und dem zur Folge $\frac{1}{n}, \frac{1}{n''}, \frac{n''}{n}, \frac{n}{n''}$, an die Stelle von $\frac{A'}{A}, \frac{A'}{A''}, \frac{A''}{A}, \frac{A}{A''}$, so werden sie:

$$\frac{1}{n}\cos W + \frac{n''}{n}\cos W' = \alpha_0 s - 1, \quad n\cos W + n''\cos W'' = \alpha_0' s - 1,$$

$$\frac{n}{n''}\cos W' + \frac{1}{n''}\cos W'' = \alpha_0'' s - 1;$$

und drücken wir mittelst der ersten und dritten n und n″ in s aus, so erhalten wir:

$$n = \frac{(\alpha_0'' s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W'}, \quad n'' = \frac{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W'},$$

welche Gleichungen, wenn man n und n″ wieder auf ihre in den Gleichungen (88. c.) angegebene Bedeutung zurückbringt, zu den folgenden Verhältnissgleichungen führen:

$$A : A' : A'' = (\alpha_0'' s - 1)\cos W + \cos W' \cos W'' : (\alpha_0 s - 1)(\alpha_0'' s - 1) - \cos^2 W' : (\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'; \quad \text{(88. d.)}$$

setzen wir endlich unter der Voraussetzung, dass A″ nicht null sei

$$\frac{A}{A''} = p \quad \text{und} \quad \frac{A'}{A''} = p' \quad \text{(88. e.)}$$

und dem gemäss $\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}, \frac{p'}{p}, \frac{p}{p'}$, an die Stelle von $\frac{A''}{A}, \frac{A''}{A'}, \frac{A'}{A}, \frac{A}{A'}$, so werden jene Gleichungen

$$\frac{p'}{p}\cos W + \frac{1}{p}\cos W' = \alpha_0 s - 1, \quad \frac{p}{p'}\cos W + \frac{1}{p'}\cos W'' = \alpha_0' s - 1,$$

$$p\cos W' + p'\cos W'' = \alpha_0'' s - 1,$$

und drücken wir mittelst der ersten und zweiten p und p′ in s aus, so finden wir:

$$p = \frac{(\alpha_0' s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha_0' s - 1) - \cos^2 W}, \quad p' = \frac{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha_0' s - 1) - \cos^2 W},$$

woraus sich, wenn man die Zeichen p und p′ wieder auf ihre in (88. e.) angegebene Bedeutung zurückführt, die folgenden Verhältnissgleichungen ergeben:

(88. f.) $$A : A' : A'' = (\alpha'_0 s - 1)\cos W' + \cos W \cos W'' : (\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W' \\ : (\alpha_0 s - 1)(\alpha'_0 s - 1) - \cos^2 W\,.$$

Hieraus ersieht man, dass in jedem Falle mit s zugleich auch $A : A' : A''$ gegeben und also die Richtung AY bestimmt ist, und da nach Aussage der Gleichungen (87. a.)

(88. g.) $$A : A' : A'' = \frac{1}{\alpha_0} C : \frac{1}{\alpha'_0} C' : \frac{1}{\alpha''_0} C''$$

ist, so kann man diese Richtung nach Belieben durch ihre schiefen oder senkrechten Projectionszahlen angeben. Die Gleichung, wodurch s bestimmt wird, lässt sich auf sehr verschiedene Weisen erhalten. Man kann die Werthe von m′ und m″ in die erste, oder die Werthe von n und n″ in die zweite, oder die Werthe von p und p′ in die dritte der unmittelbar vor ihnen stehenden Gleichungen setzen, und gelangt so jedesmal zu der einen nachstehenden Gleichung:

(88. h.) $$(\alpha_0 s - 1)(\alpha'_0 s - 1)(\alpha''_0 s - 1) - (\alpha_0 s - 1)\cos^2 W'' - (\alpha'_0 s - 1)\cos^2 W' \\ - (\alpha''_0 s - 1)\cos^2 W - 2\cos W \cos W' \cos W'' = 0\,,$$

und schafft man aus dieser die Klammern weg, und setzt für $2\cos W \cos W' \cos W''$ seinen aus der im ersten Abschnitte (§. 1. Nr. 26.) mitgetheilten Gleichung (40.) entnommenen Werth ein, so verwandelt sie sich in:

(88. i.) $$s^3 - \left(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0}\right)s^2 + \left(\frac{\sin^2 W}{\alpha_0 \alpha'_0} + \frac{\sin^2 W'}{\alpha_0 \alpha''_0} + \frac{\sin^2 W''}{\alpha'_0 \alpha''_0}\right)s - \frac{h^2}{\alpha_0 \alpha'_0 \alpha''_0} = 0\,.$$

Auf dieselben Gleichungen stösst man aber auch, wenn man eines der Verhältnisse $A : A'$, $A : A''$, $A' : A''$ aus zweien der Verhältnissgleichungen (88. b.), (88. d.) und (88. f.) aufsucht, und die beiden erhaltenen Ausdrücke einander gleichsetzt, nämlich aus jeder der folgenden Gleichungen:

(88. k.)

$$\frac{(\alpha'_0 s - 1)(\alpha''_0 s - 1) - \cos^2 W''}{(\alpha''_0 s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''} = \frac{(\alpha''_0 s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha''_0 s - 1) - \cos^2 W'} \\ = \frac{(\alpha'_0 s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'}$$

oder

$$\frac{(\alpha'_0 s - 1)(\alpha''_0 s - 1) - \cos^2 W''}{(\alpha'_0 s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''} = \frac{(\alpha''_0 s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'} \\ = \frac{(\alpha'_0 s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha'_0 s - 1) - \cos^2 W}$$

oder

$$\frac{(\alpha''_0 s - 1)\cos W + \cos W' \cos W''}{(\alpha'_0 s - 1)\cos W' + \cos W \cos W''} = \frac{(\alpha_0 s - 1)(\alpha''_0 s - 1) - \cos^2 W'}{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'} \\ = \frac{(\alpha_0 s - 1)\cos W'' + \cos W \cos W'}{(\alpha_0 s - 1)(\alpha'_0 s - 1) - \cos^2 W}\,,$$

von denen die eine Hälfte schon in der andern Hälfte enthalten ist; es lassen sich daher die

Gleichungen (88. b.) oder (88. d.) oder (88. f.) durch die (88. h.) oder (88. i.) in einander überführen.

Um nichts zurückzulassen, was zur bessern Einsicht in die Natur der hier behandelten Gleichungen dienen könnte, bemerken wir, dass die Vergleichung des auf erster Zeile stehenden ersten und letzten Ausdrucks in den Gleichungen (88. k.) liefert:

$$(\alpha'_0 s-1)(\alpha''_0 s-1)-\cos^2 W''=\frac{[(\alpha'_0 s-1)\cos W'+\cos W\cos W''][(\alpha''_0 s-1)\cos W+\cos W'\cos W'']}{(\alpha_0 s-1)\cos W''+\cos W\cos W'},$$

welche Relation sich auch aus der Gleichung (88. h.) unter der Voraussetzung, dass nicht $\cos W''=0$ sei, entnehmen lässt, und die für $\cos W''=0$ eine identische Gleichung liefert, also selbst in diesem Falle noch volle Gültigkeit behält; ferner, dass man durch diesen Werth von $(\alpha'_0 s-1)(\alpha''_0 s-1)-\cos^2 W''$ den Verhältnissgleichungen (88. b.) die nachstehende Form geben kann:

$$A : A' : A''=\frac{1}{(\alpha_0 s-1)\cos W''+\cos W\cos W'} : \frac{1}{(\alpha'_0 s-1)\cos W'+\cos W\cos W''} : \frac{1}{(\alpha''_0 s-1)\cos W+\cos W'\cos W''},$$

welche, wenn man die ersten, zweiten und dritten Glieder zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens mit $\alpha_0\cos W''$, $\alpha'_0\cos W'$, $\alpha''_0\cos W$ multiplicirt und der Einfachheit halber

$$\frac{\cos W\cos W'-\cos W''}{\alpha_0\cos W''}=\lambda'', \quad \frac{\cos W\cos W''-\cos W'}{\alpha'_0\cos W'}=\lambda', \quad \frac{\cos W'\cos W''-\cos W}{\alpha''_0\cos W}=\lambda \qquad \textbf{(88. l.)}$$

setzt, übergeht in:

$$\alpha_0 A : \alpha'_0 A' : \alpha''_0 A''=\frac{1}{(s+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{(s+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{(s+\lambda)\cos W}$$

oder mit Rücksicht auf die Verhältnissgleichungen (88. g.) in: **(88. m.)**

$$C : C' : C''=\frac{1}{(s+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{(s+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{(s+\lambda)\cos W}$$

und zu der gleichen Relation führen auch die Gleichungen (88. d.) und (88. f.) mittelst der auf zweiter und dritter Zeile stehenden Ausdrücke (88. k.). Durch die aus (88. m.) zu schöpfenden Verhältnisse zwischen C, C', C'' geht aber die erste Gleichung (87. e.) über in:

$$\frac{1}{\alpha'_0(s+\lambda')}\,\frac{\cos W''\cos W}{\cos W'}+\frac{1}{\alpha''_0(s+\lambda)}\,\frac{\cos W'\cos W''}{\cos W}=\frac{s-\frac{1}{\alpha_0}}{s+\lambda''}$$

und diese lässt sich, weil $\dfrac{s-\frac{1}{\alpha_0}}{s+\lambda''}=1-\dfrac{1+\alpha_0\lambda''}{\alpha_0(s+\lambda'')}$ ist und $=1-\dfrac{1}{\alpha_0(s+\lambda'')}\,\dfrac{\cos W\cos W'}{\cos W''}$ wird, wenn man für λ'' im Zähler seinen Werth aus (88. l.) nimmt, auch so schreiben:

$$\frac{1}{\alpha_0(s+\lambda'')\cos^2 W''}+\frac{1}{\alpha'_0(s+\lambda')\cos^2 W'}+\frac{1}{\alpha''_0(s+\lambda)\cos^2 W}=\frac{1}{\cos W\cos W'\cos W''}. \qquad \textbf{(88. n.)}$$

Diese letzte Gleichung kann wie die (88. h.) oder (88. i.) zur Auffindung der Werthe von s dienen und dann geben die Verhältnisse (88. m.) hier wie die (88. b.) oder (88. d.) oder

(88. f.) dort die dazu gehörige Richtung an die Hand. Dass die Gleichung (88. n.) in der That mit den frühern vollkommen übereinstimme, davon kann man sich noch ins Besondere auf folgende Art überzeugen. Schafft man nämlich aus der Gleichung (88. n.) sämmtliche Nenner weg, wodurch sie wird:

$$\frac{\cos W \cos W'}{\alpha_0 \cos W''}(s+\lambda')(s+\lambda)+\frac{\cos W \cos W''}{\alpha'_0 \cos W'}(s+\lambda'')(s+\lambda)+\frac{\cos W' \cos W''}{\alpha''_0 \cos W}(s+\lambda'')(s+\lambda')$$
$$=(s+\lambda'')(s+\lambda')(s+\lambda)$$

oder weil den in (88. l.) eingeführten Bezeichnungen zur Folge

$$\frac{\cos W \cos W'}{\alpha_0 \cos W''}=\lambda''+\frac{1}{\alpha_0},\quad \frac{\cos W \cos W''}{\alpha'_0 \cos W'}=\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0},\quad \frac{\cos W' \cos W''}{\alpha''_0 \cos W}=\lambda+\frac{1}{\alpha''_0}$$

ist:

(88. o.) $$\begin{cases}(\lambda''+\frac{1}{\alpha_0})(s+\lambda')(s+\lambda)+(\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0})(s+\lambda'')(s+\lambda)+(\lambda+\frac{1}{\alpha''_0})(s+\lambda'')(s+\lambda') \\ \qquad =(s+\lambda'')(s+\lambda')(s+\lambda)\end{cases}$$

und durch Auflösung der in ihr befindlichen Klammern sich verwandelt in:

(88. p.) $$\begin{cases}s^3-(\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0})s^2-[\lambda\lambda'+\lambda\lambda''+\lambda'\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}(\lambda+\lambda')+\frac{1}{\alpha'_0}(\lambda+\lambda'')+\frac{1}{\alpha''_0}(\lambda'+\lambda'')]\,s \\ \qquad -(2\lambda\lambda'\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}\lambda\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0}\lambda\lambda''+\frac{1}{\alpha''_0}\lambda'\lambda'')=0.\end{cases}$$

Diese Gleichung ist aber keine andere als die (88. i.), indem

$$\lambda\lambda'+\lambda\lambda''+\lambda'\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}(\lambda+\lambda')+\frac{1}{\alpha'_0}(\lambda+\lambda'')+\frac{1}{\alpha''_0}(\lambda'+\lambda'')+\frac{\sin^2 W}{\alpha_0\alpha'_0}+\frac{\sin^2 W'}{\alpha_0\alpha''_0}+\frac{\sin^2 W''}{\alpha'_0\alpha''_0}=0$$

und

$$2\lambda\lambda'\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}\lambda\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0}\lambda\lambda''+\frac{1}{\alpha''_0}\lambda'\lambda''=\frac{h^2}{\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0}$$

ist, wie man sogleich einsieht, wenn man beachtet, dass

(88. q.) $$\begin{cases}\lambda\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0}\lambda+\frac{1}{\alpha''_0}\lambda'+\frac{\sin^2 W''}{\alpha'_0\alpha''_0}=0\,,\quad \lambda\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}\lambda+\frac{1}{\alpha''_0}\lambda''+\frac{\sin^2 W'}{\alpha_0\alpha''_0}=0\,, \\ \lambda'\lambda''+\frac{1}{\alpha_0}\lambda'+\frac{1}{\alpha'_0}\lambda''+\frac{\sin^2 W}{\alpha_0\alpha'_0}=0 \\ \text{und} \\ 2\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0\lambda''\lambda'\lambda+\alpha_0\alpha'_0\lambda''\lambda'+\alpha_0\alpha''_0\lambda''\lambda+\alpha'_0\alpha''_0\lambda'\lambda=h^2\end{cases}$$

in Gemässheit der Bezeichnungen (88. l.) wird. Alle diese Gleichungen sind gleichwie die (88. h.) und (88. i.) vom dritten Grade in Bezug auf s, sie liefern also allgemein gesprochen drei Werthe für diese Grösse und diese drei Werthe führen dann, wenn sie sämmtlich reell und von einander verschieden sind, zu den drei Axen des gesuchten Coordinatensystems hin, weil, wie wir vorhin schon gesehen haben, jede Axe durch die gleichen Bedingungen bestimmt wird. Die jedesmalige Existenz des gesuchten rechtwinkligen Coordinatensystems ist demnach

ausser allen Zweifel gestellt, wenn sich zeigen lässt, dass die Gleichung (88. h.) oder (88. i.) oder (88. n.) stets drei reelle Wurzeln liefert, die von einander verschieden sind, und dann stets nur zu drei bestimmten Geraden führen, in denen die Coordinatenaxen liegen, oder wenn zwei davon oder alle drei einander gleich werden sollten, die Eigenschaft besitzen, dass die gleichen Wurzeln stets zu einer ganz oder theilweise unbestimmt bleibenden Richtung hinführen, so dass man aus diesen unbestimmt bleibenden Richtungen dann immer beliebig zwei auswählen kann, die das rechtwinklige System zu liefern im Stande sind. Diese nicht ohne theoretische Schwierigkeiten durchzuführenden Untersuchungen übertragen wir der folgenden Nummer.

219) Obschon die in der vorigen Nummer aufgefundenen Gleichungen mit denen eine sehr grosse Aehnlichkeit haben, auf welche man stösst, wenn man im rechtwinkligen Coordinatensysteme die Lage der Hauptaxen im Ellipsoid oder Hyperboloid aufsucht, so ist doch der Bau der erstern zusammengesetzter, was daher rührt, dass neben den in den Nennern der Gleichung (88. n.) vorkommenden Factoren $s+\lambda''$, $s+\lambda'$, $s+\lambda$ auch noch die α_0, α'_0, α''_0 vorkommen; desshalb sehen wir uns bewogen, zu deren besserer Aufschliessung noch die folgenden Betrachtungen hinzuzufügen. Der Gang, durch den wir zu den Gleichungen der vorigen Nummer gelangt sind, stellte immer die Voraussetzung an seine Spitze, dass eine der Projectionszahlen A, A′, A″ oder C, C′, C″ nicht null sei; es verlangt daher der Fall noch eine besondere Berücksichtigung, wo jene Projectionszahlen alle drei null sein könnten. Nun können zwar weder die drei schiefen noch die drei senkrechten Projectionszahlen von irgend einer bestimmten Richtung je gleichzeitig null werden, aber da in den Gleichungen (87. d.) und (87. e.) immer nur die Verhältnisse von je zweien auftreten und diese in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen müssten, da wo die Richtung, worauf jene Projectionszahlen sich beziehen, unbestimmt bleiben könnte, so verlangt dieser besondere Fall noch eine nähere Betrachtung. Den Gleichungen (88. m.) zur Folge nehmen die Projectionszahlen der gesuchten Richtung nur in dem einen Falle ein unbestimmtes Verhältniss zu einander an, in Folge dessen die Richtung selbst eine unbestimmte wird, wenn gleichzeitig

$$(s+\lambda'')\cos W'', \quad (s+\lambda')\cos W', \quad (s+\lambda)\cos W$$

entweder unendlich grosse Werthe annehmen, oder wenn sie null werden. Diese Ausdrücke werden, wenn man in sie für λ'', λ', λ das schreibt, was sie zufolge der Gleichungen (88. l.) zu bedeuten haben:

$$s\cos W''+\frac{\cos W\cos W'-\cos W''}{\alpha_0}, \quad s\cos W'+\frac{\cos W\cos W''-\cos W'}{\alpha'_0}, \quad s\cos W+\frac{\cos W'\cos W''-\cos W}{\alpha''_0}$$

und zeigen so, dass sie nur mit s zugleich unendlich grosse Werthe erlangen können; ein unendlich grosser Werth von s aber würde in Gemässheit der Gleichung (87. c.) ein Glied der zu findenden Gleichung vernichten und dadurch zu verstehen geben, dass sie weder ein Ellipsoid noch ein Hyperboloid in sich enthält. Beschränken wir daher unsere Betrachtungen nur auf Flächen dieser Art, wie bisher immer, so brauchen wir unendlich grosse Werthe der obigen Ausdrücke, als nie auftretend, nicht weiter zu beachten, und erhalten als Bedingungen einer unbestimmten Axenrichtung die drei gleichzeitig bestehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} s\cos W''+\frac{\cos W\cos W'-\cos W''}{\alpha_0}=0, \quad s\cos W'+\frac{\cos W\cos W''-\cos W'}{\alpha'_0}=0,\\ s\cos W+\frac{\cos W'\cos W''-\cos W}{\alpha''_0}=0, \end{aligned}\right\}\ldots \quad \textbf{(89. a.)}$$

aus welchen sich ergiebt

$$s = -\frac{\cos W \cos W' - \cos W''}{\alpha_0 \cos W''}, \quad s = -\frac{\cos W \cos W'' - \cos W'}{\alpha'_0 \cos W'},$$

$$s = -\frac{\cos W' \cos W'' - \cos W}{\alpha''_0 \cos W}$$

oder mit Zuziehung der in (88. l.) eingeführten Bezeichnungen:

(89. b.) $$s = -\lambda'', \quad s = -\lambda', \quad s = -\lambda,$$

und da diese drei Gleichungen gleichzeitig bestehen müssen, so sieht man, dass zum Auftreten unbestimmter Axenrichtungen Flächen von besonderer Art erfordert werden, deren Natur in den Bedingungen

(89. c.) $$\lambda'' = \lambda' = \lambda$$

enthalten ist, worin sich eine gewisse Abhängigkeit zwischen den Coeffizienten der ursprünglich gegebenen Gleichung und den Axenwinkeln des Coordinatensystems, auf welches sie bezogen ist, ausspricht. Hierbei verdient noch der Fall, wo eine der drei Grössen $\cos W$, $\cos W'$, $\cos W''$ null wird, eine besondere Erwähnung. Aus den Bedingungen (89. a.) geht hervor, dass in diesem Falle gleichzeitig noch ein zweiter der erwähnten Kosinuse null sein müsste, und dann entweder auch noch der dritte, und es wäre die ursprünglich gegebene Gleichung schon die verlangte, oder es nähme $\frac{1}{s}$ den Werth von einem der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 an, wobei sich die diesem Coeffizienten entsprechende Axe zwar scheinbar nicht bestimmte, aber doch immer mit den zwei andern Axen zugleich gegeben wäre, ausser wenn $\alpha_0 = \alpha'_0 = \alpha''_0$ und auch der dritte von den obigen Kosinusen null würde. — Um die Folgen der Bedingungen (89. c.) zu entdecken, setzen wir in der Gleichung (88. o.) $\lambda'' = \lambda' = \lambda$, wodurch sie die folgende Form annimmt:

(89. d.) $$(s + \lambda)^2 \left(s - \frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha'_0} - \frac{1}{\alpha''_0} - 2\lambda\right) = 0$$

und nun zeigt, dass sie in der That zwei Wurzeln von der Grösse $-\lambda$, wie in den Gleichungen (89. b.) angegeben ist, erhält, so wie die Bedingungen (89. c.) an ihr erfüllt sind, und dass ihre dritte Wurzel dann $2\lambda + \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0}$ ist; es wird mithin diese dritte Wurzel den vorigen zweien gleich, wenn neben der Bedingung (89. c.) auch noch die

(89. e.) $$\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0} + 2\lambda = -\lambda \text{ oder } -3\lambda = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0}$$

stattfindet. Hieraus folgt, dass nur dann zweien Axen des gesuchten rechtwinkligen Systems eine unbestimmte Richtung angewiesen wird, wenn die Bedingungen (89. c.) erfüllt sind und die aus ihnen hervorgehende Gleichung (89. d.) zwei gleiche Wurzeln in sich trägt, was in Folge der Gleichung (87. c.) zwei gleiche, bei den Quadraten der Coordinaten vorkommende Coeffizienten in der am rechtwinkligen Coordinatensysteme sich bildenden Gleichung nach sich zieht. Unter solchen Umständen ist aber die gegebene Fläche eine Rotationsfläche, deren Rotationsaxe die aus der dritten Wurzel der Gleichung (89. d.) hervorgehende dritte Coordinatenaxe des rechtwinkligen Systems ist, welcher Rotationsaxe eine völlig bestimmte Gerade ange-

wiesen wird, wenn der Werth der dritten Wurzel von dem der zwei gleichen Wurzeln verschieden ist; ist hingegen diese dritte Wurzel den beiden vorigen gleich, welches geschieht, wenn noch überdiess die Bedingung (89. e.) vorhanden ist, so bleibt selbst die Richtung der ihr entsprechenden dritten Coordinatenaxe noch unbestimmt und es werden in Folge der drei gleichen Werthe von s die drei zu den Quadraten der Coordinaten gehörigen Coeffizienten in der am rechtwinkligen Systeme resultirenden Gleichung einander gleich, wodurch angezeigt wird, dass die untersuchte Fläche zweiter Ordnung nichts anders als eine Kugelfläche sein kann. Auch folgt umgekehrt, dass jedesmal, wenn die cubische Gleichung in s für diese Grösse zwei gleiche Wurzeln liefert, die Bedingung (89. c.) durch die ursprünglich gegebene Gleichung sich bewähren müsse, und auch noch die (89. e.), wenn jene Gleichung für s drei gleiche Wurzeln liefert; denn im erstern Falle werden zwei von den Coeffizienten, welche zu den Quadraten der Coordinaten in der am rechtwinkligen Systeme entstehenden Gleichung gehören, und im letztern Falle alle drei einander gleich, also hat man es im erstern Falle mit einer Rotationsfläche, im andern mit einer Kugel zu thun, mithin bleibt in jenem Falle die Lage zweier Axen, in diesem Falle die Lage aller drei Axen des rechtwinkligen Systems nothwendiger Weise unbestimmt, daher finden stets die Bedingungen (89. c.) und in letzterm Falle auch noch die (89. e.) statt.

220) Nach diesen Auseinandersetzungen ist die jedesmalige Existenz des gesuchten rechtwinkligen Systems und damit das unbedingte Vorhandensein von senkrecht auf einander stehenden conjugirten Diametralebenen im Ellipsoid sowohl als im Hyperboloid erwiesen, wenn gezeigt werden kann, dass die cubische Gleichung, wodurch s bestimmt wird, ihrer Natur nach für diese Grösse stets drei reelle Werthe liefern müsse. Da sich der Beweis hierfür nicht auf die zierliche Weise wie bei der Aufsuchung der Hauptaxen da, wo man von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme ausgeht, führen lässt, welche man in der nach einem lithographirten Memoire Cauchy's von Moth herausgegebenen Schrift „Ueber die Theorie des Lichts" nachlesen kann, weil die in der Gleichung (88. n.) neben $s+\lambda''$, $s+\lambda'$, $s+\lambda$ stehenden Factoren hier nicht wie dort stets positive Grössen sind, so werden wir zu diesem Ende einen andern Weg einschlagen, der nicht minder anschaulich ist, und uns noch den Vortheil bringt, dass wir den allerdings schwierigen Gegenstand, von welchem hier die Rede ist, noch von einer andern Seite beleuchten können. Da wir nämlich schon wissen, dass die gesuchten Richtungen AY, AY′, AY″ einem rechtwinkligen Coordinatensysteme angehören, falls sie möglich sind, so müssen zwischen den ihnen zukommenden Projectionszahlen, wofür wir die obigen Bezeichnungen beibehalten werden, jene im ersten Abschnitte (§. 2. Nr. 20.) mitgetheilten Relationen (21.) stattfinden, denen gemäss man hat:

$$AC_1 + A'C_1' + A''C_1'' = 0\,,\quad AC_2 + A'C_2' + A''C_2'' = 0\,,\quad A_1C_2 + A_1'C_2' + A_1''C_2''\,. \qquad \textbf{(89. f.)}$$

Bezeichnet man nun den zur Richtung AY gehörigen Werth von s durch s_0, den zur Richtung AY′ gehörigen durch s_1 und den zur Richtung AY″ gehörigen durch s_2, so ist den Gleichungen (88. m.) zur Folge:

$$A : A' : A'' = \frac{1}{\alpha_0(s_0+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{\alpha_0'(s_0+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{\alpha_0''(s_0+\lambda)\cos W}\,,$$

$$A : A_1' : A_1'' = \frac{1}{\alpha_0(s_1+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{\alpha_0'(s_1+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{\alpha_0''(s_1+\lambda)\cos W}$$

und

$$C_1 : C_1' : C_1'' = \frac{1}{(s_1+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{(s_1+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{(s_1+\lambda)\cos W},$$

$$C_2 : C_2' : C_2'' = \frac{1}{(s_2+\lambda'')\cos W''} : \frac{1}{(s_2+\lambda')\cos W'} : \frac{1}{(s_2+\lambda)\cos W};$$

mittelst dieser Verhältnissgleichungen gehen aber die Gleichungen (89. f.) über in:

(89. g.)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_0(s_0+\lambda'')(s_1+\lambda'')\cos^2 W''} + \dfrac{1}{\alpha_0'(s_0+\lambda')(s_1+\lambda')\cos^2 W'} + \dfrac{1}{\alpha_0''(s_0+\lambda)(s_1+\lambda)\cos^2 W} = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha_0(s_0+\lambda'')(s_2+\lambda'')\cos^2 W''} + \dfrac{1}{\alpha_0'(s_0+\lambda')(s_2+\lambda')\cos^2 W'} + \dfrac{1}{\alpha_0''(s_0+\lambda)(s_2+\lambda)\cos^2 W} = 0, \\ \dfrac{1}{\alpha_0(s_1+\lambda'')(s_2+\lambda'')\cos^2 W''} + \dfrac{1}{\alpha_0'(s_1+\lambda')(s_2+\lambda')\cos^2 W'} + \dfrac{1}{\alpha_0''(s_1+\lambda)(s_2+\lambda)\cos^2 W} = 0, \end{cases}$$

von denen die erste in Betreff der Axen AY und AY′ ganz dasselbe aussagt, was die zweite in Betreff der Axen AY und AY″ oder die dritte in Betreff der Axen AY′ und AY″. Schafft man in der ersten dieser Gleichungen die Factoren $s_1+\lambda''$, $s_1+\lambda'$, $s_1+\lambda$ aus den Nennern weg nnd setzt man für einen Augenblick der Kürze wegen:

(89. h.) $$\alpha_0(s_0+\lambda'')\cos^2 W'' = M'', \quad \alpha_0'(s_0+\lambda')\cos^2 W' = M', \quad \alpha_0''(s_0+\lambda)\cos^2 W = M,$$

so nimmt sie die folgende Gestalt an:

$$\frac{(s_1+\lambda)(s_1+\lambda')}{M''} + \frac{(s_1+\lambda)(s_1+\lambda'')}{M'} + \frac{(s_1+\lambda')(s_1+\lambda'')}{M} = 0$$

und wird, wenn man die Klammern, worin s vorkommt, auflöst und nach den Potenzen dieser Grösse ordnet:

(89. i.) $$\left(\frac{1}{M''}+\frac{1}{M'}+\frac{1}{M}\right)s_1^2 + \left(\frac{\lambda+\lambda'}{M''}+\frac{\lambda+\lambda''}{M'}+\frac{\lambda'+\lambda''}{M}\right)s_1 + \frac{\lambda\lambda'}{M''}+\frac{\lambda\lambda''}{M'}+\frac{\lambda'\lambda''}{M} = 0,$$

welche letzte Gleichung in Bezug auf s_1 quadratisch ist, und dadurch zu verstehen giebt, dass, wenn von den drei Grössen s_0, s_1, s_2 die eine s_0 gegeben ist, man mittelst ihrer die andere s_1 finden kann, wobei man gleichzeitig zwei Werthe für diese Grösse erhält; weil aber die zweite Gleichung (89. g.) in Bezug auf s_2 genau die gleiche ist, wie die erste in Bezug auf s_1, so sieht man ein, dass die zwei Werthe, die man aus der Gleichung (89. i.) für s_1 findet, wenn s_0 gegeben ist, die zwei Werthe s_1 und s_2 sind, welche vereinigt mit dem gegebenen s_0 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in s bilden, und von denen der eine eben so gut wie der andere als zur Axe AY′ gehörig genommen werden kann. Sieht man daher s_0 als eine der Gleichung (88. n.) angehörige reelle Wurzel an, (und da diese Gleichung vom dritten Grade ist, so hat sie immer wenigstens eine solche Wurzel), so liefert die Gleichung (89. i.) zu dieser einen Wurzel die beiden andern in der cubischen Gleichung enthaltenen, welche daher reell oder imaginär sein werden, je nachdem es die beiden in der quadratischen Gleichung enthaltenen sind. Bekanntlich besteht das Merkmal, dass die beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung von der Form

$$a x^2 + b x + c = 0$$

reell sind, darin, dass $b^2 - 4ac$ nie negativ werden darf; es werden daher die beiden aus der Gleichung (89. i.) zu schöpfenden Werthe von s_1 reell sein, wenn der Ausdruck

$$\left(\frac{\lambda+\lambda'}{M''}+\frac{\lambda+\lambda''}{M'}+\frac{\lambda'+\lambda''}{M}\right)^2-4\left(\frac{1}{M''}+\frac{1}{M'}+\frac{1}{M}\right)\left(\frac{\lambda\lambda'}{M''}+\frac{\lambda\lambda''}{M'}+\frac{\lambda'\lambda''}{M}\right)$$

nie eine negative Zahl hergeben kann, und diese Eigenschaft kommt ihm in der That zu; denn er lässt sich durch eine leichte Umformung abändern in:

$$\left(\frac{\lambda-\lambda'}{M''}+\frac{\lambda-\lambda''}{M'}+\frac{\lambda'-\lambda''}{M}\right)^2,$$

womit also bewiesen ist, dass die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in s ihrer Natur nach stets sämmtlich reell sein müssen und unter allen Umständen eine gleich einfache Darstellung gestatten. Dieser Beweis bleibt wesentlich der gleiche, wenn man auch die ursprüngliche Gleichung schon auf ein rechtwinkliges System bezogen voraussetzt, in welcher noch die Glieder vorhanden sind, welche die Producte der Coordinaten in sich aufnehmen.

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, wollen wir noch eine niedliche Relation zwischen den in den Nennern der Gleichungen (89. g.) auftretenden Factoren mittheilen. Zu diesem Ende schreiben wir die genannten Gleichungen so:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{s_2+\lambda''}{N''}+\frac{s_2+\lambda'}{N'}+\frac{s_2+\lambda}{N}=0\,,\quad \frac{s_1+\lambda''}{N''}+\frac{s_1+\lambda'}{N'}+\frac{s_1+\lambda}{N}=0\,,\\&\frac{s_0+\lambda''}{N''}+\frac{s_0+\lambda'}{N'}+\frac{s_0+\lambda}{N}=0\,,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots \quad (89.\ k.)$$

wo zur Bequemlichkeit des Schreibens

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_0(s_0+\lambda'')(s_1+\lambda'')(s_2+\lambda'')\cos^2 W''=N''\,,\quad \alpha_0'(s_0+\lambda')(s_1+\lambda')(s_2+\lambda')\cos^2 W'=N'\,,\\&\alpha_0''(s_0+\lambda)(s_1+\lambda)(s_2+\lambda)\cos^2 W=N\end{aligned}\right\}\quad (89.\ l.)$$

auf einen Augenblick gesetzt worden ist. Multiplicirt man die erste und zweite der Gleichungen (89. k.) mit $s_1+\lambda$ und $s_2+\lambda$, die erste und dritte mit $s_0+\lambda$ und $s_2+\lambda$, die zweite und dritte mit $s_0+\lambda$ und $s_1+\lambda$ und subtrahirt man sodann die jedesmaligen zwei Resultate von einander, so erhält man:

$$\frac{(s_2+\lambda'')(s_1+\lambda)-(s_2+\lambda)(s_1+\lambda'')}{N''}+\frac{(s_2+\lambda')(s_1+\lambda)-(s_2+\lambda)(s_1+\lambda')}{N'}=0\,,$$

$$\frac{(s_0+\lambda)\ (s_2+\lambda'')-(s_2+\lambda)(s_0+\lambda'')}{N''}+\frac{(s_0+\lambda)(s_2+\lambda')-(s_2+\lambda)(s_0+\lambda')}{N'}=0\,,$$

$$\frac{(s_0+\lambda'')(s_1+\lambda)-(s_0+\lambda)(s_1+\lambda'')}{N''}+\frac{(s_0+\lambda')(s_1+\lambda)-(s_0+\lambda)(s_1+\lambda')}{N'}=0\,,$$

welche sich sogleich zusammenziehen lassen in:

$$\frac{(s_1-s_2)(\lambda''-\lambda)}{N''}+\frac{(s_1-s_2)(\lambda'-\lambda)}{N'}=0\,,\quad \frac{(s_0-s_2)(\lambda''-\lambda)}{N''}+\frac{(s_0-s_2)(\lambda'-\lambda)}{N'}=0\,,$$

$$\frac{(s_0-s_1)(\lambda''-\lambda)}{N''}+\frac{(s_0-s_1)(\lambda'-\lambda)}{N'}=0\,,$$

und in dieser Form aussagen, dass

(89. m.) $$\frac{\lambda''-\lambda}{N''}+\frac{\lambda'-\lambda}{N'}=0$$

unter der Voraussetzung sein müsse, dass keine zwei von den drei Grössen s_0, s_1, s_2 einander gleich sind; denn die Gleichheit von zweien dieser Grössen hätte, wie wir vorhin gesehen haben, die Bedingungen (89. c.) zur Folge, wodurch allein schon die drei vor (89. m.) stehenden Gleichungen befriedigt würden. Weil aber die Behandlung, welche uns zur Gleichung (89. m.) durch Elimination der dritten Glieder in den Gleichungen (89. k.) geführt hat, eben so gut auch auf die Elimination des zweiten oder ersten Glieds in jenen Gleichungen ausgehen kann, so werden neben der Gleichung (89. m.) auch noch die bestehen, welche man aus ihr durch eine an den Accenten vorgenommene Vertauschung der ersten oder zweiten Art erhält, nämlich:

(89. n.) $$\frac{\lambda''-\lambda'}{N''}+\frac{\lambda-\lambda'}{N}=0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda-\lambda''}{N}+\frac{\lambda'-\lambda''}{N'}=0\,.$$

Schafft man aus den Gleichungen (89. m. und n.) die Nenner weg und setzt man wieder für N″, N′, N was sie den Gleichungen (89. l.) zur Folge zu bedeuten haben, so stösst man auf die nachstehenden bemerkenswerthen Relationen:

(89. o.) $$\alpha_0(\lambda'-\lambda)(s_0+\lambda'')(s_1+\lambda'')(s_2+\lambda'')\cos^2 W''=\alpha_0'(\lambda-\lambda'')(s_0+\lambda')(s_1+\lambda')(s_2+\lambda')\cos^2 W'$$
$$=\alpha_0''(\lambda''-\lambda')(s_0+\lambda)(s_1+\lambda)(s_2+\lambda)\cos^2 W\,,$$

welche Gleichungen liefern, die in Bezug auf jede der drei Grössen s_0, s_1, s_2 nur vom ersten Grade sind, und dadurch zu verstehen geben, dass jede von diesen drei Grössen durch die zwei andern in völlig bestimmter Weise gegeben ist, sowie die (89. g.) an die Hand geben, dass aus einer von jenen drei Grössen gleichzeitig die beiden andern in solcher Weise gefunden werden, dass man mit gleichem Rechte jede von ihnen zur zweiten und dann die noch übrig bleibende zur dritten nehmen könne. Diese Eigenthümlichkeiten sind Folgen des Umstandes, dass unsere Auflösung drei bestimmte gerade Linien den drei Axen des gesuchten rechtwinkligen Systems in unbestimmter Weise vorschreibt, nämlich in solcher Weise, dass jede einzelne von diesen Axen in jede beliebige der drei Geraden, hierauf jede der zwei andern Axen beliebig in die zwei noch übrigen Geraden gelegt werden kann. Aus den Gleichungen (89. o.) kann man wieder rückwärts durch Elimination von je einer der drei Grössen s_0, s_1, s_2 zu den Gleichungen (89. g.) gelangen. Zum Ueberflusse wollen wir noch anmerken, dass die Wegschaffung der Nenner N, N′, N″ aus den Gleichungen (89. m. und n.), sowie überhaupt der aus solchen Factoren, wie diese, gebildeten Nenner, stets erlaubt ist, weil die Fläche, wo solche Factoren unendlich grosse Werthe annehmen könnten, von unserer Betrachtung ausgeschlossen sind.

221) Wir werden jetzt die den bisher entwickelten Eigenschaften der Mittelpunctsflächen analogen Eigenschaften der Paraboloide vor Augen führen. Wir haben schon oben in Nr. 207. gefunden, dass, nachdem man dasjenige Coordinatensystem aufgesucht hat, an welchem die Fläche zweiter Ordnung eine Gleichung von einer der in (55. a.) mitgetheilten Formen liefert, aus deren Theil der zweiten Dimension die Glieder verschwunden sind, welche das Product von zwei Coordinaten zum Factor haben, in welcher aber noch der Theil der ersten Dimension zurückgeblieben ist, was sich als stets ausführbar erwiesen hat, man durch parallele und gleichläufige Verlegung der Axen des Systems, die wir durch AX, AX′, AX″ bezeichnen wollen,

durch einen neuen Punct O hindurch, welche Axen wir in dieser neuen Lage durch O X, O X′, O X″ vorstellen werden, es unter der Voraussetzung, dass auf der linken Seite der Gleichungen (55. a.) keines ihrer Glieder verloren gegangen ist, durch die geeignete Wahl des Punctes O immer dahin bringen kann, dass der ganze Theil der ersten Dimension aus der auf diese Axen O X, O X′, O X″ sich beziehenden Gleichung verschwindet, und man zu einer Gleichung von einer der in (62. e.) oder (62. f.) angegebenen Formen gelangt; daselbst hat es sich aber auch gezeigt, dass die Wegschaffung des ganzen Theils der ersten Dimension durch keine Wahl des Punctes O bewirkt werden kann, wenn die Fläche zweiter Ordnung von solcher Art ist, dass aus der auf die Axen A X, A X′, A X″ sich beziehenden Gleichung, in welcher kein Glied mehr enthalten ist, welches das Product von zwei Coordinaten zum Factor hätte, zugleich auch noch eines von den Gliedern ihres Theils der zweiten Dimension verschwindet, welches das Quadrat von einer der drei Coordinaten in sich trüge, dass vielmehr in einem solchen Falle, falls die Fläche zweiter Ordnung keine Cylinderfläche ist, nothwendiger Weise in der Gleichung eines von den Gliedern ihres Theils der ersten Dimension zurückbleibt, und sie daher eine von den in (62. g. bis k.) aufgeführten Formen annimmt. Zugleich wurde dort von uns erkannt, dass man da, wo dieses geschieht, durch die Wahl des Punctes O es immer in seiner Gewalt hat, das constante Glied aus der auf die Axen O X, O X′, O X″ sich beziehenden Gleichung zum Verschwinden zu bringen, wodurch eine Gleichung von einer der in (62. m.) oder (62. o.) angegebenen Formen entsteht, von denen die erstern die Flächen darstellen, welchen wir den Namen Paraboloid beigelegt haben, und die in (64. b.) als auf die ursprünglichen Axen A X, A X′, A X″ sich beziehend aufgestellt worden sind, wobei den obigen Erörterungen gemäss A immer einer von den Puncten des durch diese Gleichung dargestellten Paraboloids selber ist. Nun werden wir noch zeigen, dass aus diesen letztern Gleichungen immer wieder andere von derselben Form sich herleiten lassen, welche das gleiche Paraboloid darstellen, aber auf andere Coordinatensysteme sich beziehen.

Versucht man es, in die vordere Gleichung (64. b.) für x, x′, x″ die für sie in (41. a.) oder (41. e.), oder in die hintere Gleichung (64. b.) für u, u′, u″ die für sie in (41. c.) oder (41. f.) gegebenen Ausdrücke einzusetzen, so gelangt man zwar zu neuen Gleichungen, von denen sich jedoch leicht einsehen lässt, dass sie an keinen neuen Axen wieder eine Gleichung von der Form (64. b.) liefern können. Erwägt man aber, dass durch die angezeigten Substitutionen nur solche neue Coordinatenaxen in die Betrachtung kommen, die mit denen, an welchen die Gleichung, von der man ausgegangen ist, Statt hat, einerlei Coordinatenspitze, die hier durch A bezeichnet worden ist, besitzen, so wird man auf den Gedanken gebracht, ob nicht vielleicht doch wieder eine Gleichung von der Form (64. b.) aufgefunden werden könnte, wenn man neue Coordinatensysteme mit abgeänderter Spitze zur Hilfe nähme. Um diese Frage zu entscheiden führen wir anstatt der Axen A X, A X′, A X″, an welchen die in der Form (64. b.) gegebene Gleichung Statt hat, drei neue mit den eben genannten parallele und gleichläufige ein, die aber nicht mehr durch den Punct A, sondern durch einen andern O hindurch gehen, dessen schiefe oder senkrechte Coordinaten an den vorigen Axen ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' sein mögen, je nachdem die Gleichung schiefe oder senkrechte Coordinaten in sich enthält, welche neue Axen wir zum Unterschiede von den vorigen durch O X, O X′, O X″ vorstellen wollen. Bezeichnet man nun die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines beliebigen Punctes, der an dem vorigen Systeme die x, x′, x″ oder u, u′, u″ hatte, an dem neuen Systeme durch x_0, x'_0, x''_0 oder u_0, u'_0, u''_0, so finden wir aus der gegebenen Gleichung die, wodurch

dasselbe Paraboloid an den neuen Axen dargestellt wird, wenn wir in jene für x, x′, x″ oder u, u′, u″ die für sie in den Gleichungen (44.) ausgesprochenen Zusammensetzungen einbringen. Auf solche Weise verwandelt sich aber die vordere oder hintere Gleichung (64. b.) in:

(90. a.) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 x_0^2 + \alpha_0' x_0'^2 + 2\alpha_0 \xi x_0 + 2\alpha_0' \xi' x_0' + 2\gamma_0'' x_0'' + \alpha_0 \xi^2 + \alpha_0' \xi'^2 + 2\gamma_0'' \xi'' = 0 \\ \text{oder} \\ \delta_0 u_0^2 + \delta_0' u_0'^2 + 2\delta_0 \eta u_0 + 2\delta_0' \eta' u_0' + 2\zeta_0'' u_0'' + \delta_0 \eta^2 + \delta_0' \eta'^2 + 2\zeta_0'' \eta'' = 0 \end{array}\right.$$

oder wenn man, um aus ihnen deren constantes Glied wegzuschaffen,

(90. b.) $$\alpha_0 \xi^2 + \alpha_0' \xi'^2 + 2\gamma_0'' \xi'' = 0 \quad \text{oder} \quad \delta_0 \eta^2 + \delta_0' \eta'^2 + 2\zeta_0'' \eta'' = 0$$

setzt, in:

(90. c.) $$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 x_0^2 + \alpha_0' x_0'^2 + 2\alpha_0 \xi x_0 + 2\alpha_0' \xi' x_0' + 2\gamma_0'' x_0'' = 0 \\ \text{oder} \\ \delta_0 u_0^2 + \delta_0' u_0'^2 + 2\delta_0 \eta u_0 + 2\delta_0' \eta' u_0' + 2\zeta_0'' u_0'' = 0\,; \end{array}\right.$$

es gehen aber die Gleichungen (90. b.) aus denen (64. b.) hervor, wenn man in letzteren an die Stelle von x, x′, x″ oder u, u′, u″ setzt ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'', woraus folgt, dass zum Entstehen der Gleichungen (90. c.) nichts weiter erfordert wird, als dass man einen der Puncte des durch die Gleichung (64. b.) gegebenen Paraboloids zur neuen Coordinatenspitze O wähle, so wie umgekehrt jeder Punct, der nicht in dem Paraboloid liegt, die Gleichungen (90. b.) unbefriedigt lässt, und eben desswegen, zur Coordinatenspitze genommen, keine Gleichung von einer der in (90. c.) aufgestellten Formen liefern kann. Nehmen wir daher irgend einen von A verschiedenen Punct O des Paraboloids zur Coordinatenspitze der neuen Axen an, so entsteht jedesmal eine Gleichung von der Form (90. c.) und ausserdem nicht.

I) Führen wir jetzt statt des aus den Axen OX, OX′, OX″ gebildeten Systems noch einmal ein neues ein, dessen Axen durch denselben Punct O gehen, aber eine andere Richtung als die eben genannten einnehmen, und bezeichnen wir die Grundaxen dieses neuen Systems durch OY, OY′, OY″, seine Polaraxen durch O𝔜, O𝔜′, O𝔜″, während die schiefen und senkrechten Projectionszahlen dieser neuen Axen an denen OX, OX′, OX″ oder, was dasselbe ist, an denen AX, AX′, AX″ durch dieselben Zeichen wie in §. 3. Nr. 44. vorgestellt werden, so verwandelt sich die obere Gleichung (90. c.), wenn man durch y, y′, y″ die schiefen Coordinaten an den letzten neuen Axen von dem Puncte des Paraboloids bezeichnet, der an den vorigen OX, OX′, OX″ die x_0, x_0', x_0'' gab, und für x_0, x_0', x_0'' das setzt, was in den Gleichungen (41. a.) ausgesprochen ist, in:

(91. a.) $$\left\{\begin{array}{l} (\alpha_0 A^2 + \alpha_0' A'^2) y^2 + (\alpha_0 A_1^2 + \alpha_0' A_1'^2) y'^2 + (\alpha_0 A_2^2 + \alpha_0' A_2'^2) y''^2 + 2(\alpha_0 A A_1 + \alpha_0' A' A_1') y y' \\ + 2(\alpha_0 A A_2 + \alpha_0' A' A_2') y y'' + 2(\alpha_0 A_1 A_2 + \alpha_0' A_1' A_2') y' y'' + 2(\alpha_0 A \xi + \alpha_0' A' \xi' + A'' \gamma_0'') y \\ + 2(\alpha_0 A_1 \xi + \alpha_0' A_1' \xi' + A_1'' \gamma_0'') y' + 2(\alpha_0 A_2 \xi + \alpha_0' A_2' \xi' + A_2'' \gamma_0'') y'' = 0, \end{array}\right.$$

und man überzeugt sich leicht, dass in dieser Gleichung die Glieder, welche y''^2, yy'', $y'y''$ zum Factor haben, nur dann verschwinden können, wenn man $A_2 = 0$ und $A_2' = 0$ sein lässt, was $A_2'' = \pm 1$ zur Folge hat und den zu y″ gehörigen Coeffizienten in $\pm\gamma_0''$ verwandelt. Wären nämlich A_2 und A_2' nicht null, so würde zum Verschwinden der zu yy'' und $y'y''$ gehörigen Coeffizienten gefordert, dass $A : A' = A_1 : A_1' = -\alpha_0' A_2' : \alpha_0 A_2$ sei, und die Ver-

nichtung der zu y und y′ gehörigen Coeffizienten verlangte dann noch weiter, dass $\alpha_0 A\xi + \alpha'_0 A'\xi' + A''\gamma''_0 = \alpha_0 A_1\xi + \alpha'_0 A'_1\xi' + A''_1\gamma''_0 = 0$ sei, was zur Folge hätte, dass $A : A' : A'' = A_1 : A'_1 : A''_1$ sein müsste, welche Bedingung mit der Natur des Coordinatensystems unverträglich ist, weil keine zwei Axen von diesem in einander liegen können. Durch die eben angegebenen Werthe von A_2, A'_2 und A''_2 wird aber festgesetzt, dass die Axe O Y″ mit der O X″ in einer und derselben Geraden liegen bleiben müsse, oder dass die O Y″ mit der A X″ parallel zu laufen habe, und durch dieselben Werthe wird die Gleichung (91. a.) umgeändert in:

$$(\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2)\,y^2 + (\alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2)\,y'^2 + 2\,(\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1)\,y\,y'$$
$$+ 2\,(\alpha_0 A\xi + \alpha'_0 A'\xi' + A''\gamma''_0)\,y + 2\,(\alpha_0 A_1\xi + \alpha'_0 A'_1\xi' + A''_1\gamma''_0)\,y' \pm 2\gamma''_0\,y'' = 0\,; \qquad \textbf{(91. b.)}$$

stellt man daher an die beiden andern, noch völlig unbestimmt gebliebenen Axen O Y, O Y′ die weiteren Anforderungen, dass sie gleichzeitig

$$\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1 = 0\;,\quad \alpha_0 A\xi + \alpha'_0 A'\xi' + A''\gamma''_0 = 0\;,\quad \alpha_0 A_1\xi + \alpha'_0 A'_1\xi' + A''_1\gamma''_0 = 0 \qquad \textbf{(91. c.)}$$

werden lassen sollen, so geht die Gleichung (91. b.) über in:

$$(\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2)\,y^2 + (\alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2)\,y'^2 \pm 2\gamma''_0\,y'' = 0\,, \qquad \textbf{(91. d.)}$$

und hat nun in schiefen Coordinaten dieselbe Form wie die, aus welcher sie hergeleitet worden ist.

II) Will man aber aus der obern Gleichung (90. c.), welche aus einer Gleichung von der vordern Form (64. b.) herstammt, eine Gleichung in senkrechten Coordinaten, die wir durch v, v′, v″ bezeichnen, von der hintern Form (64. b.) herleiten, so hat man in jene für x_0, x'_0, x''_0 die Ausdrücke zu setzen, welche in den Gleichungen (41. e.) angezeigt sind, und erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&[\alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A'^2)]\,\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} + [\alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2]\,\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + [\alpha_0 (A_2)^2 + \alpha'_0 (A'_2)^2]\,\frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}\\
&+ 2\,[\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha'_0 (A')(A'_1)]\,\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1} + 2\,[\alpha_0 (A)(A_2) + \alpha'_0 (A')(A'_2)]\,\frac{v\,v''}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}''_2}\\
&+ 2\,[\alpha_0 (A_1)(A_2) + \alpha'_0 (A'_1)(A'_2)]\,\frac{v'\,v''}{\mathfrak{D}'_1\,\mathfrak{D}''_2} + 2\,[\alpha_0 (A)\,\xi + \alpha'_0 (A')\,\xi' + (A'')\,\gamma''_0]\,\frac{v}{\mathfrak{D}}\\
&+ 2\,[\alpha_0 (A_1)\,\xi + \alpha'_0 (A'_1)\,\xi' + (A''_1)\,\gamma''_0]\,\frac{v'}{\mathfrak{D}'_1} + 2\,[\alpha_0 (A_2)\,\xi + \alpha'_0 (A'_2)\,\xi' + (A''_2)\,\gamma''_0]\,\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(92. a.)}$$

und man überzeugt sich wieder ganz wie eben, dass in dieser Gleichung die Glieder, welche v''^2, v v″, v′v″ zum Factor haben, gleichzeitig mit denen, welche v und v′ zum Factor haben, nur dann verschwinden können, wenn man $(A_2) = 0$ und $(A'_2) = 0$ sein lässt, was $(A''_2) = \pm 1$ zur Folge hat. Durch diese Werthe von (A_2), (A'_2) und (A''_2) wird festgestellt, dass die neue Polaraxe O 𝔜″ mit der Grundaxe O X″ in einer und derselben Geraden zu liegen, oder, was dasselbe ist, mit der A X″ parallel zu laufen habe, und es ändert sich durch diese Werthe die Gleichung (92. a.) ab in:

$$\left.\begin{aligned}
&[\alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A')^2]\,\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} + [\alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2]\,\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} + 2\,[\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha'_0 (A')(A'_1)]\,\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\\
&+ 2\,[\alpha_0 (A)\,\xi + \alpha'_0 (A')\,\xi' + (A'')\gamma''_0]\,\frac{v}{\mathfrak{D}} + 2\,[\alpha_0 (A_1)\,\xi + \alpha'_0 (A'_1)\,\xi' + (A''_1)\,\gamma''_0]\,\frac{v'}{\mathfrak{D}'_1} \pm 2\gamma''_0\,\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2} = 0\,;
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(92. b.)}$$

stellt man daher an die beiden andern, noch ganz unbestimmt gebliebenen Polaraxen $O\mathfrak{Y}$ und $O\mathfrak{Y}'$ die weitern Anforderungen, dass sie gleichzeitig

(92. c.) $\alpha_0(A)(A_1)+\alpha'_0(A')(A'_1)=0\,,\;\alpha_0(A)\xi+\alpha'_0(A')\xi'+(A'')\gamma''_0=0\,,\;\alpha_0(A_1)\xi+\alpha'_0(A'_1)\xi'+(A''_1)\gamma''_0=0$

werden lassen sollen, so geht die Gleichung (92. b.) über in:

(92. d.) $$[\alpha_0(A)^2+\alpha'_0(A')^2]\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}+[\alpha_0(A_1)^2+\alpha'_0(A'_1)^2]\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\pm 2\gamma''_0\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}=0$$

und hat nun in senkrechten Coordinaten die hintere Form (64. b.), während sie aus einer Gleichung mit schiefen Coordinaten von der gleichen Form hervorgegangen ist.

III) Derselbe Gang lässt sich auch einhalten, wenn man aus einer Gleichung mit senkrechten Coordinaten von der hintern Form (64. b.) eine andere mit schiefen oder senkrechten Coordinaten von einer der in (64. b.) enthaltenen Formen erhalten will. Sucht man nämlich zuvörderst aus der gegebenen Gleichung die von der untern in (90. c.) angezeigten Form auf, welche sich auf die Axen OX, OX', OX'' bezieht, und führt man ein neues Coordinatensystem ein, dessen Axen OY, OY', OY'' sind, durch y, y', y'' die Coordinaten an diesen neuen Axen von dem Puncte des Paraboloids bezeichnend, der an den Axen OX, OX', OX'' die u_0, u'_0, u''_0 hatte, so muss man, um die Gleichung des Paraboloids an den Axen OY, OY', OY'' zu erhalten, in die untere Gleichung (90. c.) für u_0, u'_0, u''_0 das setzen, was die Gleichungen (41. c.) anzeigen, und findet:

(93. a.) $$\left\{\begin{array}{l}(\delta_0 C^2+\delta'_0 C'^2)y^2+(\delta_0 C_1^2+\delta'_0 C_1'^2)y'^2+(\delta_0 C_2^2+\delta'_0 C_2'^2)y''^2+2(\delta_0 C C_1+\delta'_0 C' C'_1)y y' \\ \quad +2(\delta_0 C C_2+\delta'_0 C' C'_2)y y''+2(\delta_0 C_1 C_2+\delta'_0 C'_1 C'_2)y' y''+2(\delta_0 C\eta+\delta'_0 C'\eta'+C''\zeta''_0)y \\ \quad +2(\delta_0 C_1\eta+\delta'_0 C'_1\eta'+C''_1\zeta''_0)y'+2(\delta_0 C_2\eta+\delta'_0 C'_2\eta'+C''_2\zeta''_0)y''=0\,,\end{array}\right.$$

und man überzeugt sich immer auf die alte Weise, dass in dieser Gleichung die Glieder, mit y''^2, $y y''$, $y' y''$ gleichzeitig mit denen, welche y und y' zum Factor haben, nur dann verschwinden können, wenn man $C_2=0$ und $C'_2=0$ sein lässt, was $C''_2=\pm\mathfrak{C}''_2$ zur Folge hat. Durch diese Werthe von C_2, C'_2, C''_2 wird festgesetzt, dass die Axe OY'' senkrecht auf der Coordinatenebene XOX' zu stehen, oder, was dasselbe sagt, parallel mit der Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ zu laufen habe, und es ändert sich durch diese speciellen Werthe die Gleichung (93. a.) ab in:

(93. b.) $$\left\{\begin{array}{l}(\delta_0 C^2+\delta'_0 C'^2)y^2+(\delta_0 C_1^2+\delta'_0 C_1'^2)y'^2+2(\delta_0 C C_1+\delta'_0 C' C'_1)y y' \\ \qquad +2(\delta_0 C\eta+\delta'_0 C'\eta'+C''\zeta''_0)y+2(\delta_0 C_1\eta+\delta'_0 C'_1\eta'+C''_1\zeta''_0)y'\pm 2\mathfrak{C}''_2\zeta''_0 y''=0\;;\end{array}\right.$$

stellt man daher an die beiden andern, noch völlig unbestimmt gebliebenen Axen OY, OY' die weiteren Anforderungen, dass sie gleichzeitig

(93. c.) $$\delta_0 C C_1+\delta'_0 C' C'_1=0\,,\quad \delta_0 C\eta+\delta'_0 C'\eta'+C''\zeta''_0=0\,,\quad \delta_0 C_1\eta+\delta'_0 C'_1\eta'+C''_1\zeta''_0=0$$

werden lassen sollen, so geht die Gleichung (93. b.) über in:

(93. d.) $$(\delta_0 C^2+\delta'_0 C'^2)y^2+(\delta_0 C_1+\delta'_0 C_1'^2)y'^2\pm 2\mathfrak{C}''_2\zeta''_0 y''=0\,,$$

und hat nun in schiefen Coordinaten die vordere Form (64. b.).

IV) Hat man hingegen zur Absicht die untere Gleichung (90. c.) in eine andere mit senkrechten Coordinaten von der hintern Form (64. b.) überzuführen, und bezeichnet man durch v, v', v'' die senkrechten Coordinaten an dem dazu geeigneten, aus den Axen OY, OY', OY''

gebildeten Systeme von demjenigen Puncte des Paraboloids, der an den Axen O X, O X', O X'' die u_0, u'_0, u''_0 liefert, so muss man, um die Gleichung des Paraboloids an den Axen O Y, O Y', O Y'' zu erhalten, in die untere (90. c.) für u_0, u'_0, u''_0 das setzen, was die Gleichungen (41. f.) dafür geben, und findet:

$$\left.\begin{aligned} &[\delta_0(\Gamma)^2+\delta'_0(\Gamma')^2]\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}+[\delta_0(\Gamma_1)^2+\delta'_0(\Gamma'_1)^2]\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}+[\delta_0(\Gamma_2)^2+\delta'_0(\Gamma'_2)^2]\frac{v''^2}{\mathfrak{D}_2''^2}\\ &+2[\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1)]\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}+2[\delta_0(\Gamma)(\Gamma_2)+\delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_2)]\frac{v\,v''}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2}\\ &+2[\delta_0(\Gamma_1)(\Gamma_2)+\delta'_0(\Gamma'_1)(\Gamma'_2)]\frac{v'\,v''}{\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2}+2[\delta_0(\Gamma)\eta+\delta'_0(\Gamma')\eta'+(\Gamma'')\zeta''_0]\frac{v}{\mathfrak{D}}\\ &+2[\delta_0(\Gamma_1)\eta+\delta'_0(\Gamma'_1)\eta'+(\Gamma'_1)\zeta''_0]\frac{v'}{\mathfrak{D}'_1}+2[\delta_0(\Gamma_2)\eta+\delta'_0(\Gamma'_2)\eta'+(\Gamma''_2)\zeta''_0]\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}=0, \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(94. a.)}$$

und man überzeugt sich wieder auf die alte Weise, dass in dieser Gleichung die Glieder, welche v''^2, $v\,v''$, $v'v''$ zum Factor haben, gleichzeitig mit denen, welche v und v' zum Factor haben, nur dann verschwinden können, wenn man $(\Gamma_2)=0$ und $(\Gamma'_2)=0$ sein lässt, was $(\Gamma''_2)=\pm\mathfrak{C}''_2$ zur Folge hat. Durch diese Werthe von (Γ_2), (Γ'_2), (Γ''_2) wird festgesetzt, dass die neue Polaraxe O $\mathfrak{Y}''$ senkrecht auf der Coordinatenebene X O X' zu stehen, oder, was dasselbe sagt, mit der Polaraxe O $\mathfrak{X}''$ parallel zu laufen habe, und durch diese speciellen Werthe ändert sich die Gleichung (94. a.) ab in:

$$\left.\begin{aligned} &[\delta_0(\Gamma)^2+\delta'_0(\Gamma')^2]\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}+[\delta_0(\Gamma_1)^2+\delta'_0(\Gamma'_1)^2]\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}+2[\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1)]\frac{v\,v'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\\ &+2[\delta_0(\Gamma)\eta+\delta'_0(\Gamma')\eta'+(\Gamma'')\zeta''_0]\frac{v'}{\mathfrak{D}'_1}+2[\delta_0(\Gamma_1)\eta+\delta'_0(\Gamma'_1)\eta'+(\Gamma''_1)\zeta''_0]\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}\pm2\,\mathfrak{C}''_2\zeta''_0\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}=0; \end{aligned}\right. \quad \textbf{(94. b.)}$$

stellt man daher an die beiden andern, noch ganz unbestimmt gebliebenen Polaraxen O $\mathfrak{Y}$, O $\mathfrak{Y}'$ die weiteren Anforderungen, dass sie

$$\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1)=0,\ \delta_0(\Gamma)\eta+\delta'_0(\Gamma')\eta'+(\Gamma'')\zeta''_0=0,\ \delta_0(\Gamma_1)\eta+\delta'_0(\Gamma'_1)\eta'+(\Gamma''_1)\zeta''_0=0 \quad \textbf{(94. c.)}$$

werden lassen sollen, so geht die Gleichung (94. b.) über in:

$$[\delta_0(\Gamma)^2+\delta'_0(\Gamma')^2]\frac{v^2}{\mathfrak{D}^2}+[\delta_0(\Gamma_1)^2+\delta'_0(\Gamma'_1)^2]\frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2}\pm2\,\mathfrak{C}''_2\zeta''_0\frac{v''}{\mathfrak{D}''_2}=0, \quad \textbf{(94. d.)}$$

und hat in senkrechten Coordinaten die zweite Form (64. b.).

Die auf Paraboloide sich beziehenden Gleichungen dieser Nummer stehen unter einander in einem ähnlichen Zusammenhange, wie die in Nr. 213. gegebenen, welche den Mittelpunctsflächen angehören. — Erstlich gehen die Gleichungen (93. c. und d.) aus denen (91. c. und d.) hervor, wenn man an die Stelle von α_0, α'_0, γ''_0, ξ, ξ' und y'' setzt δ_0, δ'_0, ζ''_0, η, η' und $\mathfrak{C}''_2$ y'' und zugleich die Projectionszahlen, deren Grundzeichen A ist, mit denen, deren Grundzeichen C ist, vertauscht; man erhält daher die auf schiefe Coordinaten sich beziehenden Gleichungen am neuen Systeme aus der gegebenen Gleichung auf dieselbe Weise, es mag diese letztere schiefe oder senkrechte Coordinaten in sich enthalten, nur dass im letztern Falle die senkrechten Projectionszahlen, welche die Axen OY, OY', OY'' an denen AX, AX', AX'' liefern, zu nehmen sind, wo im

65 *

ersten Falle die schiefen stehen, und umgekehrt. Eben so gehen aber auch die Gleichungen (94. c. und d.) aus denen (92. c. und d.) hervor, nur dass die Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ an die Stelle der Grundaxen AX, AX', AX'' treten. — Zweitens gehen nicht nur die Gleichungen (92. c. und d.) aus denen (91. c. und d.), sondern eben so auch die (94. c. und d.) aus denen (93. c. und d.) hervor, wenn man an die Stelle der Grundaxen OY, OY', OY'' die diesen entsprechenden Polaraxen $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Y}'$, $O\mathfrak{Y}''$ sich gesetzt denkt, und dabei noch die Zeichen y, y', y'' mit denen $\frac{v}{\mathfrak{D}}$, $\frac{v'}{\mathfrak{D}_1'}$, $\frac{v''}{\mathfrak{D}_2''}$ vertauscht; es stehen mithin neue, demselben Paraboloide angehörige Gleichungen mit schiefen und senkrechten Coordinaten von den beiden in (64. b.) aufgestellten Formen in der gleichen Beziehung zu einander, das Paraboloid mag ursprünglich durch eine Gleichung von der ersten oder zweiten in (64. b.) enthaltenen Form gegeben worden sein, nur dass im letztern Falle senkrechte Projectionszahlen genommen werden müssen, wo im ersten Falle schiefe stehen. — Drittens giebt die Vergleichung der Formen (91. d.), (92. d.), (93. d.) und (94. d.) unter einander in der Weise, wie in Nr. 213. in Betreff der Mittelpunctsflächen geschehen ist, ganz leicht zu erkennen, dass jedes Coordinatensystem, an welchem das Paraboloid durch eine Gleichung von einer der beiden Formen (91. d.) oder (93. d.) dargestellt wird, immer auch ein zweites an die Hand giebt, an welchem dieselbe Fläche durch eine Gleichung von einer der beiden Formen (92. d.) und (94. d.) dargestellt wird und umgekekrt; man hat zu diesem Ende blos die Grundaxen des Systems, an welchem das Paraboloid ursprünglich durch eine Gleichung von einer der zwei in (64. b.) enthaltenen Formen gegeben worden ist, als Polaraxen aufzufassen, wodurch ein in der Idee abgeändertes System zu Stande kommt, dessen Grundaxen die Polaraxen des vorigen sind, während beide doch immer ein und dasselbe Doppelsystem ausmachen. — Die vorstehend ausgesprochenen Analogien enthalten aber auch die Mittel in sich, aus einer der von (91.) bis (94.) fortlaufenden und mit dem Buchstaben d versehenen Gleichungen alle übrigen durch höchst einfache Substitutionen herzuleiten. Ausserdem lässt sich noch aus den Formen der mit denselben Gleichungsnummern und dem Buchstaben c versehenen Bedingungen ohne Schwierigkeit entnehmen, dass die Grundaxen OY, OY' oder die ihnen entsprechenden Polaraxen $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Y}'$, je nachdem die Gleichung des Paraboloids in schiefen oder senkrechten Coordinaten dargestellt ist, in der zum Puncte O gehörigen Tangentialebene dieser Fläche liegen.

Da sich aus den Betrachtungen dieser Nummer ergiebt, dass jeder Punct eines Paraboloids zur Spitze vieler Coordinatensysteme genommen werden kann, an welchen diese Fläche durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, so wollen wir hier gleich auch noch die Frage aufwerfen, ob und welche von seinen Puncten zu einem solchen Coordinatensysteme führen, dessen Axe OY'' senkrecht auf den beiden andern OY und OY' steht, das also ein an OY'' senkrechtes Coordinatensystem ist.

A) Bei Aufstellung der Gleichungen (91. c. und d.) kam die neue Grundaxe OY'' parallel mit der ursprünglichen AX'' zu liegen, es müssen also, wenn das neue System ein an OY'' senkrechtes werden soll, die beiden andern neuen Grundaxen OY und OY' mit der ursprünglichen Grundaxe AX'' rechte Winkel bilden, d. h. es muss nach Anleitung der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichung (9. a.) sein:

$$A\cos W' + A'\cos W'' + A'' = 0 \quad \text{und} \quad A_1\cos W' + A_1'\cos W'' + A_1'' = 0,$$

weil $\cos W'$, $\cos W''$ und 1 die senkrechten Projectionszahlen der Richtung AX'' oder OY'' an den Axen AX, AX', AX'' sind. Schreibt man die zwei letzten Bedingungen (91. c.) so:

$$\frac{\alpha_0 \xi}{\gamma_0''} A + \frac{\alpha_0' \xi'}{\gamma_0''} A' + A'' = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_0 \xi}{\gamma_0''} A_1 + \frac{\alpha_0' \xi'}{\gamma_0''} A_1' + A_1'' = 0$$

und zieht diese zwei Gleichungen von den vorigen beiden ab, so kommt:

$$(\gamma_0'' \cos W' - \alpha_0 \xi) A + (\gamma_0'' \cos W'' - \alpha_0' \xi') A' = 0 \quad \text{und} \quad (\gamma_0'' \cos W' - \alpha_0 \xi) A_1 + (\gamma_0'' \cos W'' - \alpha_0' \xi') A_1' = 0 ;$$

bringt man aber die A' und A_1' enthaltenden Glieder dieser zwei letzten Gleichungen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und multiplicirt hierauf beide mit einander, so erhält man:

$$(\gamma_0'' \cos W' - \alpha_0 \xi)^2 A A_1 = (\gamma_0'' \cos W'' - \alpha_0' \xi')^2 A' A_1' ,$$

und schreibt man die erste Bedingung (91. c.) so:

$$\alpha_0' A' A_1' = - \alpha_0 A A_1 ,$$

so giebt die Multiplication dieser mit der vorangegangenen Gleichung:

$$\alpha_0' (\gamma_0'' \cos W' - \alpha_0 \xi)^2 + \alpha_0 (\gamma_0'' \cos W'' - \alpha_0' \xi')^2 = 0 ,$$

welche unabhängig von der Beschaffenheit der beiden Coeffizienten α_0 und α_0' nur dann bestehen kann, wenn gleichzeitig

$$\gamma_0'' \cos W' - \alpha_0 \xi = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_0'' \cos W'' - \alpha_0' \xi' = 0$$

ist, woraus man findet:

$$\xi = \frac{\gamma_0''}{\alpha_0} \cos W' \quad \text{und} \quad \xi' = \frac{\gamma_0''}{\alpha_0'} \cos W'',$$

und da man, weil O ein Punct des Paraboloids ist, noch ausserdem **(94. a.*)**

$$\alpha_0 \xi^2 + \alpha_0' \xi'^2 + 2 \gamma_0'' \xi'' = 0$$

hat, so ergeben sich für ξ, ξ', ξ'' stets drei reelle und völlig bestimmte Werthe, so dass es also nur einen einzigen Punct O giebt, diesen aber jedesmal, der die verlangte Eigenschaft besitzt, und man überzeugt sich leicht, dass dieser Punct der ist, in welchem das Paraboloid von einer auf der Grundaxe A X″ senkrechten Ebene berührt wird.

B) Bei Aufstellung der Gleichungen (92. c. und d.) kam die Polaraxe O 𝔜″ des neuen Systems parallel mit der ursprünglichen Grundaxe A X″ zu liegen, es werden also die zwei andern neuen Polaraxen O 𝔜 und O 𝔜′ mit der O 𝔜″ rechte Winkel bilden und in Folge dessen wird dieses Polarsystem ein an O 𝔜″ senkrechtes sein, der unter A) angeführten Gleichung (9. a.) gemäss, wenn gleichzeitig

$$(A) \cos W' + (A') \cos W'' + (A'') = 0 \quad \text{und} \quad (A_1) \cos W' + (A_1') \cos W'' + (A_1'') = 0$$

ist, und die zwei letzten Bedingungen (92. c.) lassen sich in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\alpha_0 \xi}{\gamma_0''} (A) + \frac{\alpha_0' \xi'}{\gamma_0''} (A') + (A'') = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_0 \xi}{\gamma_0''} (A_1) + \frac{\alpha_0' \xi'}{\gamma_0''} (A_1') + (A_1'') = 0 .$$

Diese Gleichungen sind aber die zwei ersten unter A) gegebenen mit dem Unterschiede, dass an die Stelle des Grundzeichens A das (A) getreten ist; es lassen sich daher aus ihnen wie zuvor wieder dieselben Gleichungen (94. a.*) ableiten, woraus folgt, dass dem einen in A) gefundenen Punct zugleich auch ein neues an O 𝔜″ senkrechtes Polarsystem zukommt, was vorauszusehen war, da das Polarsystem von einem an O Y″ senkrechten Grundsysteme nothwendig auch ein an O 𝔜″ senkrechtes ist, und umgekehrt.

C) Bei Aufstellung der Gleichungen (93. c. und d.) kam die neue Grundaxe O Y'' mit der ursprünglichen Polaraxe $A\mathfrak{X}''$ parallel zu liegen, es werden demnach die zwei andern neuen Grundaxen O Y und O Y' mit der O Y'' rechte Winkel bilden, und in Folge dessen wird das neue Grundsystem ein an O Y'' senkrechtes werden, wenn die Richtungen O Y und O Y' mit der $A\mathfrak{X}''$ rechte Winkel bilden, und diess geschieht derselben Gleichung (9. a.) gemäss, wenn gleichzeitig

$$(A)\cos\mathfrak{W}' + (A')\cos\mathfrak{W}'' + (A'') = 0 \quad \text{und} \quad (A_1)\cos\mathfrak{W}' + (A_1')\cos\mathfrak{W}'' + (A_1'') = 0$$

ist, alle Zeichen in ihrer stehenden Bedeutung genommen, weil $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$ und 1 die senkrechten Projectionszahlen sind, welche die Richtung $A\mathfrak{X}''$ oder O Y'' an den Polaraxen $A\mathfrak{X}$, $A\mathfrak{X}'$, $A\mathfrak{X}''$ liefert; diese Gleichungen nehmen aber, wenn man mittelst der im ersten Abschnitte aufgefundenen Relationen (87.) die Projectionszahlen (A), (A'), (A'') und (A_1), (A_1'), (A_1'') in jene umwandelt, welche durch C, C', C'' und C_1, C_1', C_1'' bezeichnet werden, die folgende Gestalt an:

$$\frac{C}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' + \frac{C'}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' + \frac{C''}{\mathfrak{C}_2''} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{C_1}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' + \frac{C_1'}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' + \frac{C_1''}{\mathfrak{C}_2''} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Grössen C'' und C_1'' mittelst der zwei letzten Bedingungen (93. c.), so erhält man:

$$\left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' - \frac{\delta_0}{\mathfrak{C}_2''}\eta\right)C + \left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' - \frac{\delta_0'}{\mathfrak{C}_2''}\eta'\right)C' = 0$$

und

$$\left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' - \frac{\delta_0}{\mathfrak{C}_2''}\eta\right)C_1 + \left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' - \frac{\delta_0'}{\mathfrak{C}_2''}\eta'\right)C_1' = 0,$$

woraus man auf dem in A) angezeigten Wege findet:

$$\left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' - \frac{\delta_0}{\mathfrak{C}_2''}\eta\right)^2 C\,C_1 = \left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' - \frac{\delta_0'}{\mathfrak{C}_2''}\eta'\right)^2 C'\,C_1',$$

während die erste Bedingung (93. c.)

$$\delta_0'\,C'\,C_1' = -\delta_0\,C\,C_1$$

giebt, aus deren Multiplication

$$\delta_0'\left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' - \frac{\delta_0}{\mathfrak{C}_2''}\eta\right)^2 + \delta_0\left(\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' - \frac{\delta_0'}{\mathfrak{C}_2''}\eta'\right)^2 = 0$$

hervorgeht; diese Gleichung kann aber unabhängig von der besondern Beschaffenheit der Coefficienten δ_0 und δ_0' nur dann bestehen, wenn gleichzeitig

$$\frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}}\cos\mathfrak{W}' - \frac{\delta_0}{\mathfrak{C}_2''}\eta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\zeta_0''}{\mathfrak{C}_1'}\cos\mathfrak{W}'' - \frac{\delta_0'}{\mathfrak{C}_2''}\eta' = 0$$

ist, woraus man findet:

(94. b.*)

$$\eta = \frac{\mathfrak{C}_2''}{\mathfrak{C}}\frac{\zeta_0''}{\delta_0}\cos\mathfrak{W}' \quad \text{und} \quad \eta' = \frac{\mathfrak{C}_2''}{\mathfrak{C}_1'}\frac{\zeta_0''}{\delta_0'}\cos\mathfrak{W}''$$

wozu, da O immer ein Punct des Paraboloids ist, noch kommt:

$$\delta_0\eta^2 + \delta_0'\eta'^2 + 2\zeta_0''\eta'' = 0,$$

so dass sich für η, η', η'' stets drei reelle und völlig bestimmte Werthe ergeben, und also nur ein einziger Punct O des Paraboloids die verlangte Eigenschaft besitzt, von dem sich leicht zeigen lässt, dass es der ist, in welchem das Paraboloid von einer auf der Polaraxe A𝔛″ senkrechten Ebene berührt wird.

D) Auf denselben durch die Gleichungen (94. b.*) bestimmten Punct stösst man wieder, im Falle man die Gleichungen (94. c. und d.) vor Augen hat, wovon man sich auf die unter B) eingehaltene Weise überzeugen hann, was aber auch schon von selbst mittelst des dort am Ende Gesagten in die Augen springt.

222) Die Ebene, in welcher die Axen O Y und O Y′ aller der zu dem beliebigen Puncte O gehörigen Coordinatensysteme liegen, an denen das Paraboloid durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, lässt sich ohne Zuziehung der Berührungsebene wie folgt finden:

I) Sucht man da, wo die in voriger Nummer unter Ziffer I) angegebenen Resultate erzielt werden sollen, diejenige Richtung O Z auf, deren senkrechte Projectionszahlen c, c′, c″ an den Grundaxen A X, A X′, A X″ die Eigenschaft besitzen, dass

$$c : c' : c'' = \alpha_0 \xi : \alpha'_0 \xi' : \gamma''_0 \qquad \textbf{(95. a.)}$$

ist, wodurch die Richtung O Z eine völlig bestimmte und mit dem Punct O zugleich gegebene wird, so lassen sich in Folge der Bestimmungen (95. a.) die zwei letzten Bedingungen (91. c.) auch in der nachstehenden Form aufstellen:

$$A c + A'c' + A''c'' = 0 \quad \text{und} \quad A_1 c + A'_1 c' + A''_1 c'' = 0, \qquad \textbf{(95. b.)}$$

und sagen nun aus, dass die neuen Axen O Y und O Y′ beide senkrecht auf der Richtung O Z stehen; es liegen mithin die zwei Grundaxen O Y und O Y′ von allen möglichen neuen Coordinatensystemen, die denselben Punct O des Paraboloids zur Spitze haben, und an welchen diese Fläche eine Gleichung von der Form (91. d.) annimmt, in einer und derselben Ebene, welche auf der nach (95. a.) bestimmten Richtung O Z senkrecht steht und durch den Punct O hindurch geht.

II) Sucht man da, wo die in voriger Nummer unter Ziffer II) mitgetheilten Resultate erzielt werden sollen, diejenige Richtung O Z auf, deren senkrechte Projectionszahlen c, c′, c″ an den Axen A X, A X′, A X″ die Eigenschaft besitzen, welche in (95. a.) angezeigt worden ist, d. h. nimmt man für O Z wieder dieselbe Richtung wie in I), so lassen zufolge der Bestimmungen (95. a.) die zwei letzten Bedingungen (92. c.) sich auf die folgende Art ausdrücken:

$$(A) c + (A') c' + (A'') c'' = 0 \quad \text{und} \quad (A_1) c + (A'_1) c' + (A''_1) c'' = 0, \qquad \textbf{(95. c.)}$$

und diese sagen aus, dass die neuen Polaraxen O 𝔜, O 𝔜′ beide senkrecht auf der Richtung O Z stehen; es liegen mithin die zwei Polaraxen O 𝔜 und O 𝔜′ von allen möglichen neuen Coordinatensystemen, die denselben Punct O des Paraboloids zur Spitze haben, und an welchen diese Fläche eine Gleichung von der Form (92. d.) annimmt, in einer und derselben Ebene, welche dieselbe ist, wie die, worin im Falle I) die Grundaxen O Y und O Y′ lagen.

III) Sucht man da, wo die in voriger Nummer unter Ziffer III) mitgetheilten Resultate erzielt werden sollen, diejenige Richtung O Z auf, deren schiefe Projectionszahlen an den Axen A X, A X′, A X″ die Eigenschaft besitzen, dass

$$\mathrm{a} : \mathrm{a}' : \mathrm{a}'' = \delta_0 \eta : \delta'_0 \eta' : \zeta''_0 \qquad \textbf{(95. d.)}$$

ist, wodurch die Richtung OZ eine völlig bestimmte und mit dem Puncte O zugleich gegebene wird, so lassen sich zufolge der Bestimmungen (95. d.) die zwei letzten Bedingungen (93. c.) in der nachstehenden Form aufstellen:

(94. e.) $$aC + a'C' + a''C'' = 0 \quad \text{und} \quad aC_1 + a'C_1' + a''C_1'',$$

und sagen nun aus, dass die neuen Grundaxen OY und OY′ beide auf der Richtung OZ senkrecht stehen; es liegen mithin die zwei Grundaxen OY und OY′ von allen möglichen Coordinatensystemen, die denselben Punct O des Paraboloids zur Spitze haben, und an welchen diese Fläche eine Gleichung von der Form (93. d.) annimmt, in einer und derselben Ebene, welche auf der nach (95. d.) bestimmten Richtung OZ senkrecht steht und durch den Punct O hindurch geht.

IV) Sucht man da, wo die in voriger Nummer unter Ziffer IV) mitgetheilten Resultate erzielt werden sollen, die Richtung OZ wieder wie im vorigen Falle III) auf, so dass ihre schiefen Projectionszahlen a, a′, a″ an den Axen AX, AX′, AX″ die Eigenschaft (95. d.) besitzen, so lassen sich in Folge dieser Eigenschaften die zwei letzten Bedingungen (94. a.) wie folgt ausdrücken:

(94. f.) $$a(\Gamma) + a'(\Gamma') + a''(\Gamma'') = 0 \quad \text{und} \quad a(\Gamma_1) + a'(\Gamma_1') + a''(\Gamma_1'') = 0,$$

und diese sagen aus, dass die neuen Polaraxen O𝔜 und O𝔜′ beide senkrecht auf der jetzigen Richtung OZ stehen; es liegen mithin die zwei Polaraxen O𝔜 und O𝔜′ von allen möglichen Coordinatensystemen, die denselben Punct O zur Spitze haben, und an welchen diese Fläche eine Gleichung von der Form (94. d.) annimmt, in einer und derselben Ebene, welche dieselbe ist, wie die im vorigen Falle unter III) angeführte, worin die Grundaxen OY und OY′ lagen.

Für solche Puncte O des Paraboloids, deren Coordinaten ξ und ξ' oder η und η' beide zugleich null sind, liefert im ersten Falle die Bedingung (95. a.):

$$c = 0 \quad \text{und} \quad c' = 0,$$

im andern Falle:

$$a = 0 \quad \text{und} \quad a' = 0;$$

die Richtung OZ liegt daher im ersten Falle mit der A𝔛″, im zweiten Falle mit der AX″ parallel, woraus folgt, dass für solche Puncte O im Falle I) die Grundaxen OY und OY′, im Falle II) die Polaraxen O𝔜 und O𝔜′ mit der Grundcoordinatenebene XAX′ parallel laufen, dass hingegen im Falle III) die Grundaxen OY und OY′, im Falle IV) die Polaraxen O𝔜 und O𝔜′ mit der Polarcoordinatenebene 𝔛A𝔛′ parallel laufen.

222*) Wir wollen jetzt in einer Nebenbetrachtung die Gleichungen (91. b. und c.) bis (94. b. und c.) mehr ins Besondere ziehen, um zu solchen Formen zu gelangen, aus denen wir die wichtigsten Eigenschaften der Paraboloide mit grösserer Leichtigkeit ablesen können.

I) Denkt man sich bei Aufsuchung einer neuen Diametralgleichung unter den in Nr. 221. unter Ziffer I) angegebenen Umständen die Puncte A und O in einander liegend, so dass $\xi = \xi' = \xi'' = 0$ ist, und man also nur solche Diametralgleichungen auffinden will, die an Coordinatensystemen mit derselben Spitze entstehen, wesswegen wir die ursprünglichen Axen hier durch OX, OX′, OX″ bezeichnen werden, so muss die neue Axe OY″ mit der ursprünglichen OX″ in einer und derselben Geraden liegen bleiben, so dass man wie zuvor

$$A_2 = 0, \quad A_2' = 0 \quad \text{und} \quad A_2'' = \pm 1$$

hat, und weil die Axen O Y und O Y', wie wir gefunden haben, alle in einer und derselben Ebene liegen, welche hier die X O X' ist, wie aus dem zu Ende der vorigen Nummer mit gesperrter Schrift gedruckten Satze hervorgeht, so hat man jetzt noch ausserdem:

$$A'' = 0 \quad \text{und} \quad A_1'' = 0 . \tag{91. a.*}$$

Zufolge der hier eintretenden Eigenschaften (91. a.*) und weil $\xi = \xi' = \xi'' = 0$ ist, erfüllen sich unter den gegenwärtigen Umständen die zwei letzten Bedingungen (91. c.) von selber, so dass jetzt nur noch die eine erste, nämlich

$$\alpha_0 A A_1 + \alpha_0' A' A_1' = 0 \tag{91. b.*}$$

zu befriedigen übrig bleibt, und alle Axen O Y und O Y', welche dieser Bedingung genügen, in Verbindung mit der schon bestimmten O Y'' ein Coordinatensystem bilden, an welchem eine Gleichung wie die (91. d.), nämlich:

$$(\alpha_0 A^2 + \alpha_0' A'^2) y^2 + (\alpha_0 A_1^2 + \alpha_0' A_1'^2) y'^2 \pm 2 \gamma_0'' y'' = 0 \tag{91. e.*}$$

entsteht.

II) Denkt man sich bei der Aufsuchung einer neuen Diametralgleichung unter den in Nr. 221. Ziffer II) angegebenen Umständen die Puncte A und O in einander liegend, so dass $\xi = \xi' = \xi'' = 0$ wird und man also nur Coordinatensysteme mit gemeinschaftlicher Spitze O vor Augen hat, wesswegen die ursprünglichen Axen durch O X, O X', O X'' vorgestellt werden können, so muss noch wie zuvor die neue Polaraxe O $\mathfrak{Y}''$ mit der ursprünglichen Grundaxe O X'' in einer und derselben Geraden liegen, also wieder $(A_2) = 0$, $(A_2') = 0$ und $(A_2'') = \pm 1$ sein, und weil die Polaraxen O $\mathfrak{Y}$ und O $\mathfrak{Y}'$, wie wir gefunden haben, alle in einer und derselben Ebene liegen, welche hier X O X' ist, wie aus dem zu Ende der vorigen Nummer mit gesperrter Schrift gedruckten Satze hervorgeht, so hat man jetzt noch ausserdem:

$$(A'') = 0 \quad \text{und} \quad (A_1'') = 0 . \tag{92. a.*}$$

Zufolge der Eigenschaften (92. a.*), und weil $\xi = \xi' = \xi'' = 0$ ist, erfüllen sich unter den gegenwärtigen Umständen die zwei letzten Bedingungen (92. b.) von selber, so dass jetzt nur die eine erste, nämlich

$$\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha_0' (A')(A_1') = 0 \tag{92. b.*}$$

zu befriedigen übrig bleibt, und alle Polaraxen O $\mathfrak{Y}$ und O $\mathfrak{Y}'$, welche dieser Bedingung genügen, in Verbindung mit der schon bestimmten dritten Polaraxe O $\mathfrak{Y}''$ ein Coordinatensystem bilden, an dessen Grundsystem eine Gleichung wie die (92. d.), nämlich

$$[\alpha_0 (A)^2 + \alpha_0' (A')^2] \frac{y^2}{\mathfrak{D}^2} + [\alpha_0 (A_1)^2 + \alpha_0' (A_1')^2] \frac{y'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} \pm 2 \gamma_0'' \frac{y''}{\mathfrak{D}_2''} = 0 \tag{92. e.*}$$

entsteht.

III) Denkt man sich bei der Aufsuchung einer neuen Diametralgleichung unter den in Nr. 221. Ziffer III) angegebenen Umständen die Puncte A und O in einander liegend, so dass $\eta = \eta' = \eta'' = 0$ wird und man also nur Coordinatensysteme mit der gemeinschaftlichen Spitze O vor Augen hat, wesswegen die ursprünglichen Axen durch O X, O X', O X'' vorgestellt werden können, so muss hier wie dort die Axe O Y'' mit der Polaraxe O $\mathfrak{X}''$ in einer Geraden liegen und daher $C_2 = 0$, $C_2' = 0$, $C_2'' = \pm \mathfrak{C}_2''$ sein; weil aber, wie wir gefunden haben, die Grundaxen O Y und O Y' alle in einer und derselben Ebene liegen, und diese hier die Polar-

coordinatenebene $\mathfrak{X}\,O\,\mathfrak{X}'$ ist, wie aus dem zu Ende der vorigen Nummer mit gesperrter Schrift gedruckten Satze hervorgeht, so hat man jetzt noch ausserdem:

(93. a.*) $$C'' = 0 \quad \text{und} \quad C''_1 = 0\,.$$

Zufolge der Eigenschaften (93. a.*), und weil $\eta = \eta' = \eta'' = 0$ ist, erfüllen sich unter den gegenwärtigen Umständen die zwei letzten Bedingungen (93. b.) von selber, so dass jetzt nur die eine erste, nämlich

(93. b.*) $$\delta_0\, C\, C_1 + \delta'_0\, C'\, C'_1 = 0$$

zu befriedigen übrig bleibt, und alle neuen Grundaxen O Y und O Y′, welche dieser Bedingung genügen, in Verbindung mit der schon bestimmten dritten Grundaxe O Y″ ein Coordinatensystem bilden, an welchem eine Gleichung wie die (93. d.), nämlich:

(93. c.*) $$(\delta_0 C^2 + \delta'_0 C'^2)\, y^2 + (\delta_0 C_1^2 + \delta'_0 C_1'^2)\, y'^2 \pm 2\, \zeta''_0\, \mathfrak{C}''_2\, y'' = 0$$

entsteht.

IV) Denkt man sich bei der Aufsuchung einer neuen Diametralgleichung unter den in Nr. 221. Ziffer IV) angegebenen Umständen die Puncte A und O in einander liegend, so dass $\eta = \eta' = \eta'' = 0$ wird, und man also nur Coordinatensysteme mit der gemeinschaftlichen Spitze O vor Augen hat, wesswegen die ursprünglichen Axen durch O X, O X′, O X″ vorgestellt werden können, so muss hier wie dort die Polaraxe $O\,\mathfrak{Y}''$ mit der Polaraxe $O\,\mathfrak{X}''$ in einer Geraden liegen und daher $(\Gamma_2) = 0$, $(\Gamma'_2) = 0$, $(\Gamma''_2) = \pm \mathfrak{C}''_2$ sein; weil aber, wie wir gefunden haben, die Polaraxen $O\,\mathfrak{Y}$ und $O\,\mathfrak{Y}'$ alle in einer und derselben Ebene liegen, die hier die Polarcoordinatenebene $\mathfrak{X}\,O\,\mathfrak{X}'$ ist, wie aus dem zu Ende der vorigen Nummer mit gesperrter Schrift gedruckten Satze hervorgeht, so hat man jetzt noch ausserdem:

(94. a.*) $$(\Gamma'') = 0 \quad \text{und} \quad (\Gamma''_1) = 0\,.$$

Zufolge der Eigenschaften (94. a.*), und weil $\eta = \eta' = \eta'' = 0$ ist, erfüllen sich unter den gegenwärtigen Umständen die zwei letzten Bedingungen (94. b.) von selber, so dass jetzt nur noch die eine erste, nämlich:

(94. b.*) $$\delta_0\, (\Gamma)\, (\Gamma_1) + \delta'_0\, (\Gamma')\, (\Gamma'_1) = 0$$

zu befriedigen übrig bleibt, und alle neuen Polaraxen $O\,\mathfrak{Y}$ und $O\,\mathfrak{Y}'$, welche dieser Bedingung genügen, in Verbindung mit der schon bestimmten dritten Polaraxe $O\,\mathfrak{Y}''$ ein Coordinatensystem bilden, an dessen Grundsystem eine Gleichung wie die (94. d.), nämlich:

(94. c.*) $$[\delta_0 (\Gamma)^2 + \delta'_0 (\Gamma')^2]\, \frac{v^2}{\mathfrak{D}^2} + [\delta_0 (\Gamma_1)^2 + \delta'_0 (\Gamma'_1)^2]\, \frac{v'^2}{\mathfrak{D}_1'^2} \pm 2\, \zeta''_0\, \mathfrak{C}''_2\, \frac{v''}{\mathfrak{D}''_2} = 0$$

entsteht.

Ad I). Wir wollen nun aus den vorstehenden Resultaten einige Folgerungen ziehen. Betrachten wir zuvörderst den in dieser Nummer unter I) vorgeführten, auf eine gegebene Gleichung von der Form $\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + 2\gamma''_0 x'' = 0$ sich beziehenden Fall genauer, so sehen wir, dass die Axen O Y und O Y′ die eine Bedingung (91. b.*) zu erfüllen haben und dass die Richtungsgleichungen dieser Axen an den ursprünglichen Grundaxen den, diesem besondern Falle angehörigen Bedingungen (91. a.*) gemäss werden:

$$1 = A^2 + A'^2 + 2\, A\, A' \cos W \quad \text{und} \quad 1 = A_1^2 + A_1'^2 + 2\, A_1\, A'_1 \cos W\,,$$

so dass die Projectionszahlen A, A′ und A_1, A'_1 lediglich aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der Bedingung (91. b.*) zu schöpfen sind. Vergleicht man aber diese drei Gleichungen

mit denen, wodurch im vorigen Paragraph die verschiedenen ebenen Systeme bestimmt worden sind, an welchen eine Mittelpunctscurve zweiter Ordnung durch eine Diametralgleichung in schiefen Coordinaten dargestellt wird, so wird man gewahr, dass die dort unter (13. b.) oder (28. a.) stehende Bedingung mit der in (91. b.*) aufgestellten völlig eins ist, und dass auch die dort unmittelbar hinter (28. e.) stehenden Richtungsgleichungen ganz die gleichen sind, wie die hier zuletzt angegebenen, dem Falle I) entsprechenden; und da auch die dort resultirende Gleichung (13. c.) bei y^2 und y'^2 genau die gleichen Coeffizienten hat, wie sie hier in der Gleichung (91. c.*) vorkommen, so folgt, dass, wenn eine Linie zweiter Ordnung durch eine Gleichung $\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 = \mu$, in welcher μ einen beliebigen Werth haben kann, an den Grundaxen AX, AX′ eines ebenen Systems dargestellt wird, und nicht nur die bei x^2 und x'^2 vorkommenden Coeffizienten α_0 und α'_0 dieselben sind, wie die bei denselben Quadraten stehenden in der Gleichung, wodurch ein Paraboloid gegeben wird, sondern auch die Axen AX, AX′ des ebenen Systems mit den Axen OX, OX′ des räumlichen Systems, auf das sich die gegebene Gleichung des Paraboloids bezieht, parallel laufen, so geben je zwei neue Axen AY, AY′ im ebenen Systeme, an welchen die hier erwähnte Mittelpunctscurve durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, dadurch dass man ihnen parallel und gleichläufig zwei Axen OY, OY′ durch den Punct O des Paraboloids legt, ein aus diesen beiden Axen OY, OY′ und der stets gleichen OY″ gebildetes Coordinatensystem, an welchem das Paraboloid durch die Diametralgleichung (91. c.*) dargestellt wird, und die zu y^2 und y'^2 gehörigen Coeffizienten sind in der Gleichung der Mittelpunctscurve an den Axen AY und AY′ und in der Gleichung (91. c.*) an den diesen parallelen Axen OY, OY′ in Verbindung mit der OY″ stets die gleichen.

Ad II). Schreiben wir in dem unter II) vorgekommenen und wieder auf eine gegebene Gleichung von der Form $\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + 2\gamma''_0 x'' = 0$ sich beziehenden Falle die Gleichung (92. c.*) nach Analogie der im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen (57. b.) so:

$$[\alpha_0 (A)^2 + \alpha'_0 (A')^2](y)^2 + [\alpha_0 (A_1)^2 + \alpha'_0 (A'_1)^2](y')^2 \pm \gamma''_0 (y'') = 0\ ,$$

in welcher (y), (y′), (y″) die schiefen Coordinaten an den Polaraxen O𝔜, O𝔜′, O𝔜″ von den Puncten des Paraboloids vorstellen, deren senkrechte Coordinaten an den Grundaxen OY, OY′, OY″ v, v′, v″ sind, so ist dadurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt mit dem Unterschiede, dass hier die neuen Polaraxen auftreten, wo dort die neuen Grundaxen zur Sprache kamen.

Ad III) und IV). Die Fälle III) und IV), in welchen das Paraboloid durch eine Gleichung von der Form $\delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 + 2\zeta''_0 u'' = 0$ gegeben ist, lassen sich dadurch auf die zwei vorhergehenden zurückführen, dass an die Stelle der auf die Grundaxen OX, OX′, OX″ sich beziehenden senkrechten Coordinaten u, u′, u″ der Puncte des Paraboloids ihre auf die Polaraxen O𝔛, O𝔛′, O𝔛″ sich beziehenden schiefen Coordinaten (x), (x′), (x″) setzt, wodurch die gegebene Gleichung, den im ersten Abschnitte mitgetheilten Relationen (57. b.) gemäss, $\delta_0 \mathfrak{C}^2 (x)^2 + \delta'_0 \mathfrak{C}_1'^2 (x')^2 + 2\zeta''_0 \mathfrak{C}''_2 (x'') = 0$ wird, auf welche nun alles frühere von den Fällen I) und II) Ausgesagte wieder volle Anwendung jedoch mit dem Unterschiede findet, dass hier die Polaraxen O𝔛, O𝔛′, O𝔛″ auftreten müssen, wo dort die Grundaxen OX, OX′, OX″ vorkamen.

223) Aus den vorstehend gegebenen, die Paraboloidgleichungen anlangenden Umformungen lassen sich nun die vorzüglichsten Eigenschaften solcher Flächen ohne Mühe herleiten, wobei wir blos Gleichungen mit schiefen Coordinaten zu Grunde legen werden, da alle übrigen Fälle auf diesen einen in der eben angeführten Weise leicht zurückgeführt werden können.

a) Ist ein Paraboloid durch eine Gleichung in schiefen Coordinaten von der Form $\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + 2\gamma'' x'' = 0$ an einem Coordinatensysteme, dessen Axen AX, AX', AX'' sind, gegeben und will man eine neue Gleichung in schiefen Coordinaten von der gleichen Form an einem Coordinatensysteme, dessen Spitze ein anderer Punct O des Paraboloids ist, erhalten, so müssen, den in Nr. 221. gegebenen Erörterungen gemäss, zwei von den durch den Punct O gehenden Axen so gewählt werden, dass ihre Projectionszahlen an den ursprünglichen Axen AX, AX', AX'' den Bedingungen (91. c.) genügen, wenn man in ihnen, der hier gegebenen Gleichung gemäss, α, α', γ an die Stelle von α_0, α'_0, γ''_0 setzt und unter ξ, ξ', ξ'' die Coordinaten des hier angenommenen Punctes O des Paraboloids versteht, wodurch jene Bedingungen hier werden:

$$\alpha A A_1 + \alpha' A' A'_1 = 0\ , \quad \alpha \xi A + \alpha' \xi' A' + \gamma'' A'' = 0\ , \quad \alpha \xi A_1 + \alpha' \xi' A'_1 + \gamma'' A''_1 = 0\,.$$

Erfüllen die Projectionszahlen von zweien der durch den Punct O gelegten Axen diese Bedingungen und läuft die dritte dieser Axen mit der AX'' parallel, so wird das Paraboloid an diesen neuen Axen durch die Gleichung (91. d.), welche jetzt

$$(\alpha A^2 + \alpha' A'^2)\, y^2 + (\alpha A_1^2 + \alpha' A_1'^2)\, y'^2 \pm 2\gamma''\, y'' = 0$$

wird, dargestellt.

b) Zudem hat es sich in Nr. 222. gezeigt, dass, wenn man die Richtung OZ aufsucht, deren senkrechte Projectionszahlen c, c', c'' die in (95. a.) angegebenen Verhältnisse unter einander einhalten, wornach hier

$$c : c' : c'' = \alpha \xi : \alpha' \xi' : \gamma''$$

sein muss, und durch den Punct O eine zu dieser Richtung OZ senkrechte Ebene legt, je zwei in dieser Ebene liegende von O ausgehende Richtungen die zwei letzten der drei in a) stehenden Bedingungen schon von selber erfüllen, so dass solche zwei Richtungen nur noch die erste der genannten drei Bedingungen zu erfüllen brauchen, um in Verbindung mit der dritten, schon gänzlich bestimmten, durch O gehenden Axe ein Coordinatensystem zu liefern, an welchem das Parabolid durch die in a) angegebene Gleichung dargestellt wird. Man befriedigt die erste der genannten Bedingungen aber offenbar dadurch, dass man

$$A' = 0 \quad \text{und} \quad A_1 = 0\,,$$

d. h. dadurch, dass man die zwei in der auf OZ senkrechten Ebene zu nehmenden Axen den Coordinatenebenen XAX'' und X'AX'' parallel sein lässt, und in Folge dieser besondern Werthe von A' und A_1 wird die in a) aufgeführte Gleichung des Paraboloids

$$\alpha A^2 y^2 + \alpha' A_1'^2 y'^2 \pm 2\gamma'' y'' = 0\,,$$

in welcher A^2 und $A_1'^2$ völlig bestimmte Werthe annehmen, die sich aus dem Umstande, dass $A' = 0$, $A_1 = 0$ ist, und dass die zwei Richtungen, auf welche sich die Projectionszahlen, deren Grundzeichen A und A_1 sind, in der auf OZ senkrechten Ebene liegen, welches Letztere in den Gleichungen (95. b.) ausgesprochen ist, leicht in reeller Weise herholen lassen. Man hat demnach die hier zuletzt erhaltene Gleichung als eine vollständig gegebene anzusehen, welche wir

von jetzt an zur ursprünglich gegebenen machen werden, wesshalb wir die Axen, auf welche sich dieselbe bezieht, durch 0 X, 0 X′, 0 X″ und sie selber, indem wir $\alpha A^2 = \alpha_0$, $\alpha' A_1'^2 = \alpha_0'$ und $\pm \gamma'' = \gamma_0''$ setzen, durch

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + 2\gamma_0'' x'' = 0$$

bezeichnen wollen.

c) Sehen wir nun das Paraboloid als durch die am Ende von b) erhaltene Gleichung $\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + 2\gamma_0'' x'' = 0$ an den Axen 0 X, 0 X′, 0 X″ gegeben an, und legen wir parallel mit der Coordinatenebene X 0 X′ irgend eine andere Ebene, welche das Paraboloid in einer Curve schneidet, so wird diese Curve dargestellt durch die Gleichungen:

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 + 2\gamma_0'' x'' = 0 \quad \text{und} \quad x'' = \zeta'',$$

wenn ζ'' den allen Puncten der schneidenden Ebene gleichmässig angehörigen Werth von x'' bezeichnet. Durch diese Gleichungen wird die Schnittcurve des Paraboloids an den Axen 0 X, 0 X′, 0 X″ dargestellt; stellt aber $\mathfrak{O}$ den Punct vor, in welchem die Axe 0 X″ von der schneidenden Ebene durchdrungen wird, und zieht man in dieser schneidenden Ebene die Richtungen $\mathfrak{O}$ X und $\mathfrak{O}$ X′ den Axen 0 X und 0 X′ parallel und gleichläufig, so wird die Schnittcurve auch dargestellt durch die eine Gleichung

$$\alpha_0 x^2 + \alpha_0' x'^2 = -2\gamma_0'' \zeta''$$

an dem aus den Axen $\mathfrak{O}$ X und $\mathfrak{O}$ X′ zusammengesetzten ebenen Systeme.

d) Gehen wir jetzt darauf aus, neue zu demselben Puncte 0 gehörige Coordinatensysteme, deren Axen durch 0 Y, 0 Y′, 0 Y″ bezeichnet werden sollen, aufzufinden, an welchen das Paraboloid wieder eine Gleichung in schiefen Coordinaten von der gleichen Form annimmt, so tritt der in Nr. 222.* unter Ziffer I) besprochene Fall ein, wornach die Axe 0 Y″ der 0 X″ parallel gelegt werden muss, und die dort durch A, A′ und A_1, A_1' bezeichneten schiefen Projectionszahlen der neuen Axen 0 Y, 0 Y′ an den Axen 0 X und 0 X′ des ursprünglichen Systems, an welchem das Paraboloid durch die am Ende von b) aufgeführte Gleichung gegeben wird, blos die eine Bedingung (91.* b.) zu erfüllen brauchen, damit die Gleichung (91.* c.) zu Stande komme, während hier alle solche Axenpaare 0 Y und 0 Y′ stets die Bedingungen (91.* a.) wahr machen. Es sind mithin bei jedem solchen neuen Axenpaare genau alle die Merkmale vorhanden, welche in Nr. 222.* bei dem ad I) Gesagten postulirt wurden, und da auch die zu Ende von c) aufgestellte Gleichung der Schnittcurve unter den gleichen Umständen sich befindet, die an der dort zur Hilfe genommenen Mittelpunctscurve postulirt worden sind, so findet der dort zu Ende von ad I) in Nr. 222.* mit gesperrter Schrift gedruckte Satz in Betreff der hier gesuchten neuen Axenpaare 0 Y und 0 Y″ und der Schnittcurve, welche durch eine mit X 0 X′ parallele Ebene ins Paraboloid gemacht worden ist, seine volle Anwendung; man findet nämlich alle Axenpaare 0 Y, 0 Y′, wenn man in dem aus $\mathfrak{O}$ X und $\mathfrak{O}$ X′ gebildeten ebenen Systeme alle neuen, derselben Ebene angehörigen Axen $\mathfrak{O}$ Y, $\mathfrak{O}$ Y′ aufsucht, die ein von dem vorigen verschiedenes ebenes System bilden, an welchem die Schnittcurve durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, und die Axen 0 Y und 0 Y′ je zwei solchen neuen Axen $\mathfrak{O}$ Y und $\mathfrak{O}$ Y′ parallel und gleichläufig nimmt, wobei die zu y^2 und y'^2 gehörigen Coefficienten in der neuen Gleichung des Paraboloids an den Axen 0 Y, 0 Y′, 0 Y″ denen zu denselben Quadraten gehörigen in der neuen Diametralgleichung der Schnittcurve an den Axen $\mathfrak{O}$ Y und $\mathfrak{O}$ Y′ ganz gleich werden.

c) Da nun die Coeffizienten α und α' der ersten in a) gegebenen ursprünglichen Gleichung, sowie die α_0 und α_0' oder αA^2 und $\alpha' A_1'^2$ der zu Ende von b) aus ihr abgeleiteten zweiten ursprünglichen Gleichung Zahlen mit einerlei oder mit entgegengesetzten Vorzeichen sind, und sonach die Schnittcurve, deren Gleichung zu Ende von c) gegeben worden ist, eine Ellipse oder Hyperbel wird, je nachdem das gegebene Paraboloid ein elliptisches oder hyperbolisches ist, so können wir aus dem Bisherigen noch mehrere andere wichtige Eigenschaften des Paraboloids ableiten. Ist nämlich das Paraboloid ein elliptisches und dem gemäss die Schnittcurve eine Ellipse, so giebt es für diese stets zwei neue Axen $\mathfrak{O}$Y und $\mathfrak{O}$Y′, (welche wir im Paragraph 16. dieses Abschnitts Nr. 194. zu finden gelehrt haben), an denen die Ellipse durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, deren zu y^2 und y'^2 gehörige Coeffizienten einander gleich sind, und dann liefern die diesen beiden parallelen OY und OY′ in Verbindung mit der dritten OY″ ein räumliches Coordinatensystem, an welchem das elliptische Paraboloid durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, deren zu y^2 und y'^2 gehörige Coeffizienten ebenfalls einander gleich sind, dem sub d) Gesagten gemäss. Dividirt man die so sich ergebende Gleichung des elliptischen Paraboloids mit einem der gleichen zu y^2 und y'^2 gehörigen Coeffizienten, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$y^2 + y'^2 + \gamma y'' = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + x'^2 + \gamma x'' = 0,$$

je nachdem man diese Gleichung als neue oder als ursprüngliche ins Auge fassen und deren Axen durch OY, OY′, OY″ oder durch OX, OX′, OX″ bezeichnen will, und eine Gleichung von dieser Form kann das Paraboloid an jedem seiner Puncte O annehmen. Ist hingegen das Paraboloid ein hyperbolisches und dem gemäss die Schnittcurve eine Hyperbel, so können in Gemässheit der im Paragraph 16. dieses Abschnitts geschehenen Erörterungen keine zwei neuen Axen $\mathfrak{O}$Y und $\mathfrak{O}$Y′ aufgefunden werden, an welchen die Hyperbel durch eine solche Diametralgleichung dargestellt wird, deren bei y^2 und y'^2 stehende Coeffizienten einerlei absolute Grösse haben, ausser wenn schon $\alpha_0 + \alpha_0' = 0$ ist, und dann tritt dieser Umstand bei allen Axen $\mathfrak{O}$Y und $\mathfrak{O}$Y′ ein, welche nur überhaupt eine Diametralgleichung für die Schnittcurve zu liefern im Stande sind. Hieraus folgt, dass das hyperbolische Paraboloid nur an gewissen seiner Puncte O durch eine Gleichung von der Form

$$y^2 - y'^2 + \gamma y'' = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - x'^2 + \gamma x'' = 0$$

dargestellt werden kann. Um die besondern Puncte O des Paraboloids, an denen es durch eine Gleichung von dieser Form dargestellt werden kann, näher kennen zu lernen, darf man nur erwägen, an welchen Puncten O die zu Ende von b) erhaltene Gleichung die Eigenschaft erhält, dass $\alpha_0 + \alpha_0' = 0$ oder der dort eingeführten Bezeichnung zur Folge $\alpha A^2 + \alpha' A_1'^2 = 0$ wird. Da nun die Bildung der zu Ende von b) aufgestellten Gleichung verlangt, dass $A' = 0$ und $A_1 = 0$ genommen werde, wobei sich die Projectionszahlen auf die besondern Richtungen OY und OY′, welche später durch OX und OX′ bezeichnet worden sind, an den Axen AX′ und AX beziehen und durch diese Werthe von A_1 und A' die erste der drei in a) stehenden Bedingungen schon von selber in Erfüllung geht, die beiden andern aber sich auf $\alpha\xi A + \gamma'' A'' = 0$ und $\alpha' \xi' A_1' + \gamma'' A_1'' = 0$ zurückziehen, so wird, wenn man die hieraus für A und A_1' sich ergebenden Werthe in die zu bewirkende $\alpha A^2 + \alpha' A_1'^2 = 0$ einsetzt, die andere hervorgehen:

$$\frac{A''^2}{\alpha \xi^2} + \frac{A_1''^2}{\alpha' \xi'^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha \xi^2}{A''^2} + \frac{\alpha' \xi'^2}{A_1''^2} = 0.$$

Es sind aber die Richtungsgleichungen der besondern neuen Axen O Y und O Y′, welche später durch O X und O X′ bezeichnet worden sind, weil bei ihnen $A' = 0$ und $A_1 = 0$ ist, nach Analogie der im ersten Abschnitte aufgestellten Gleichung (51.):

$$1 = A^2 + A''^2 + 2\,A\,A''\cos W' \quad \text{und} \quad 1 = A_1'^2 + A_1''^2 + 2\,A_1'\,A_1''\cos W'',$$

worin W′ und W″ die Axenwinkel X A X″ und X′ A X″ bezeichnen, und diese Gleichungen gehen durch die so eben für A und A_1' erhaltenen Werthe über in:

$$1 = \frac{A''^2\gamma''^2}{\alpha^2\xi^2} + A''^2 - 2\frac{A''^2\gamma''}{\alpha\xi}\cos W' \quad \text{und} \quad 1 = \frac{A_1''^2\gamma''^2}{\alpha'^2\xi'^2} + A_1''^2 - 2\frac{A_1''^2\gamma''}{\alpha'\xi'}\cos W'',$$

woraus man findet:

$$\frac{\alpha\xi^2}{A''^2} = \frac{\gamma''^2}{\alpha} + \alpha\xi^2 - 2\gamma''\xi\cos W' \quad \text{und} \quad \frac{\alpha'\xi'^2}{A_1''^2} = \frac{\gamma''^2}{\alpha'} + \alpha'\xi'^2 - 2\gamma''\xi'\cos W'',$$

und in Folge dieser für $\frac{\alpha\xi^2}{A''^2}$ und $\frac{\alpha'\xi'^2}{A_1''^2}$ gefundenen Werthe nimmt die zu bewirkende Relation $\frac{\alpha\xi^2}{A''^2} + \frac{\alpha'\xi'^2}{A_1''^2} = 0$ die folgende Gestalt an:

$$\gamma''^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right) + \alpha\xi^2 + \alpha'\xi'^2 - 2\gamma''(\xi\cos W' + \xi'\cos W'') = 0$$

oder, weil $\xi\cos W' + \xi'\cos W'' + \xi'' = \eta''$ ist, wenn η'' die senkrechte Coordinate des gesuchten Punctes O an der Axe A X″ bedeutet:

$$\gamma''^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right) + \alpha\xi^2 + \alpha'\xi'^2 + 2\gamma''\xi'' - 2\gamma''\eta'' = 0.$$

Da aber auch der gesuchte Punct O noch immer ein Punct des Paraboloids ist, und man desswegen $\alpha\xi^2 + \alpha'\xi'^2 + 2\gamma''\xi'' = 0$ hat, so wird schliesslich:

$$\eta'' = \frac{1}{2}\gamma''\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right),$$

und diess zeigt, dass alle Puncte O des durch die Gleichung $\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + 2\gamma'' x'' = 0$ gegebenen hyperbolischen Paraboloids, an denen diese Fläche Gleichungen von der Form $x^2 - x'^2 + \gamma x'' = 0$ zu liefern im Stande ist, in einer auf der Axe A X″ senkrechten Ebene liegen, deren senkrechte Entfernung von der Coordinatenspitze $\frac{1}{2}\gamma''\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}\right)$ beträgt.

f) Wir können noch eine andere nicht unwichtige Eigenschaft des Paraboloids aus dem Bisherigen entnehmen. Da wir nämlich im Paragraph 16. dieses Abschnitts gefunden haben, dass bei jeder Mittelpunctscurve der zweiten Ordnung nur zwei auf einander senkrechte, durch ihren Mittelpunct gehende und in ihrer Ebene liegende Gerade existiren, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Mittelpunctscurve an zwei Axen, die in diesen Geraden liegen, durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, und diess also auch von der Schnittcurve gilt, deren Gleichung zu Ende von c) gegeben worden ist, so werden kraft des in d) Gesagten zwei durch den Punct O den eben genannten parallele Gerade die Eigenschaft besitzen, dass zwei in ihnen liegende Axen O Y und O Y′ in Verbindung mit der schon bestimmten dritten O Y″ ein Coor-

dinatensystem bilden, an welchem das Paraboloid durch eine Diametralgleichung dargestellt wird. Es lassen sich demnach durch jeden Punct O des Paraboloids drei Axen O Y, O Y′ und O Y″ legen, von denen die O Y″ der A X″ oder O X″ parallel läuft, und die O Y und O Y′ auf einander senkrecht stehen, jedoch immer in denselben zwei Geraden liegen bleiben müssen. Hieraus folgt, dass durch jeden Punct O eines Paraboloids nur drei bestimmte Gerade gelegt werden können, von denen eine stets dieselbe Richtung beibehält und die zwei andern auf einander senkrecht stehen, welche die Eigenschaft besitzen, dass das Paraboloid an einem Coordinatensysteme, dessen Axen O Y, O Y′, O Y″ in diesen drei Geraden liegen, durch eine Diametralgleichung dargestellt wird.

g) Verbindet man die zuletzt aufgefundene Eigenschaft des Paraboloids mit der in Nr. 221. Lit A) erkannten Eigenthümlichkeit, wornach nur ein Punct O im Paraboloid, dieser aber stets existirt, der zur Spitze eines aus den Axen O Y, O Y′, O Y″ gebildeten an O Y″ senkrechten Coordinatensystems genommen werden kann, an welchem das Paraboloid durch eine Diametralgleichung dargestellt wird, so sieht man ein, dass nur an diesem einen Puncte drei völlig bestimmte Gerade angegeben werden können, von denen je zwei einen rechten Winkel mit einander bilden, und welche die Eigenschaft besitzen, dass das Paraboloid an dem Coordinatensystem, dessen Axen in ihnen liegen, durch eine Diametralgleichung dargestellt wird. Es müssen sonach die drei Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems, an welchen ein Paraboloid durch eine Diametralgleichung dargestellt werden soll, durch einen einzigen völlig bestimmten Punct dieser Fläche gehen und stets in denselben drei Geraden liegen.

224) An das von Nr. 213. bis Nr. 220. über Mittelpunctsflächen zweiter Ordnung Gesagte reihen wir nun noch die folgenden in vielen Fällen einer Anwendung fähigen Betrachtungen an. In den durch die Buchstaben a. und b. unterschiedenen Gleichungen (70.) bis (73.) spricht sich die Gegenseitigkeit der Lage aus, welche zwischen den Axen zweier Coordinatensysteme eingehalten sein muss, wenn sich dieselbe Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung an beiden Systemen durch eine Diametralgleichung darstellen lassen soll. Denkt man sich die Mittelpunctsfläche durch eine der Gleichungen, deren Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder (α_0), (α'_0), (α''_0) sind, und durch das Coordinatensystem, worauf sich diese Gleichung bezieht, gegeben, und will man, dass beide Gleichungen einerlei constantes Glied erhalten, so kann man, worauf zu Ende der Nr. 215. aufmerksam gemacht worden ist, die Coeffizienten der neuen Gleichung angeben, so wie man mit deren Verhältniss zu einander bekannt ist. Ob aber die so gefundene neue Gleichung die gegebene Mittelpunctsfläche auch wirklich darzustellen im Stande sei, das hängt noch davon ab, ob sich das Coordinatensystem, an welchem die gegebene Mittelpunctsfläche durch die gefundene neue Gleichung dargestellt wird, als ein in Wahrheit vorhandenes darstellen lässt, d. h. ob die Projectionszahlen der neuen Axen in reeller Weise sich auffinden lassen. Man sieht hieraus, dass es Fälle giebt, in welchen man aus den durch die Buchstaben a. und b. unterschiedenen Gleichungen (70.) bis (73.) die in ihnen vorkommenden Projectionszahlen zu finden genöthigt wird, was schon da wird geschehen müssen, wo das allgemeine Verhalten zwischen den Coeffizienten zweier Diametralgleichungen zu ermitteln aufgegeben würde, das die beiderlei Coeffizienten unter einander einhalten müssen, wenn beide eine und dieselbe Mittelpunctsfläche an verschiedenen im Raume existirenden Coordinatensystemen darstellen sollen. Die allgemeine Auflösung der hier zur Sprache gebrachten Gleichungen, wenn man die in ihnen vorkommenden Projectionszahlen als ihre unbekannten Grössen ansieht, muss, um die ihr entgegenstehenden

Hindernisse zu vermeiden, eigenthümliche Wendungen nehmen, die nicht ohne Interesse sind; daher nehme ich keinen Anstand, dieselbe ihren Hauptzügen nach hier vor Augen zu legen. Wir haben in Nr. 214. gesehen, wie sich die Gleichungen (70. a. und b.) in die Formen (76. a. und c.), die (71. a. und b.) in die Formen (77. a. und c.), die (72. a. und b.) in die Formen (78. a. und c.), endlich die (73. a. und b.) in die Formen (79. a. und c.) überführen lassen; wir können daher die hier angeregte Auflösung blos in Bezug auf die ersten dieser Gleichungen unternehmen, da alle übrigen durch die in Nr. 213. angezeigten Mittel auf die gleichen Formen zurückgeführt werden können.

Zuvörderst bemerken wir, dass die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} z^2+z'^2+z''^2=1\,,\quad z_1^2+z_1'^2+z_1''^2=1\,,\quad z_2^2+z_2'^2+z_2''^2=1 \\ \text{und} \\ z^2+z_1^2+z_2^2=1\,,\quad z'^2+z_1'^2+z_2'^2=1\,,\quad z''^2+z_1''^2+z_2''^2=1 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{(97.\ a.)}$$

die Form der Gleichungen (70. b.) und (76. c.) dadurch annehmen, dass man

$$\left.\begin{array}{c} z^2=\frac{\alpha_0}{(\alpha_0)}A^2\,,\quad z'^2=\frac{\alpha_0'}{(\alpha_0)}A'^2,\quad z''^2=\frac{\alpha_0''}{(\alpha_0)}A''^2;\quad z_1^2=\frac{\alpha_0}{(\alpha_0')}A_1^2\,,\quad z_1'^2=\frac{\alpha_0'}{(\alpha_0')}A_1'^2,\quad z_1''^2=\frac{\alpha_0''}{(\alpha_0')}A_1''^2; \\ z_2^2=\frac{\alpha_0}{(\alpha_0'')}A_2^2\,,\quad z_2'^2=\frac{\alpha_0'}{(\alpha_0'')}A_2'^2,\quad z_2''^2=\frac{\alpha_0''}{(\alpha_0'')}A_2''^2 \end{array}\right. \quad \mathbf{(97.\ b.)}$$

setzt, und dass die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} z\,z_1+z'\,z_1'+z''\,z_1''=0\,,\quad z\,z_2+z'\,z_2'+z''\,z_2''=0\,,\quad z_1\,z_2+z_1'\,z_2'+z_1''\,z_2''=0 \\ \text{und} \\ z\,z'+z_1\,z_1'+z_2\,z_2'=0\,,\quad z\,z''+z_1\,z_1''+z_2\,z_2''=0\,,\quad z'\,z''+z_1'\,z_1''+z_2'\,z_2''=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots \quad \mathbf{(97.\ c.)}$$

durch die Substitutionen (97. b.) in die (70. a.) und (76. a.) übergehen, wenn man in jeder dieser Gleichungen allen Wurzelzeichen immer nur einerlei Vorzeichen giebt. Hieraus geht hervor, dass durch die Bestimmung der Grössen, deren Grundzeichen z ist, mittelst der Gleichungen (97. a. und c.) zugleich auch die Bestimmung der in den Gleichungen der Nr. 214. zur Untersuchung gekommenen Projectionszahlen gegeben ist, welche die Axen der neuen Coordinatensysteme an den Axen des ursprünglichen Systems liefern, wobei man jedoch nicht übersehen darf, dass, da die zwölf Gleichungen (97. a. und c.) aus sechsen von ihnen hervorgegangen sind, drei von den neun Grössen, die z zum Grundzeichen haben, unbestimmt bleiben müssen, zu deren weiterer Erforschung die neuen Axen, auf das ursprüngliche Coordinatensystem bezogen, zwar noch drei Richtungsgleichungen liefern, die aber mittelst einer der Relationen (80. a., b., c., d.) blos auf zwei sich zurückziehen, wie aus den Nachweisungen der Nr. 215. erhellet, so dass im Ganzen doch immer eine Gleichung weniger als unbekannte Grössen vorliegen, und wir es daher jedenfalls mit einer unbestimmten Aufgabe zu thun haben.

Um von hier ab den Rechnungsausdrücken eine grössere Einfachheit zu verschaffen und zugleich, um alle Vorstellungen mit mehr Anschaulichkeit zu umgeben, werden wir voraussetzen, dass die ursprünglich gegebene Diametralgleichung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem sich beziehe, wozu wir befugt sind, da wir im Obigen schon die Realität eines solchen Systems unter allen Umständen erwiesen, und die Mittel, dasselbe aufzufinden, angegeben haben. Unter dieser Voraussetzung gehen die beiden Formen (64. a.) der gegebenen Gleichung in einander über, und die senkrechten Projectionszahlen der neuen Axen an den ursprünglichen Axen unterscheiden sich nicht mehr von deren schiefen Projectionszahlen. Da, wo das ursprüngliche

Coordinatensystem ein rechtwinkliges ist, hat man $\cos W = \cos W' = \cos W'' = 0$; darum verwandelt sich an ihm die im ersten Abschnitte aufgestellte allgemeine Richtungsgleichung (51.) in:

$$1 = a^2 + a'^2 + a''^2,$$

und diese giebt bezüglich der drei besondern Richtungen AY, AY', AY'', welche die neuen Grundaxen ausmachen:

(97. d.) $$1 = A^2 + A'^2 + A''^2\ ,\quad 1 = A_1^2 + A_1'^2 + A_1''^2\ ,\quad 1 = A_2^2 + A_2'^2 + A_2''^2\ ;$$

es gehen aber die obern dieser Gleichungen mittelst der Bezeichnungen (97. b.) über in:

(97. e.) $$\frac{1}{(\alpha_0)} = \frac{z^2}{\alpha_0} + \frac{z'^2}{\alpha_0'} + \frac{z''^2}{\alpha_0''}\ ,\quad \frac{1}{(\alpha_0')} = \frac{z_1^2}{\alpha_0} + \frac{z_1'^2}{\alpha_0'} + \frac{z_1''^2}{\alpha_0''}\ ,\quad \frac{1}{(\alpha_0'')} = \frac{z_2^2}{\alpha_0} + \frac{z_2'^2}{\alpha_0'} + \frac{z_2''^2}{\alpha_0''}\,.$$

Aus den Gleichungen (97. a. und c.) nun in Verbindung mit denen (97. e.) hat man die Werthe, deren Grundzeichen z ist, herzuholen, wodurch die Beschaffenheit des neuen Coordinatensystems an die Hand gegeben wird.

225) Zieht man von der ersten Gleichung (97. e.) nach einander die mit α_0', α_0'' dividirte erste obere Gleichung (97. a.) ab, so erhält man:

(98. a.) $$\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0'}\right)z^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0'}\right)z''^2 = \frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0'} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)z^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)z'^2 = \frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0''}\,.$$

Eben so erhält man durch successive Subtraction der mit α_0 und α_0'' dividirten zweiten obern Gleichung (97. a.) von der zweiten (97. e.):

(98. b.) $$\left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0}\right)z_1'^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0}\right)z_1''^2 = \frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)z_1^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)z_1'^2 = \frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0''}\,.$$

Endlich erhält man noch durch successive Subtraction der mit α_0 und α_0' dividirten dritten obern Gleichung (97. a.) von der dritten Gleichung (97. e.):

(98. c.) $$\left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0}\right)z_2'^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0}\right)z_2''^2 = \frac{1}{(\alpha_0'')} - \frac{1}{\alpha_0} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0'}\right)z_2^2 + \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0'}\right)z_2''^2 = \frac{1}{(\alpha_0'')} - \frac{1}{\alpha_0'}\,.$$

Die Gleichungen (98. a.) zeigen, wie sich z' und z'' durch z, die (98. b.), wie sich z_1 und z_1'' durch z_1', die (98. c.), wie sich z_2 und z_2' durch z_2'' bestimmen lassen, so dass mithin die Aufsuchung von allen diesen Grössen nur noch von der weitern Ermittelung der drei z, z_1', z_2'' abhängt. Setzt man in die erste untere Gleichung (97. a.) für z_1^2 und z_2^2 ihre aus den Gleichungen (98. b. und c.) entnommenen Ausdrücke in $z_1'^2$ und $z_2''^2$, oder in die zweite untere Gleichung (97. a.) für z'^2 und $z_2'^2$ ihre aus den Gleichungen (98. a. und c.) entnommenen Ausdrücke in z^2 und $z_2''^2$, oder endlich in die dritte untere Gleichung (97. a.) für z''^2 und $z_1''^2$ ihre aus den Gleichungen (98. a. und b.) entnommenen Ausdrücke in z^2 und $z_1'^2$, so stösst man auf folgende drei Gleichungen:

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)z^2+\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)z_1'^2+\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)z_2''^2=$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha'_0)}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha''_0)}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha_0)}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha''_0)}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha_0)}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)+\left(\frac{1}{(\alpha'_0)}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right),$$

woraus sich schliessen lässt, dass die auf den drei letzten Zeilen vorkommenden Ausdrücke, in welchen weder z^2 noch $z_1'^2$ noch $z_2''^2$ vorkommen, einander gleich sind; und in der That vernichten sich die Differenzen von je zweien derselben kraft der in (80. a.) aufgefundenen Relation, oder, was damit auf Eins hinausläuft, die Gleichsetzung je zweier derselben führt wieder zu jener Relation. Mittelst eben dieser Relation ziehen sich aber auch die drei vorstehenden Gleichungen in die folgende eine zurück:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)z^2+\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha''_0}\right)z_1'^2+\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)z_2''^2=\\ \frac{1}{\alpha''_0}\left(\frac{1}{(\alpha''_0)}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)+\frac{1}{\alpha'_0}\left(\frac{1}{(\alpha'_0)}-\frac{1}{\alpha_0}\right)+\frac{1}{\alpha_0}\left(\frac{1}{(\alpha_0)}-\frac{1}{\alpha''_0}\right),\end{aligned}\right\}\dots \quad \textbf{(99. d.)}$$

welche in Bezug auf z^2, $z_1'^2$, $z_2''^2$ eben so wie schon alle die in (98. a. bis c.) erhaltenen in Bezug auf z^2, z'^2, z''^2; z^2, $z_1'^2$, $z_1''^2$; z_2^2, $z_2'^2$, $z_2''^2$ vom ersten Grade ist, so dass man also sieben von den neun Quadraten, deren Grundzeichen z ist, durch die zwei übrigen in lauter rationalen Ausdrücken darstellen kann.

226) Wir wollen hier, bevor wir weiter gehen, ein wenig stille stehen, um den bereits zurückgelegten Weg noch einmal mit prüfendem Auge zu überblicken, und die Stelle, an welcher wir uns jetzt befinden, genauer zu ergründen. Es ist schon in Nr. 224. darauf hingewiesen worden, dass die Gleichungen (97. a.) und (97. c.) in Verbindung mit den drei Richtungsgleichungen (97. e.) zur Bestimmung von nicht mehr als acht der unbekannten Grössen dienen können, und durch die Gleichungen (98. a. bis d.) sind schon sieben von ihnen bestimmt worden, desshalb kann man wesentlich nur noch eine einzige Bestimmungsgleichung zwischen ihnen zu erhalten hoffen. Nun haben wir aber die sämmtlichen Gleichungen (98. a. bis d.) blos aus denen (97. a.) in Verbindung mit den drei Richtungsgleichungen (97. e.) hergeleitet, wobei die sechs Gleichungen (97. c.) noch völlig unbenutzt liegen geblieben sind. Hieraus müssen wir schliessen, dass in diesen letzt erwähnten sechs Gleichungen nur noch eine einzige Bestimmung in Bezug auf die neun Unbekannten liegen könne, und da ursprünglich nur die drei obern in (97. a.) und (97. c.) vorhandenen Gleichungen gegeben waren, aus welchen die drei untern erst später hervorgegangen sind, so kann man weiter schliessen, dass mit den sechs Gleichungen (97. a.) zugleich auch die sechs Gleichungen (97. c.) bis auf eine gegeben sind, dass jedoch eine von diesen letzten immer noch in die vollständige Auflösung der ursprünglich gegebenen sechs Gleichungen, nämlich der ersten drei in (97. a.) und der ersten drei in (97. c.) stehenden, hinzugezogen werden müsse.

Dass in der That die sechs Gleichungen (97. c.) in Folge der sechs Gleichungen (97. a.) auf eine einzige sich zurückziehen, davon kann man sich auf die folgende Art noch directe überzeugen. Bringt man in jeder der obern und untern Gleichungen (97. c.) ihrer Aufeinanderfolge nach respective das dritte, zweite und erste Glied von ihrer linken auf deren rechte Seite und quadrirt man hierauf alle diese Gleichungen, so erhält man:

(99. a.)
$$\left\{\begin{array}{c} z^2 z_1^2 + z'^2 z_1'^2 + 2 z z_1 z' z_1' = z''^2 z_1''^2 , \quad z^2 z_2^2 + z''^2 z_2''^2 + 2 z z_2 z'' z_2'' = z'^2 z_2'^2 , \\ z_1'^2 z_2'^2 + z_1''^2 z_2''^2 + 2 z_1' z_2' z_1'' z_2'' = z_1^2 z_2^2 \\ \text{und} \\ z^2 z'^2 + z_1^2 z_1'^2 + 2 z z_1 z' z_1' = z_2^2 z_2'^2 , \quad z^2 z''^2 + z_2^2 z_2''^2 + 2 z z_2 z'' z_2'' = z_1^2 z_1''^2 , \\ z_1'^2 z_1''^2 + z_2'^2 z_2''^2 + 2 z_1' z_2' z_1'' z_2'' = z'^2 z''^2 , \end{array}\right.$$

und diese geben, wenn man die untern von den obern ihrer Ordnung nach subtrahirt:

(99. b.)
$$(z^2 - z_1'^2)(z_1^2 - z'^2) = z''^2 z_1''^2 - z_2^2 z_2'^2 , \quad (z^2 - z_2''^2)(z_2^2 - z''^2) = z'^2 z_2'^2 - z_1^2 z_1''^2 ,$$
$$(z_1'^2 - z_2''^2)(z_2'^2 - z_1''^2) = z_1^2 z_2^2 - z'^2 z''^2 .$$

Nun ist aber

$$z''^2 z_1''^2 - z_2^2 z_2'^2 = (1 - z^2 - z'^2)(1 - z_1^2 - z_1'^2) - (1 - z^2 - z_1^2)(1 - z'^2 - z_1'^2) ,$$

wenn für z''^2, $z_1''^2$ ihre Werthe aus den obern Gleichungen (97. a.) und für z_2^2, $z_2'^2$ ihre Werthe aus den untern Gleichungen (97. a.) genommen werden, und eben so findet man:

$$z'^2 z_2'^2 - z_1^2 z_1''^2 = (1 - z^2 - z''^2)(1 - z_2^2 - z_2''^2) - (1 - z^2 - z_2^2)(1 - z''^2 - z_2''^2)$$

und

$$z_1^2 z_2^2 - z'^2 z''^2 = (1 - z_1'^2 - z_1''^2)(1 - z_2'^2 - z_2''^2) - (1 - z_1'^2 - z_2'^2)(1 - z_1''^2 - z_2''^2) ,$$

während diese drei letzten Gleichungen durch eine leichte Umformung sich überführen lassen in:

$$z''^2 z_1''^2 - z_2^2 z_2'^2 = (z^2 - z_1'^2)(z_1^2 - z'^2) , \quad z'^2 z_2'^2 - z_1^2 z_1''^2 = (z^2 - z_2''^2)(z_2^2 - z''^2) ,$$
$$z_1^2 z_2^2 - z'^2 z''^2 = (z_1'^2 - z_2''^2)(z_2'^2 - z_1''^2) .$$

Hieraus folgt, dass die Gleichungen (99. b.) mittelst derer (97. a.) identisch werden, d. h. dass die auf erster und zweiter Zeile stehenden Gleichungen (99. a.) oder (97. c.) mittelst derer (97. a.) in einander überführbar sind. Es lässt sich aber auch noch zeigen, dass aus jeder der drei auf einer Zeile stehenden Gleichungen (97. c.) die zwei andern mittelst der Gleichungen (97. a.) sich herleiten lassen, wie wir bei den auf erster Zeile stehenden darthun wollen. Bringt man in den drei ersten Gleichungen (97. c.) die dritten Glieder ihrer linken Seite auf deren rechte Seite und quadrirt sie hierauf, so kommt:

$$z^2 z_1^2 + z'^2 z_1'^2 - z''^2 z_1''^2 = -2 z z_1 z' z_1' , \quad z^2 z_2^2 + z'^2 z_2'^2 - z''^2 z_2''^2 = -2 z z_2 z' z_2' ,$$
$$z_1^2 z_2^2 + z_1'^2 z_2'^2 - z_1''^2 z_2''^2 = -2 z_1 z_2 z_1' z_2'$$

und quadrirt man diese aufs Neue, so kommt:

(99. c.)
$$(z^2 z_1^2 + z'^2 z_1'^2 - z''^2 z_1''^2)^2 = 4 z^2 z_1^2 z'^2 z_1'^2 , \quad (z^2 z_2^2 + z'^2 z_2'^2 - z''^2 z_2''^2)^2 = 4 z^2 z_2^2 z'^2 z_2'^2 ,$$
$$(z_1^2 z_2^2 + z_1'^2 z_2'^2 - z_1''^2 z_2''^2)^2 = 4 z_1^2 z_2^2 z_1'^2 z_2'^2 ;$$

zieht man aber von der ersten dieser drei letzten Gleichungen die zwei andern ab, so erhält man, die Differenz der Quadrate in ein Product umändernd:

$$\left.\begin{aligned}
&[z^2(z_1^2+z_2^2)+z'^2(z_1'^2+z_2'^2)-z''^2(z_1''^2+z_2''^2)]\,[z^2(z_1^2-z_2^2)+z'^2(z_1'^2-z_2'^2)-z''^2(z_1''^2-z_2''^2)]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=4\,z^2z'^2(z_1^2z_1'^2-z_2^2z_2'^2)\\
&[z_1^2(z^2+z_2^2)+z_1'^2(z'^2+z_2'^2)-z_1''^2(z''^2+z_2''^2)]\,[z_1^2(z^2-z_2^2)+z_1'^2(z'^2-z_2'^2)-z_1''^2(z''^2-z_2''^2)]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=4\,z_1^2z_1'^2(z^2z'^2-z_2^2z_2'^2)\,.
\end{aligned}\right\}\quad(99.\ d.)$$

Den zwei in eckige Klammern eingeschlossenen Factoren in der ersten dieser Gleichungen kann man aber dadurch, dass man für z''^2, $z_1''^2$, $z_2''^2$ deren aus den obern Gleichungen (97. a.) entnommene Werthe setzt, die folgende Form geben:

$$z^2(z_1^2+z_2^2)+z'^2(z_1'^2+z_2'^2)-(1-z^2-z'^2)(2-z_1^2-z_1'^2-z_2^2-z_2'^2)$$

und

$$z^2(z_1^2-z_2^2)+z'^2(z_1'^2-z_2'^2)-(1-z^2-z'^2)(z_2^2+z_2'^2-z_1^2-z_1'^2)\,,$$

oder, wenn man die Klammern wegschafft:

$$z_1^2+z_1'^2+z_2^2+z_2'^2-2-z^2z_1'^2-z^2z_2'^2-z'^2z_1^2-z'^2z_2^2+2z^2+2z'^2$$

und

$$z_1^2+z_1'^2-z_2^2-z_2'^2+z^2z_2'^2+z'^2z_2^2-z^2z_1'^2-z'^2z_1^2$$

oder

$$(1-z'^2)(z_1^2-z_2^2)+(1-z^2)(z_1'^2-z_2'^2)\,;$$

beachtet man aber, dass die Summe der zwei ersten untern Gleichungen (97. a.) $z_1^2+z_2^2+z_1'^2+z_2'^2+z^2+z'^2=2$ liefert, dass man also im einen Factor $-z^2-z'^2$ für $z_1^2+z_1'^2+z_2^2+z_2'^2-2$ und im andern, denselben Gleichungen gemäss, $z_1'^2+z_2'^2$ für $1-z'^2$ und $z_1^2+z_2^2$ für $1-z^2$ setzen kann, so überzeugt man sich, dass jene beiden Factoren auch so geschrieben werden können:

$$z^2(1-z_1'^2-z_2'^2)+z'^2(1-z_1^2-z_2^2)\quad\text{und}\quad(z_1'^2+z_2'^2)(z_1^2-z_2^2)+(z_1^2+z_2^2)(z_1'^2-z_2'^2)\,,$$

und nun geht der erste mittelst der zwei ersten untern Gleichungen (97. a.) über in:

$$2\,z^2z'^2\,,$$

der zweite dagegen verwandelt sich mittelst Wegschaffung der Klammern in:

$$2\,(z_1^2z_1'^2-z_2^2z_2'^2)\,,$$

was zur Folge hat, dass die erste Gleichung (99. d.) mittelst der Gleichungen (97. a.) identisch wird. Auf ganz analoge Weise lässt sich auch die zweite Gleichung (99. d.) mittelst derselben Relationen (97. a.) identisch machen. Es ist somit erwiesen, dass neben den sechs Gleichungen (97. a.) nur noch eine einzige von den sechs Gleichungen (97. c.) für die Auflösung aller wesentlich nöthig ist.

227) Nachdem wir in der vorigen Nummer uns Gewissheit darüber verschafft haben, dass zur Bestimmung der drei Grössen z^2, $z_1'^2$, $z_2''^2$ neben der Gleichung (98. d.) nur noch eine zweite aus einer der Gleichungen (97. c.) erhalten werden kann, gehen wir jetzt an die Aufsuchung dieser zweiten Gleichung. Zu diesem Behufe nehmen wir die erste Gleichung (99. c.), nämlich:

$$(z^2z_1^2+z'^2z_1'^2-z''^2z_1''^2)^2=4\,z^2z_1^2z'^2z_1'^2\,,$$

welche eine blose Umformung der ersten obern Gleichung (97. c.) ist, und setzen in sie für z''^2 und $z_1''^2$ ihre aus den zwei ersten obern Gleichungen (97. a.) entnommenen Werthe ein, wodurch sie nach Wegschaffung der Klammern wird:

$$(-1+z^2+z'^2+z_1^2+z_1'^2-z^2z_1'^2-z'^2z_1^2)^2=4\,z^2z_1^2z'^2z_1'^2\,.$$

Da aber gemäss der ersten und zweiten untern Gleichung (97. a.)

$$z^2 + z_1^2 = 1 - z_2^2 \quad \text{und} \quad z'^2 + z_1'^2 - 1 = -z_2'^2, \quad \text{also} \quad z^2 + z'^2 + z_1^2 + z_1'^2 - 1 = 1 - z_2^2 - z_2'^2$$

oder der dritten untern Gleichung (97. a.) zur Folge

$$z^2 + z'^2 + z_1^2 + z_1'^2 - 1 = z_2''^2$$

ist, so lässt sie sich auch so schreiben:

$$[z_2''^2 - (z^2 z_1'^2 + z'^2 z_1^2)]^2 = 4 z^2 z_1^2 z'^2 z_1'^2$$

und geht, wenn man wirklich ins Quadrat erhebt, über in:

$$z_2''^4 - 2 z_2''^2 (z^2 z_1'^2 + z'^2 z_1^2) + (z^2 z_1'^2 - z'^2 z_1^2)^2 = 0,$$

welcher man auch die andere Form

$$z_2''^4 + 2 z_2''^2 (z^2 z_1'^2 - z'^2 z_1^2) + (z^2 z_1'^2 - z'^2 z_1^2)^2 = 4 z^2 z_1'^2 z_2''^2$$

oder

(100. a.) $$(z_2''^2 + z^2 z_1'^2 - z'^2 z_1^2)^2 = 4 z^2 z_1'^2 z_2''^2$$

geben kann. Drückt man z'^2 und z_1^2 durch z^2 und $z_1'^2$ mittelst der letzten Gleichungen (98. a. und b.) aus, so wird

$$z'^2 z_1^2 = z^2 z_1'^2 - \frac{\frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}} z_1'^2 - \frac{\frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}} z^2 + \frac{\left(\frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)\left(\frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)},$$

und setzt man diesen Werth von $z'z_1$ in die Gleichung (100. a.) ein, so erhält man:

(100. b.) $$\left[z_2''^2 + \frac{\frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}} z_1'^2 + \frac{\frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}} z^2 - \frac{\left(\frac{1}{(\alpha_0)} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)\left(\frac{1}{(\alpha_0')} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)}{\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0''}\right)}\right]^2 = 4 z^2 z_1'^2 z_2''^2,$$

welches die verlangte Gleichung in z^2, $z_1'^2$, $z_2''^2$ ist.

Da man zur Bestimmung der drei Grössen z^2, $z_1'^2$, $z_2''^2$ blos die zwei Gleichungen (98. d.) und (100. b.) hat, so kann man eine von ihnen oder eine Verbindung zwischen mehrern innerhalb gewisser Schranken der Wahl frei geben. Wollte man z. B., dass die Summe aller drei einen vorgeschriebenen Werth S_0 annehme, wodurch noch die dritte Gleichung

(100. c.) $$z^2 + z_1'^2 + z_2''^2 = S_0$$

zu den vorigen beiden hinzu käme, und eliminirte man zwei von diesen Grössen aus den jetzt vorhandenen drei Gleichungen, so würde man auf eine Eliminationsgleichung in z^2 oder $z_1'^2$ oder $z_2''^2$ vom dritten Grade hingeführt, die man lösen müsste, um dann auch mittelst der Gleichungen (98. a. bis c.) alle übrigen durch das gleiche Grundzeichen vorgestellten Grössen zu erhalten; wollte man aber der einen von ihnen einen vorgeschriebenen Werth ζ^2 beilegen, so genügen zur Bestimmung der beiden andern schon die zwei Gleichungen (98. d.) und (100. b.) und man findet jetzt die zwei zu ζ^2 gehörigen andern Grössen durch Auflösung einer quadratischen Gleichung. Hat man auf die eine oder andere Art alle Grössen bestimmt, deren Grundzeichen z ist, so liefern dann die Gleichungen (97. b.) aus ihnen die Grössen A^2, A'^2, A''^2; A_1^2, $A_1'^2$, $A_1''^2$; A_2^2, $A_2'^2$, $A_2''^2$, welche sämmtlich reelle und positive Zahlen werden müssen,

wenn das gesuchte Coordinatensystem in Wahrheit existiren soll. Die hierzu erforderlichen Bedingungen geben die Relationen zwischen den Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 und (α_0), (α'_0), (α''_0) an die Hand, welche stattfinden müssen, wenn die Mittelpunctsfläche zweiter Ordnung durch eine vorgeschriebene Gleichung an einem wirklichen Coordinatensysteme darstellbar sein soll. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes, welche uns zu weit führen würde, lassen wir jedoch bei Seite liegen.

228) Ausser den bisher von uns betrachteten Diametralgleichungen, wodurch sich jede Fläche der zweiten Ordnung in solcher Art darstellen lässt, dass deren Eigenschaften dem Beschauenden näher rücken, giebt es noch andere Gleichungsformen, die dasselbe leisten, die jedoch nur bei gewissen Arten jener Flächen entstehen können, bei dem Hyperboloid einer jeden Art nämlich und bei dem hyperbolischen Paraboloid, also nur bei solchen Flächen zweiter Ordnung, bei welchen Durchschnitte Hyperbeln liefern können. Wir werden diese neuen Gleichungsformen zuvörderst für jede Art des Hyperboloids aufstellen und sodann noch für das hyperboloidische Paraboloid.

Wir haben oben gesehen, dass sich die mit einem Mittelpunct versehene Fläche der zweiten Ordnung durch eine Gleichung von jeder der Formen

$$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + \alpha''_0 x''^2 = (\mu_0) \quad \text{und} \quad \delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 + \delta''_0 u''^2 = (\nu_0) \qquad \textbf{(101. a.)}$$

in schiefen oder senkrechten Coordinaten an unzählig vielen dazu geeigneten Coordinatensystemen darstellen lässt. Fassen wir die Gleichungen

$$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + \alpha''_0 x''^2 = 0 \quad \text{und} \quad \delta_0 u^2 + \delta'_0 u'^2 + \delta''_0 u''^2 = 0 \qquad \textbf{(101. b.)}$$

ins Auge, so zeigt sich auf den ersten Blick, dass diese nur auf eine einzige Art befriedigt werden können, wenn α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 entweder lauter positive oder lauter negative Zahlen sind; sie lassen sich nämlich durch reelle Werthe von x, x', x'' oder u, u', u'' nicht anders realisiren, als indem man entweder

$$x=0, \quad x'=0, \quad x''=0 \quad \text{oder} \quad u=0, \quad u'=0, \quad u''=0$$

nimmt, woraus man sieht, dass in diesem Falle durch die Gleichungen (101. b.) blos ein Punct dargestellt werde, welcher die Coordinatenspitze desjenigen Systems ist, an dem die Diametralgleichung (101. a.) zum Vorschein kommt, und es ist diese Coordinatenspitze nichts anders als der Mittelpunct der Fläche zweiter Ordnung. Da aber in dem Falle, wo α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 sämmtlich positive Zahlen sind, durch jede Gleichung (101. a.) ein Ellipsoid dargestellt wird oder gar nichts, je nachdem (μ_0) oder (ν_0) eine Zahl mit demselben oder dem entgegengesetzten Vorzeichen ist, wie die übrigen in derselben Gleichung auftretenden Coeffizienten, so lässt sich schliessen, dass in allen den Fällen, wo in den Gleichungen (101. a.) ein Ellipsoid enthalten ist, oder wo sie gar keine reelle Bedeutung haben, durch die Gleichungen (101. b.) ein bloser Punct dargestellt werde, welcher beim Ellipsoid sein Mittelpunct ist. Sind aber zwei von den Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 oder δ_0, δ'_0, δ''_0 positive oder negative Zahlen und der dritte im ersten Falle eine negative, im andern eine positive Zahl, welches alle Fälle in sich begreift, wo die erwähnten drei Coeffizienten nicht sämmtlich Zahlen von demselben Vorzeichen sind und die Gleichung (101. a.) ein Hyperboloid der ersten oder zweiten Art in sich trägt, so giebt es unendlich viele Puncte, welche den Gleichungen (101. b.) angehören, und diese bilden in ihrer Verbindung, wie wir schon oben (Nr. 209.) gefunden haben, eine Kegelfläche, deren Scheitel im Mittelpunct des Hyperboloids liegt. Die hier in Rede stehende Kegelfläche, deren Gleichung

(101. b.) aus der Gleichung (101. a.) hervorgegangen ist, steht in einer merkwürdigen Beziehung zu dem durch die letztgenannte Gleichung dargestellten Hyperboloide, welche durch die folgende Betrachtung ans Licht gezogen wird. Denkt man sich nämlich ein durch eine der Gleichungen (101. a.) dargestelltes Hyperboloid und in ihm einen unendlich weit von dessen Mittelpunct, d. h. von der Coordinatenspitze entfernten Punct, dessen Coordinaten wir durch x_0, x'_0, x''_0 oder u_0, u'_0, u''_0 bezeichnen wollen, so muss wenigstens die eine von diesen drei Coordinaten selber einen unendlich grossen Werth annehmen, vorausgesetzt, was zum Hyperboloid gefordert wird, dass die Coeffizienten der Gleichung (101. a.) durch endliche Zahlen ausgesprochen sind, und man hat, weil dieser Punct dem Hyperboloid angehört:

(101. c.) $$\alpha_0 x_0^2 + \alpha'_0 x_0'^2 + \alpha''_0 x_0''^2 = (\mu_0) \quad \text{oder} \quad \delta_0 u_0^2 + \delta'_0 u_0'^2 + \delta''_0 u_0''^2 = (\nu_0).$$

Sehen wir nun x_0 oder u_0 als denjenigen der Coordinatenwerthe dieses Punctes an, welcher absolut genommen der grösste, also nothwendiger Weise unendlich gross ist, und suchen wir den Punct der Kegelfläche auf, in Bezug auf welchen

$$x' = x'_0 \quad \text{und} \quad x'' = x''_0 \quad \text{oder} \quad u' = u'_0 \quad \text{und} \quad u'' = u''_0$$

ist, so ergiebt sich die dritte Coordinate x oder u dieses letztern Punctes aus der Gleichung

(101. d.) $$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x_0'^2 + \alpha''_0 x_0''^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \delta_0 u^2 + \delta'_0 u_0'^2 + \delta''_0 u_0''^2 = 0.$$

Zieht man die zusammengehörigen Gleichungen (101. c.) und (101. b.) von einander ab, so kommt:

$$\alpha_0 (x_0^2 - x^2) = (\mu_0) \quad \text{oder} \quad \delta_0 (u_0^2 - u^2) = (\nu_0),$$

welche man auch in der folgenden Form schreiben kann:

$$1 - \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{(\mu_0)}{\alpha_0 x_0^2} \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{u^2}{u_0^2} = \frac{(\nu_0)}{\delta_0 u_0^2}.$$

Man erkennt aus diesen letztern Gleichungen, dass in dem Maasse vollständiger

$$\frac{x^2}{x_0^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{u^2}{u_0^2} = 1$$

sein müsse, je näher $\frac{(\mu_0)}{\alpha_0 x_0^2}$ oder $\frac{(\nu_0)}{\delta_0 u_0^2}$ gegen die Null hinrückt, welches in dem Grade mehr der Fall ist, je grösser der Abstand des im Hyperboloide gewählten Punctes von dessen Mittelpunct ist. Je grösser dieser Abstand wird, desto vollständiger wird $\frac{x^2}{x_0^2} = 1$ oder $\frac{u^2}{u_0^2} = 1$ und desto sicherer kann man

$$x = x_0 \quad \text{oder} \quad u = u_0$$

nehmen, welche Gleichungen bei einem unendlich grossen Abstande des gedachten Punctes vom Mittelpuncte des Hyperboloids völlig genau werden; dann aber fällt der im Hyperboloid gewählte Punct mit dem in der Kegelfläche aufgesuchten wahrhaft zusammen. Aus dieser Betrachtung lässt sich entnehmen, dass die Puncte des Hyperboloids um so näher an Puncte der Kegelfläche rücken, je weiter sie vom Mittelpuncte entfernt liegen, und dass diejenigen Puncte des Hyperboloids, deren Abstand von seinem Mittelpunct unendlich gross wird, in die Kegelfläche selber fallen. Wegen dieser Eigenschaft nennt man die durch die Gleichung (101. b.)

dargestellte Kegelfläche den Asymptotenkegel des durch die Gleichung (101. a.) dargestellten Hyperboloids, welches eben sowohl von der ersten wie von der zweiten Art sein kann.

Wählt man bei der Bildung der Gleichungen vor (70. a.) und (72. a.) das neue Coordinatensystem so, dass dessen drei Grundaxen Seiten des Asymptotenkegels werden und nicht in einer und derselben Ebene liegen, so ist, wenn $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ oder $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{u}''$ die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines in der neuen Axe A Y ausserhalb der Coordinatenspitze A liegenden Punctes, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}'_1$, $\mathfrak{r}''_1$ oder $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}'_1$, $\mathfrak{u}''_1$ die eines in der Axe A Y′ und $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}'_2$, $\mathfrak{r}''_2$ oder $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}'_2$, $\mathfrak{u}''_2$ die eines in der Axe A Y″ liegenden solchen Punctes und $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ die Abstände dieser Puncte von der Coordinatenspitze bezeichnen:

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{\mathfrak{r}}{r}, & A'&=\frac{\mathfrak{r}'}{r}, & A''&=\frac{\mathfrak{r}''}{r},\\ A_1&=\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1}, & A'_1&=\frac{\mathfrak{r}'_1}{r_1}, & A''_1&=\frac{\mathfrak{r}''_1}{r_1},\\ A_2&=\frac{\mathfrak{r}_2}{r_2}, & A'_2&=\frac{\mathfrak{r}'_2}{r_2}, & A''_2&=\frac{\mathfrak{r}''_2}{r_2}, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} C&=\frac{\mathfrak{u}}{r}, & C'&=\frac{\mathfrak{u}'}{r}, & C''&=\frac{\mathfrak{u}''}{r},\\ C_1&=\frac{\mathfrak{u}_1}{r_1}, & C'_1&=\frac{\mathfrak{u}'_1}{r_1}, & C''_1&=\frac{\mathfrak{u}''_1}{r_1},\\ C_2&=\frac{\mathfrak{u}_2}{r_2}, & C'_2&=\frac{\mathfrak{u}'_2}{r_2}, & C''_2&=\frac{\mathfrak{u}''_2}{r_2}, \end{aligned}\right\} \dots\dots \quad \textbf{(102. a.)}$$

wobei die das Grundzeichen A oder C an sich tragenden Projectionszahlen wieder ganz dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen vor (70. a.) oder (72. a.) besitzen. Weil aber die in den Seiten A Y, A Y′, A Y″ des Asymptotenkegels liegenden Puncte eben desswegen auch der Kegelfläche selber angehören, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung dieser Kegelfläche befriedigen, d. h. es muss gleichzeitig sein:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0\mathfrak{r}^2+\alpha'_0\mathfrak{r}'^2+\alpha''_0\mathfrak{r}''^2&=0,\\ \alpha_0\mathfrak{r}_1^2+\alpha'_0\mathfrak{r}_1'^2+\alpha''_0\mathfrak{r}_1''^2&=0,\\ \alpha_0\mathfrak{r}_2^2+\alpha'_0\mathfrak{r}_2'^2+\alpha''_0\mathfrak{r}_2''^2&=0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \delta_0\mathfrak{u}^2+\delta'_0\mathfrak{u}'^2+\delta''_0\mathfrak{u}''^2&=0,\\ \delta_0\mathfrak{u}_1^2+\delta'_0\mathfrak{u}_1'^2+\delta''_0\mathfrak{u}_1''^2&=0,\\ \delta_0\mathfrak{u}_2^2+\delta'_0\mathfrak{u}_2'^2+\delta''_0\mathfrak{u}_2''^2&=0, \end{aligned}\right.$$

oder wenn man in diese Gleichungen anstatt der Coordinaten ihre aus den Gleichungen (102. a.) entnommenen Werthe einsetzt, da keine der Grössen r, r_1, r_2 null ist:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 A^2+\alpha'_0 A'^2+\alpha''_0 A''^2&=0,\\ \alpha_0 A_1^2+\alpha'_0 A_1'^2+\alpha''_0 A_1''^2&=0,\\ \alpha_0 A_2^2+\alpha'_0 A_2'^2+\alpha''_0 A_2''^2&=0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \delta_0 C^2+\delta'_0 C'^2+\delta''_0 C_2''^2&=0,\\ \delta_0 C_1^2+\delta'_0 C_1'^2+\delta''_0 C_1''^2&=0,\\ \delta_0 C_2^2+\delta'_0 C_2'^2+\delta''_0 C_2''^2&=0, \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad \textbf{(102. b.)}$$

von denen die drei unter einander stehenden stets gleichzeitig wahr sein müssen. In Folge dieser Relationen verschwinden aber die Glieder aus der Gleichung vor (70. a.) oder (72. a.), welche die Quadrate der Coordinaten in sich tragen, und es bleiben blos die zurück, welche die Producte zweier Coordinaten in sich aufnehmen, so dass eine Gleichung von der Form:

$$2\beta_0 y'y''+2\beta'_0 yy''+2\beta''_0 yy'=(\mu_0) \quad \text{oder} \quad 2\varepsilon_0 y'y''+2\varepsilon'_0 yy''+2\varepsilon''_0 yy'=(\nu_0) \quad \textbf{(102. c.)}$$

entsteht, wenn

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 A A_1+\alpha'_0 A'A'_1+\alpha''_0 A''A''_1&=\beta''_0,\\ \alpha_0 A A_2+\alpha'_0 A'A'_2+\alpha''_0 A''A''_2&=\beta'_0,\\ \alpha_0 A_1 A_2+\alpha'_0 A'_1 A'_2+\alpha''_0 A''_1 A''_2&=\beta_0, \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned} \delta_0 C C_1+\delta'_0 C'C'_1+\delta''_0 C''C''_1&=\varepsilon''_0,\\ \delta_0 C C_2+\delta'_0 C'C'_2+\delta''_0 C''C''_2&=\varepsilon'_0,\\ \delta_0 C_1 C_2+\delta'_0 C'_1 C'_2+\delta''_0 C''_1 C''_2&=\varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \dots \quad \textbf{(102. d.)}$$

gesetzt wird, wobei die zwei Gleichungen (102. c.) eine und dieselbe Form haben, aber aus verschiedenen Gleichungen hervorgegangen sind.

Oder wählt man bei der Bildung der Gleichungen vor (71. a.) und (73. a.) das neue Coordinatensystem so, dass dessen drei Polaraxen Seiten des Asymptotenkegels werden und nicht in einer und derselben Ebene liegen, so ist, wenn $(\mathfrak{r})$, $(\mathfrak{r}')$, $(\mathfrak{r}'')$ oder $(\mathfrak{u})$, $(\mathfrak{u}')$, $(\mathfrak{u}'')$ die schiefen oder senkrechten Coordinaten eines ausserhalb der Coordinatenspitze A aber in der Polaraxe A$\mathfrak{Y}$ liegenden Punctes, $(\mathfrak{r}_1)$, $(\mathfrak{r}'_1)$, $(\mathfrak{r}''_1)$ oder $(\mathfrak{u}_1)$, $(\mathfrak{u}'_1)$, $(\mathfrak{u}''_1)$ die eines in der Polaraxe A$\mathfrak{Y}'$, $(\mathfrak{r}_2)$, $(\mathfrak{r}'_2)$, $(\mathfrak{r}''_2)$ oder $(\mathfrak{u}_2)$, $(\mathfrak{u}'_2)$, $(\mathfrak{u}''_2)$ die eines in der Polaraxe A$\mathfrak{Y}''$ liegenden solchen Punctes und $(\mathfrak{r})$, $(\mathfrak{r}_1)$, $(\mathfrak{r}_2)$ die Abstände dieser Puncte von der Coordinatenspitze bezeichnen:

$$(103.\ a.)\quad \left\{\begin{array}{l} (A)=\frac{(\mathfrak{r})}{(\mathfrak{r})},\ (A')=\frac{(\mathfrak{r}')}{(\mathfrak{r})},\ (A'')=\frac{(\mathfrak{r}'')}{(\mathfrak{r})}, \\ (A_1)=\frac{(\mathfrak{r}_1)}{(\mathfrak{r}_1)},\ (A'_1)=\frac{(\mathfrak{r}'_1)}{(\mathfrak{r}_1)},\ (A''_1)=\frac{(\mathfrak{r}''_1)}{(\mathfrak{r}_1)}, \\ (A_2)=\frac{(\mathfrak{r}_2)}{(\mathfrak{r}_2)},\ (A'_2)=\frac{(\mathfrak{r}'_2)}{(\mathfrak{r}_2)},\ (A''_2)=\frac{(\mathfrak{r}''_2)}{(\mathfrak{r}_2)} \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} (\Gamma)=\frac{(\mathfrak{u})}{(\mathfrak{r})},\ (\Gamma')=\frac{(\mathfrak{u}')}{(\mathfrak{r})},\ (\Gamma'')=\frac{(\mathfrak{u}'')}{(\mathfrak{r})}, \\ (\Gamma_1)=\frac{(\mathfrak{u}_1)}{(\mathfrak{r}_1)},\ (\Gamma'_1)=\frac{(\mathfrak{u}'_1)}{(\mathfrak{r}_1)},\ (\Gamma''_1)=\frac{(\mathfrak{u}''_1)}{(\mathfrak{r}_1)}, \\ (\Gamma_2)=\frac{(\mathfrak{u}_2)}{(\mathfrak{r}_2)},\ (\Gamma'_2)=\frac{(\mathfrak{u}'_2)}{(\mathfrak{r}_2)},\ (\Gamma''_2)=\frac{(\mathfrak{u}''_2)}{(\mathfrak{r}_2)}, \end{array}\right.$$

wobei die das Grundzeichen (A) oder (Γ) an sich tragenden Projectionszahlen wieder ganz dieselbe Bedeutung wie in den Gleichungen vor (71. a.) oder (73. a.) besitzen. Weil aber die in den Seiten A$\mathfrak{Y}$, A$\mathfrak{Y}'$, A$\mathfrak{Y}''$ des Asymptotenkegels liegenden Puncte darum zugleich auch Puncte dieser Kegelfläche sind, so müssen ihre Coordinaten die Gleichung dieser Kegelfläche, welche durch (101. b.) gegeben ist, befriedigen, d. h. es müssen die folgenden drei Gleichungen stattfinden:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0(\mathfrak{r})^2+\alpha'_0(\mathfrak{r}')^2+\alpha''_0(\mathfrak{r}'')^2=0, \\ \alpha_0(\mathfrak{r}_1)^2+\alpha'_0(\mathfrak{r}'_1)^2+\alpha''_0(\mathfrak{r}''_1)^2=0, \\ \alpha_0(\mathfrak{r}_2)^2+\alpha'_0(\mathfrak{r}'_2)^2+\alpha''_0(\mathfrak{r}''_2)^2=0, \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} \delta_0(\mathfrak{u})^2+\delta'_0(\mathfrak{u}')^2+\delta''_0(\mathfrak{u}'')^2=0, \\ \delta_0(\mathfrak{u}_1)^2+\delta'_0(\mathfrak{u}'_1)^2+\delta''_0(\mathfrak{u}''_1)^2=0, \\ \delta_0(\mathfrak{u}_2)^2+\delta'_0(\mathfrak{u}'_2)^2+\delta''_0(\mathfrak{u}''_2)^2=0, \end{array}\right.$$

oder wenn man in diese Gleichungen anstatt der Coordinaten ihre durch die Gleichungen (103. a.) gegebenen Werthe einsetzt, da keine der Grössen $(\mathfrak{r})$, $(\mathfrak{r}_1)$, $(\mathfrak{r}_2)$ null werden kann:

$$(103.\ b.)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \alpha_0(A)^2+\alpha'_0(A')^2+\alpha''_0(A'')^2=0, \\ \alpha_0(A_1)^2+\alpha'_0(A'_1)^2+\alpha''_0(A''_1)^2=0, \\ \alpha_0(A_2)^2+\alpha'_0(A'_2)^2+\alpha''_0(A''_2)^2=0, \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} \delta_0(\Gamma)^2+\delta'_0(\Gamma')^2+\delta''_0(\Gamma'')^2=0, \\ \delta_0(\Gamma_1)^2+\delta'_0(\Gamma'_1)^2+\delta''_0(\Gamma''_1)^2=0, \\ \delta_0(\Gamma_2)^2+\delta'_0(\Gamma'_2)^2+\delta''_0(\Gamma''_2)^2=0, \end{array}\right.$$

wobei die drei vordern oder hintern Gleichungen gleichzeitig stattfinden und sich auf die drei Polaraxen des gewählten Coordinatensystems beziehen. In Folge dieser Relationen verschwinden aber aus der Gleichung vor (71. a.) oder (73. a.) die Glieder, welche die Quadrate der Coordinaten in sich enthalten, und es bleiben blos die zurück, welche die Producte von je zwei Coordinaten in sich aufnehmen, so dass eine Gleichung von der Form:

$$(103.\ c.)\quad 2\gamma_0\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''+2\gamma'_0\mathfrak{v}\mathfrak{v}''+2\gamma''_0\mathfrak{v}\mathfrak{v}'=(\mu_0) \quad\text{oder}\quad 2\zeta_0\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''+2\zeta'_0\mathfrak{v}\mathfrak{v}''+2\zeta''_0\mathfrak{v}\mathfrak{v}'=(\nu_0)$$

entsteht, wenn

oder

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0 (A)(A_1) + \alpha_0' (A')(A_1') + \alpha_0'' (A'')(A_1'') = \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'\,\gamma_0'' \,, \\
&\alpha_0 (A)(A_2) + \alpha_0' (A')(A_2') + \alpha_0'' (A'')(A_2'') = \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_2''\,\gamma_0' \,, \\
&\alpha_0 (A_1)(A_2) + \alpha_0' (A_1')(A_2') + \alpha_0'' (A_1'')(A_2'') = \mathfrak{D}_1'\,\mathfrak{D}_2''\,\gamma_0 \\
&\delta_0 (\Gamma)(\Gamma_1) + \delta_0' (\Gamma')(\Gamma_1') + \delta_0'' (\Gamma'')(\Gamma_1'') = \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1'\,\zeta_0'' \,, \\
&\delta_0 (\Gamma)(\Gamma_2) + \delta_0' (\Gamma')(\Gamma_2') + \delta_0'' (\Gamma'')(\Gamma_2'') = \mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_2''\,\zeta_0' \,, \\
&\delta_0 (\Gamma_1)(\Gamma_2) + \delta_0' (\Gamma_1')(\Gamma_2') + \delta_0'' (\Gamma_1'')(\Gamma_2'') = \mathfrak{D}_1'\,\mathfrak{D}_2''\,\zeta_0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(103. d.)}$$

gesetzt wird, und die beiden Formen (103. c.) sind eine und dieselbe, nur aus verschiedenen Gleichungen hervorgegangene.

Aus den vorstehenden Betrachtungen geht hervor, dass sich jedes Hyperboloid, keineswegs aber das Ellipsoid, durch eine Gleichung von der in (102. c.) stehenden Form darstellen lässt, wenn dessen Gleichung an einem Coordinatensysteme hergestellt wird, dessen drei Grundaxen Seiten des Asymptotenkegels sind, so wie durch eine Gleichung von der in (103. c.) stehenden Form an jedem Coordinatensysteme, dessen drei Polaraxen Seiten des Asymptotenkegels sind. Gleichungen von den in (102. c.) oder (103. c.) angezeigten Formen pflegt man Asymptotengleichungen des Hyperboloids zu nennen. Da man zur Bestimmung der drei Grundaxen oder der drei Polaraxen des neuen Systems, an welchem die Asymptotengleichung des Hyperboloids entsteht, nur die drei in (102. b.) oder (103. b.) enthaltenen Bedingungsgleichungen erhalten hat, so bleiben drei willkührliche Grössen in den Asymptotengleichungen wie in den Diametralgleichungen zu anderweitiger Disposition übrig. Die hier aufgefundenen viererlei Gleichungsformen lassen sich auch jetzt wieder durch die in Nr. 213. angezeigten Mittel auf eine einzige zurückführen.

229) Zu ähnlichen Formen geben auch die Gleichungen des hyperbolischen Paraboloids Anlass. Geht man nämlich auf die Gleichungen (91. a.) oder (92. a.) und (93. a.) oder (94. a.) zurück, in welche die vordere oder hintere Gleichung (64. b.) an einem neuen Coordinatensysteme übergeht, dessen Spitze irgend ein durch die Coordinaten ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' gegebener Punct O des durch die Gleichungen (64. b.) dargestellten Paraboloids ist, und dessen eine Grundaxe O Y″ oder Polaraxe O 𝔜″ mit der Grundaxe A X″ oder Polaraxe A 𝔛″ des ursprünglichen Systems parallel läuft, welche Gleichungen alle möglichen ihrer Art in sich fassen, so lange die Richtungen der beiden andern neuen Grund- oder Polaraxen noch völlig unbestimmt bleiben; und versucht man es, diese noch unbestimmten Richtungen so zu wählen, dass die an ihnen hervorgehende Gleichung aus so wenigen Gliedern wie möglich bestehe, so wird man neben dem Wege, der dort zu den Gleichungen (91. d.) oder (92. d.) und (93. d.) oder (94. d.) führte, noch den folgenden einschlagen können, der jedoch nicht wie der eben genannte bei dem Paraboloide einer jeden Art anwendbar ist. Bleibt man zuvörderst bei dem Falle stehen, wo aus der gegebenen Gleichung von einer der in (64. b.) stehenden Formen eine Gleichung in schiefen Coordinaten hergeholt werden soll, wobei man auf die Gleichungen (91. a.) und (93. a.) hingewiesen wird, und sucht man in der Gleichung (91. b.) oder (93. b.) die Glieder zum Verschwinden zu bringen, in denen y^2 und y'^2 auftritt, so müsste man die Axen O Y und O Y′ so wählen, dass

68 *

(104. a.) $\alpha_0 A^2 + \alpha_0' A'^2 = 0$ und $\alpha_0 A_1^2 + \alpha_0' A_1'^2 = 0$ oder $\delta_0 C^2 + \delta_0' C'^2 = 0$ und $\delta_0 C_1^2 + \delta_0' C_1'^2 = 0$ wird, woraus

$$\frac{A'}{A} = \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}} \text{ und } \frac{A_1'}{A_1} = \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}} \text{ oder } \frac{C'}{C} = \sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta_0'}} \text{ und } \frac{C_1'}{C_1} = \sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta_0'}}$$

folgt. Es werden sonach die Quotienten $\frac{A'}{A}$, $\frac{A_1'}{A_1}$ oder die $\frac{C'}{C}$, $\frac{C_1'}{C_1}$ imaginär und in dessen Folge die Axen OY, OY′ unwirklich, wenn α_0 und α_0' oder δ_0 und δ_0' Zahlen mit gleichen Vorzeichen, beide zugleich entweder positiv oder negativ sind, in welchem Falle aber ein elliptisches Paraboloid in der Gleichung (64. b.) enthalten ist. Sind hingegen α_0 und α_0' oder δ_0 und δ_0' Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen, in welchem Falle die Gleichung (64. b.) einem hyperbolischen Paraboloid angehört, so erhält man für jeden der Coeffizienten $\frac{A'}{A}$ und $\frac{A_1'}{A_1}$ oder $\frac{C'}{C}$ und $\frac{C_1'}{C_1}$ dieselben zwei reellen Zahlen, welche an Grösse einander gleich, dem Vorzeichen nach aber gerade entgegengesetzt sind. Da nun jede noch unbestimmte Richtung zwei beliebige Grössen in sich trägt und die Gleichungen (104. a.) blos über eine derselben verfügen, so kann man die andere noch zu einer weitern Vereinfachung obiger Gleichungen benützen und z. B. die Glieder, welche y und y′ in sich tragen, zum Verschwinden bringen wollen, welches geschieht, wenn

(104. b.) $\alpha_0 A \xi + \alpha_0' A' \xi' + A'' \gamma_0'' = 0$ und $\alpha_0 A_1 \xi + \alpha_0' A_1' \xi' + A_1'' \gamma_0'' = 0$
oder
$\delta_0 C \eta + \delta_0' C' \eta' + C'' \zeta_0'' = 0$ und $\delta_0 C_1 \eta + \delta_0' C_1' \eta' + C_1'' \zeta_0'' = 0$

durch die zweite bei jeder Richtung noch willkührlich zu wählende Grösse gemacht wird. Da die obern sowohl als die untern Gleichungen (104. b.) für $\frac{A''}{A}$ und $\frac{A_1''}{A_1}$ oder $\frac{C''}{C}$ und $\frac{C_1''}{C}$ einerlei Werthe finden lassen, wenn $\frac{A'}{A}$ und $\frac{A_1'}{A_1}$ oder $\frac{C'}{C}$ und $\frac{C_1'}{C_1}$ einerlei Werthe besitzen, so muss man, um zu zwei verschiedenen Richtungen OY und OY′ zu gelangen, wie im Begriffe eines Coordinatensystems liegt, für $\frac{A'}{A}$ und $\frac{A_1'}{A_1}$ oder für $\frac{C'}{C}$ und $\frac{C_1'}{C_1}$ zwei verschiedene Werthe zu Grunde legen, welches sich nur dadurch bewirken lässt, dass man für einen der beiden Quotienten seinen einen aus den Gleichungen (104. a.) sich ergebenden Werth nimmt, und den zweiten Werth dem andern Quotienten beilegt, wodurch man findet:

(104. c.) $$\frac{A'}{A} = +\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}},\ \frac{A_1'}{A_1} = -\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}} \text{ oder } \frac{C'}{C} = +\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta_0'}},\ \frac{C_1'}{C_1} = -\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta_0'}},$$

wo für $\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}$ oder $\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta_0'}}$ mit gleichem Rechte sein positiver oder negativer, wenn nur überall derselbe, Werth genommen werden kann; dann aber findet man aus den Gleichungen (104. b.):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{A''}{A} = -\frac{\xi\alpha_0 + \xi'\sqrt{-\alpha_0\alpha'_0}}{\gamma''_0} \quad \text{und} \quad \frac{A''_1}{A_1} = -\frac{\xi\alpha_0 - \xi'\sqrt{-\alpha_0\alpha'_0}}{\gamma''_0} \\ \text{oder} \\ \frac{C''}{C} = -\frac{\eta\delta_0 + \eta'\sqrt{-\delta_0\delta'_0}}{\zeta''_0} \quad \text{und} \quad \frac{C''_1}{C_1} = -\frac{\eta\delta_0 - \eta'\sqrt{-\delta_0\delta'_0}}{\zeta''_0} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(104. d.)}$$

Durch die Gleichungen (104. c. und d.) sind die zwei von einander verschiedenen Richtungen O Y und O Y′ gefunden, welche mit der schon gewählten Axe O Y″ das neue Coordinatensystem bilden, an welchem die Gleichung (91. b.) oder (93. b.) des hyperbolischen Paraboloids den Bedingungen (104. und b.) gemäss

$$(\alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A' A'_1)\,y\,y' \pm \gamma''_0 y'' = 0 \quad \text{oder} \quad (\delta_0 C C_1 + \delta'_0 C' C'_1)\,y\,y' \pm \mathfrak{C}''_2 \zeta''_2 y'' = 0 \qquad \textbf{(104. e.)}$$

wird, welche beide eine und dieselbe Form besitzen. Aus den Gleichungen (104. c.) lässt sich leicht ableiten, dass

$$\alpha'_0 A' A'_1 = \alpha_0 A A_1 \quad \text{oder} \quad \delta'_0 C' C'_1 = \delta_0 C C_1$$

ist, wodurch die Gleichung (104. e.) sich verwandelt in:

$$2\alpha_0 A A_1 y y' \pm \gamma''_0 y'' = 0 \quad \text{oder} \quad 2\delta_0 C C_1 y y' \pm \mathfrak{C}''_2 \zeta''_2 y'' = 0 \qquad \textbf{(104. f.)}$$

und die Grösse AA_1 oder CC_1 kann man ohne Schwierigkeit mittelst der in (104. c. und d.) erhaltenen Quotienten durch die Coeffizienten der gegebenen Gleichung (64. b.) und durch die Coordinaten des beliebig zu wählenden Punctes O des Paraboloids auswerthen.

Knüpft man hingegen die verwandten Betrachtungen an die Gleichung (92. b.) oder (94. b.) an, in welche die vordere oder hintere Gleichungen (64. b.) an einem neuen Coordinatensysteme übergeht, dessen Spitze irgend ein durch die Coordinaten ξ, ξ', ξ'' oder η, η', η'' gegebener Punct O des durch die Gleichungen (64. b.) dargestellten Paraboloids ist, und dessen eine Polaraxe O $\mathfrak{Y}''$ mit der ursprünglichen Grundaxe A X″ oder Polaraxe A $\mathfrak{X}''$ parallel läuft, welche Gleichungen alle möglichen ihrer Art in sich fassen, so lange die Grössen (A), (A'), (A'') und (A_1), (A'_1), (A''_1) oder (Γ), (Γ'), (Γ'') und (Γ_1), (Γ'_1), (Γ''_1), d. h. die Lagen der Polaraxen O $\mathfrak{Y}$ und O $\mathfrak{Y}'$ im neuen Systeme noch völlig unbestimmt beiben; und versucht man es, diese noch unbestimmten Richtungen so zu wählen, dass die an ihnen sich bildende Gleichung aus so wenigen Gliedern wie möglich bestehe, so wird man neben dem Wege, der dort zu den Gleichungen (92. d.) und (94. d.) geführt hat, noch den folgenden einschlagen können, der jedoch nicht bei dem Paraboloide einer jeden Art anwendbar ist. Sucht man nämlich in der Gleichung (92. b.) oder (94. b.) die Glieder zum Verschwinden zu bringen, in denen v^2 und und v'^2 auftreten, so hätte man die Polaraxen O $\mathfrak{Y}$ und O $\mathfrak{Y}'$ so zu wählen, dass

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_0(A)^2 + \alpha'_0(A')^2 = 0,\ \alpha_0(A_1)^2 + \alpha'_0(A'_1)^2 = 0 \ \text{oder}\ \delta_0(\Gamma)^2 + \delta'_0(\Gamma')^2 = 0,\ \delta_0(\Gamma_1)^2 + \delta'_0(\Gamma'_1)^2 = 0 \\ \text{wird, woraus} \\ \frac{(A')}{(A)} = \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}},\ \frac{(A'_1)}{(A_1)} = \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}} \ \text{oder}\ \frac{(\Gamma')}{(\Gamma)} = \sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta'_0}},\ \frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)} = \sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta'_0}} \end{array}\right\} \textbf{(105. a.)}$$

folgt. Es werden sonach die Quotienten $\frac{(A')}{(A)}$, $\frac{(A'_1)}{(A_1)}$ oder $\frac{(\Gamma')}{(\Gamma)}$, $\frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)}$ und in Folge dessen die Polaraxen O$\mathfrak{Y}$ und O$\mathfrak{Y}'$ unmöglich, so oft α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 Zahlen von einerlei Vorzeichen, beide zugleich positiv oder negativ sind, in welchem Falle die Gleichung (64. b.) ein elliptisches Pa-

raboloid in sich enthält, in Bezug auf welches mithin kein wirkliches Coordinatensystem vorhanden ist, an dem die Glieder in der Gleichung (92. b.) oder (94. b.), welche v^2 und v'^2 in sich tragen, zum Verschwinden gebracht werden könnten. Sind hingegen α_0 und α'_0 oder δ_0 und δ'_0 Zahlen mit entgegengesetzten Vorzeichen, in welchem Falle die Gleichung (64. b.) einem hyperbolischen Paraboloid angehört, so erhält man für jeden der Quotienten $\frac{(A')}{(A)}$, $\frac{(A'_1)}{(A_1)}$ oder $\frac{(\Gamma')}{(\Gamma)}$, $\frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)}$ zwei reelle Werthe, welche der Grösse nach einander völlig gleich, dem Vorzeichen nach aber entgegengesetzt sind. Da nun jede unbestimmte Richtung zwei willkührliche Grössen in sich trägt und die Gleichungen (105. a.) nur über je eine, den Richtungen O𝔜 und O𝔜′ angehörige, verfügen, so kann man die andere noch zu einer weitern Abkürzung der Gleichungen (92. b.) und (94. b.) benützen und z. B. die Glieder, in denen v und v′ nur in der ersten Dimension vorkommen, zum Verschwinden bringen wollen, welches geschieht, wenn gleichzeitig

(105. b.)
$$\begin{cases} \alpha_0 (A)\xi + \alpha'_0 (A')\xi' + (A'')\gamma''_0 = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 (A_1)\xi + \alpha'_0 (A'_1)\xi' + (A''_1)\gamma''_0 = 0 \\ \text{oder} \\ \delta_0 (\Gamma)\eta + \delta'_0 (\Gamma')\eta' + (\Gamma'')\zeta''_0 = 0 \quad \text{und} \quad \delta_0 (\Gamma_1)\eta + \delta'_0 (\Gamma'_1)\eta' + (\Gamma''_1)\zeta''_0 = 0 \end{cases}$$

durch die zweite bei den Richtungen O𝔜 und O𝔜′ noch willkührlich gebliebene Grösse gemacht wird. Da die obern sowohl als die untern Gleichungen (105. b.) für $\frac{(A'')}{(A)}$ und $\frac{(A''_1)}{(A_1)}$ oder $\frac{(\Gamma'')}{(\Gamma)}$ und $\frac{(\Gamma''_1)}{(\Gamma_1)}$ einerlei Werthe finden lassen, so wie $\frac{(A')}{(A)}$ und $\frac{(A'_1)}{(A'_1)}$ oder $\frac{(\Gamma')}{(\Gamma)}$ und $\frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)}$ einerlei Werthe annehmen, dann aber die Richtungen O𝔜 und O𝔜′ in eine und dieselbe Gerade fielen, welches dem Begriffe eines Coordinatensystems zuwider ist, so muss man dem einen der obigen Quotienten eines jeden Paares einen der ihm durch die Gleichungen (105. a.) gegebenen Werthe anweisen und den andern Werth dem zweiten Quotienten desselben Paares beilegen, wodurch jene Quotienten sich so bestimmen:

(105. c.)
$$\frac{(A')}{(A)} = +\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}, \quad \frac{(A'_1)}{(A_1)} = -\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}} \quad \text{oder} \quad \frac{(\Gamma')}{(\Gamma)} = +\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta'_0}}, \quad \frac{(\Gamma'_1)}{(\Gamma_1)} = -\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta'_0}},$$

während man unter $\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}$ oder $\sqrt{-\frac{\delta_0}{\delta'_0}}$ bei beiden Quotienten entweder nur seinen positiven oder nur seinen negativen Werth sich vorzustellen hat; dann aber erhält man aus den Gleichungen (105. b.):

(105. d.)
$$\begin{cases} \frac{(A'')}{(A)} = -\frac{\xi\alpha_0 + \xi'\sqrt{-\alpha_0\alpha'_0}}{\gamma''_0} \quad \text{und} \quad \frac{(A''_1)}{(A_1)} = -\frac{\xi\alpha_0 - \xi'\sqrt{-\alpha_0\alpha'_0}}{\gamma''_0} \\ \text{oder} \\ \frac{(\Gamma'')}{(\Gamma)} = -\frac{\eta\delta_0 + \eta'\sqrt{-\delta_0\delta'_0}}{\zeta''_0} \quad \text{und} \quad \frac{(\Gamma''_1)}{(\Gamma_1)} = -\frac{\eta\delta_0 - \eta'\sqrt{-\delta_0\delta'_0}}{\zeta''_0}. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (105. c. und d.) sind die beiden Polaraxen O𝔜 und O𝔜′ gefunden, welche im Vereine mit der bereits gewählten dritten O𝔜″ das neue Coordinatensystem bestim-

men, an welchem die Gleichung (92. b.) oder (94. b.) des gegebenen hyperbolischen Paraboloids den Bedingungen (105. a. und b.) zur Folge

$$[\alpha_0(A)(A_1)+\alpha'_0(A')(A'_1)]\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\pm\gamma''_0\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}=0 \text{ oder } [\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)+\delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1)]\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\pm\mathfrak{C}''_2\zeta''_2\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}=0 \quad \textbf{(105. e.)}$$

wird, welche beide Gleichungen eine und dieselbe Form besitzen und nur desshalb als zwei sich darstellen, weil sie aus Gleichungen von verschiedener Form hervorgegangen sind. Aus den Gleichungen (105. c.) kann man leicht ableiten, dass

$$\alpha'_0(A')(A'_1)=\alpha_0(A)(A_1) \quad \text{oder} \quad \delta'_0(\Gamma')(\Gamma'_1)=\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)$$

ist, wodurch die Gleichungen (105. e.) sich verwandeln in:

$$2\,\alpha_0(A)(A_1)\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\pm\gamma''_0\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}=0 \text{ oder } 2\,\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)\frac{\mathrm{v}\,\mathrm{v}'}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}'_1}\pm\mathfrak{C}''_2\zeta''_2\frac{\mathrm{v}''}{\mathfrak{D}''_2}=0, \quad \textbf{(105. f.)}$$

und es lassen sich die Grössen $(A)(A_1)$ und $(\Gamma)(\Gamma_1)$ mit Hilfe der auf die Polaraxen $O\mathfrak{Y}$ und $O\mathfrak{Y}'$ angewandten Richtungsgleichung ohne Schwierigkeit aus den in (105. c. und d.) gefundenen Quotienten durch die Coeffizienten der gegebenen Gleichung (64. b.) und durch die Coordinaten des Punctes O ausdrücken.

Aus den vorstehenden Betrachtungen lässt sich die Art und Weise entnehmen, wie jedes hyperbolische Paraboloid, nicht aber das elliptische, sowohl durch eine Gleichung von der in (104. f.) enthaltenen Form, als auch durch eine Gleichung von der in (105. f.) enthaltenen Form dargestellt werden kann, welche Formen wir die **Asymptotengleichungen** des hyperbolischen Paraboloids nennen werden. Offenbar kann man den beiden Gleichungen (104. f.) die Form

$$\mathrm{y}\,\mathrm{y}'\pm\gamma''\mathrm{y}''=0, \quad \textbf{(105. g.)}$$

so wie den beiden (105. f.) die Form

$$\mathrm{v}\,\mathrm{v}'\pm\zeta''\mathrm{v}''=0 \quad \textbf{(105. h.)}$$

ertheilen, wozu nichts weiter erfordert wird, als dass man die einen mit $2\alpha_0 AA_1$ oder $2\delta_0 CC_1$, die andern mit $2\alpha_0(A)(A_1)$ oder $2\delta_0(\Gamma)(\Gamma_1)$ dividirt.

230) Aehnlich, wie wir in Nr. 214. die Relationen zwischen den Coeffizienten zweier dieselbe Mittelpunctsfläche darstellenden Diametralgleichungen umgeformt haben, lassen sich auch die in Nr. 228. unter den Buchstaben b) und d) der Gleichungsnummern (102.) und (103.) gelieferten Relationen in andere Gestalten bringen, wie wir jetzt an den vorderen (102. b. und d.) zeigen werden, was hinreichend ist, da die hintern Gleichungen (102. b. und d.) aus den vordern dadurch hervorgehen, dass statt der Grundzeichen α_0, β_0 und A die δ_0, ε_0 und C mit unveränderten Abzeichen gesetzt werden, und aus den vordern (102. b. und d.) die vordern (103. b. und d.) entspringen, wenn man statt des Grundzeichens A das (A) mit einerlei Abzeichen und statt der Grössen β''_0, β'_0, β_0 die $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1\gamma''_0$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}''_2\gamma'_0$, $\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2\gamma_0$ gesetzt werden, so wie aus den hintern (102. b. und d.) die hintern (103. b. und d.) dadurch hervorgehen, dass man an die Stelle des Grundzeichens C das (Γ) mit den gleichen Abzeichen und für die Grössen ε''_0, ε'_0, ε_0 die $\mathfrak{D}\mathfrak{D}'_1\zeta''_0$, $\mathfrak{D}\mathfrak{D}''_2\zeta'_0$, $\mathfrak{D}'_1\mathfrak{D}''_2\zeta_0$ setzt, woraus sich der Schluss ziehen lässt, dass alle Resultate, welche man aus den vordern Gleichungen (102. b. und d.) abzuleiten im Stande ist, durch die ersten Substitutionen in die übergehen, welche den hintern Gleichungen (102. b. und d.) angehören, und dass aus diesen beiden Resultaten die erhalten wer-

den, welche den vordern oder hintern Gleichungen (103. b. und d.) entsprechen, wenn man auf die ersten oder zweiten die Substitutionen in Anwendung bringt, welche so eben an zweiter oder dritter Stelle angezeigt worden sind.

Um die vordern Gleichungen (102. b. und d.) umzuformen führen wir drei neue Richtungen AZ, AZ′, AZ″ ein, deren senkrechte Projectionszahlen an den Axen AX, AX′, AX″ wir durch c, c', c''; c_1, c_1', c_1''; c_2, c_2', c_2'' bezeichnen, und die wir dergestalt bestimmen, dass

(106. a.) $c : c' : c'' = \alpha_0 A : \alpha_0' A' : \alpha_0'' A''$, $c_1 : c_1' : c_1'' = \alpha_0 A_1 : \alpha_0' A_1' : \alpha_0'' A_1''$, $c_2 : c_2' : c_2'' = \alpha_0 A_2 : \alpha_0' A_2' : \alpha_0'' A_2''$

sein soll, eine Anforderung, die sich, falls das neue aufzusuchende Coordinatensystem im Raume existirt, stets verwirklichen lässt, den im ersten Abschnitte Nr. 21. gegebenen Erörterungen zur Folge; man kann daher unbedenklich

(106. b.) $$\begin{cases} \alpha_0 A = \varrho c, \quad \alpha_0' A' = \varrho c', \quad \alpha_0'' A'' = \varrho c''; \quad \alpha_0 A_1 = \varrho_1 c_1, \quad \alpha_0' A_1' = \varrho_1 c_1', \quad \alpha_0'' A_1'' = \varrho_1 c_1''; \\ \alpha_0 A_2 = \varrho_2 c_2, \quad \alpha_0' A_2' = \varrho_2 c_2', \quad \alpha_0'' A_2'' = \varrho_2 c_2'' \end{cases}$$

setzen, wenn man unter ϱ, ϱ_1, ϱ_2 drei völlig beliebige, erst später zu bestimmende Grössen versteht. Mittelst dieser letzten Gleichungen kann man aber den vordern Relationen (102. b.) die andere Gestalt geben:

(106. c.) $$A c + A'c' + A''c'' = 0, \quad A_1 c_1 + A_1' c_1' + A_1'' c_1'' = 0, \quad A_2 c_2 + A_2' c_2' + A_2'' c_2'' = 0,$$

welche zeigen, dass die Richtungen AZ, AZ′, AZ″ in den Polarcoordinatenebenen $\mathfrak{Y}'A\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Y}A\mathfrak{Y}''$, $\mathfrak{Y}A\mathfrak{Y}'$ des neuen Systems liegen; und die vordern Relationen (102. d.) nehmen mittelst derselben Gleichungen zweierlei Gestalten an, welche in den folgenden Gleichungen angegeben sind:

(106. d.) $$\begin{cases} \varrho_1 (A c_1 + A' c_1' + A'' c_1'') = \varrho (A_1 c + A_1' c' + A_1'' c'') = \beta_0'', \\ \varrho_2 (A c_2 + A' c_2' + A'' c_2'') = \varrho (A_2 c + A_2' c' + A_2'' c'') = \beta_0', \\ \varrho_2 (A_1 c_2 + A_1' c_2' + A_1'' c_2'') = \varrho_1 (A_2 c_1 + A_2' c_1' + A_2'' c_1'') = \beta_0. \end{cases}$$

Man kann aus den Gleichungen (106. c. und d.) die sämmtlichen Projectionszahlen, deren Grundzeichen c ist, durch die bestimmen, deren Grundzeichen A ist, und findet:

(106. e.) $$\begin{cases} \varrho c = \alpha_0 A = + \dfrac{A'A_1'' - A''A_1'}{[\overset{3}{A}]} \beta_0' - \dfrac{A'A_2'' - A''A_2'}{[\overset{3}{A}]} \beta_0'', \\[2ex] \varrho c' = \alpha_0' A' = - \dfrac{A A_1'' - A''A_1}{[\overset{3}{A}]} \beta_0' + \dfrac{A A_2'' - A''A_2}{[\overset{3}{A}]} \beta_0'', \\[2ex] \varrho c'' = \alpha_0'' A'' = + \dfrac{A A_1' - A'A_1}{[\overset{3}{A}]} \beta_0' - \dfrac{A A_2' - A'A_2}{[\overset{3}{A}]} \beta_0''; \\[2ex] \varrho_1 c_1 = \alpha_0 A_1 = + \dfrac{A'A_1'' - A''A_1'}{[\overset{3}{A}]} \beta_0 + \dfrac{A_1'A_2'' - A_1''A_2'}{[\overset{3}{A}]} \beta_0'', \\[2ex] \varrho_1 c_1' = \alpha_0' A_1' = - \dfrac{A A_1'' - A''A_1}{[\overset{3}{A}]} \beta_0 - \dfrac{A_1 A_2'' - A_1''A_2}{[\overset{3}{A}]} \beta_0'', \\[2ex] \varrho_1 c_1'' = \alpha_0'' A_1'' = + \dfrac{A A_1' - A'A_1}{[\overset{3}{A}]} \beta_0 + \dfrac{A_1 A_2' - A_1'A_2}{[\overset{3}{A}]} \beta_0''; \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_2 c_2 = \alpha_0 A_2 &= - \frac{A'A''_2 - A''A'_2}{\overset{3}{[A]}}\beta_0 + \frac{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2}{\overset{3}{[A]}}\beta'_0 \\
\varrho_2 c'_2 = \alpha'_0 A'_2 &= + \frac{A A''_2 - A'' A_2}{\overset{3}{[A]}}\beta_0 - \frac{A_1 A''_2 - A''_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\beta'_0 \\
\varrho_2 c''_2 = \alpha''_0 A''_2 &= - \frac{A A'_2 - A' A_2}{\overset{3}{[A]}}\beta_0 + \frac{A_1 A'_2 - A'_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\beta'_0 \text{ *)}.
\end{aligned}\right|$$

Diese Relationen sind in Bezug auf eine Asymptotengleichung, verglichen mit einer Diametralgleichung, das, was die (75. a.) in Bezug auf zwei Diametralgleichungen sind, und man kann noch die aufstellen, welche zwischen zwei derselben Mittelpunctsfläche angehörigen Asymptotengleichungen statt finden, die indessen hier nicht zur Sprache kommen werden. Man kann die vorstehenden Gleichungen unter Formen bringen, die für deren weitere Behandlung bequemer sind, wenn man die drei ersten mit $\beta'_0 \beta''_0$, die drei folgenden mit $\beta_0 \beta''_0$ und die drei letzten mit $\beta_0 \beta'_0$ dividirt, wodurch sie werden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\alpha_0}{\beta'_0 \beta''_0} A &= + \frac{A'A''_1 - A''A'_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} - \frac{A'A''_2 - A''A'_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0}, \\
\frac{\alpha'_0}{\beta'_0 \beta''_0} A' &= - \frac{A A''_1 - A'' A_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} + \frac{A A''_2 - A'' A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0}, \\
\frac{\alpha''_0}{\beta'_0 \beta''_0} A'' &= + \frac{A'A'_1 - A' A_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} - \frac{A A'_2 - A' A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0}; \\
\frac{\alpha_0}{\beta_0 \beta''_0} A_1 &= + \frac{A'A''_1 - A''A'_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} + \frac{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0}, \\
\frac{\alpha'_0}{\beta_0 \beta''_0} A'_1 &= - \frac{A A''_1 - A'' A_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} - \frac{A_1 A''_2 - A''_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0}, \\
\frac{\alpha''_0}{\beta_0 \beta''_0} A''_1 &= + \frac{A A'_1 - A' A_1}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta''_0} + \frac{A_1 A'_2 - A'_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0}; \\
\frac{\alpha_0}{\beta_0 \beta'_0} A_2 &= - \frac{A'A''_2 - A''A'_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0} + \frac{A'_1 A''_2 - A''_1 A'_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0}, \\
\frac{\alpha'_0}{\beta_0 \beta'_0} A'_2 &= + \frac{A A''_2 - A'' A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0} - \frac{A_1 A''_2 - A''_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0}; \\
\frac{\alpha''_0}{\beta_0 \beta'_0} A''_2 &= - \frac{A A'_2 - A' A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta'_0} + \frac{A_1 A'_2 - A'_1 A_2}{\overset{3}{[A]}}\frac{1}{\beta_0};
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \textbf{(106. f.)}$$

*) Es hält nicht schwer, einzusehen, dass man die Gleichungen (106. e.) auch unmittelbar aus den vordern (102. b. und d.) hervorholen kann, ohne dass man nöthig hätte, die Projectionszahlen, deren Grundzeichen c ist, zuvor einzuführen. Diess letztere erleichtert blos den Ausdruck.

und aus diesen findet man, wenn man von den gleichvielten einer jeden Gruppe je zwei zu einander addirt und davon die dritte subtrahirt:

$$
(106.\ g.)\quad\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\alpha_0}{\beta_0'\beta_0''}A+\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0''}A_1+\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0'}A_2=+\frac{A_1'A_2''-A_1''A_2'}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0},\\
&\frac{\alpha_0}{\beta_0'\beta_0''}A-\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0''}A_1+\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0'}A_2=-\frac{A'A_2''-A''A_2'}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0'},\\
&\frac{\alpha_0}{\beta_0'\beta_0''}A+\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0''}A_1-\frac{\alpha_0}{\beta_0\beta_0'}A_2=+\frac{A'A_1''-A''A_1'}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0''};\\
&-\frac{\alpha_0'}{\beta_0'\beta_0''}A'+\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0''}A_1'+\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0'}A_2'=-\frac{A_1A_2''-A_1''A_2}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0},\\
&\frac{\alpha_0'}{\beta_0'\beta_0''}A'-\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0''}A_1'+\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0'}A_2'=+\frac{AA_2''-A''A_2}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0'},\\
&\frac{\alpha_0'}{\beta_0'\beta_0''}A'+\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0''}A_1'-\frac{\alpha_0'}{\beta_0\beta_0'}A_2'=-\frac{AA_1''-A''A_1}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0''};\\
&-\frac{\alpha_0''}{\beta_0'\beta_0''}A''+\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0''}A_1''+\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0'}A_2''=+\frac{A_1A_2'-A_1'A_2}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0},\\
&\frac{\alpha_0''}{\beta_0'\beta_0''}A''-\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0''}A_1''+\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0'}A_2''=-\frac{AA_2'-A'A_2}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0'},\\
&\frac{\alpha_0''}{\beta_0'\beta_0''}A''+\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0''}A_1''-\frac{\alpha_0''}{\beta_0\beta_0'}A_2''=+\frac{AA_1'-A'A_1}{[\overset{3}{A}]}\frac{2}{\beta_0''}.
\end{aligned}\right.
$$

Multiplicirt man nun die drei Gleichungen (106. g.) der ersten Gruppe ihrer Ordnung nach einmal mit $\beta_0 A'$, $\beta_0' A_1'$, $\beta_0'' A_2'$ und ein andermal mit $\beta_0 A''$, $\beta_0' A_1''$, $\beta_0'' A_2''$ und addirt jedesmal die drei sich ergebenden Gleichungen, so erhält man zwei neue, und eben so erhält man zwei neue, sowohl wenn man die Gleichungen der zweiten Gruppe einmal mit $\beta_0 A$, $\beta_0' A_1$, $\beta_0'' A_2$, ein andermal mit $\beta_0 A''$, $\beta_0' A_1''$, $\beta_0'' A_2''$, oder die der dritten Gruppe einmal mit $\beta_0 A$, $\beta_0' A_1$, $\beta_0'' A_2$, ein andermal mit $\beta_0 A'$, $\beta_0' A_1'$, $\beta_0'' A_2'$ multiplicirt und jedesmal die drei sich ergebenden Gleichungen zu einander addirt. Man findet jedoch, dass diese sechs Gleichungen paarweise die gleichen sind, so dass man in Allem zu den drei folgenden gelangt:

$$
(106.\ h.)\quad\left\{\begin{aligned}
&\beta_0 A'(-\beta_0 A+\beta_0' A_1+\beta_0'' A_2)+\beta_0' A_1'(\beta_0 A-\beta_0' A_1+\beta_0'' A_2)\\
&\qquad+\beta_0'' A_2'(\beta_0 A+\beta_0' A_1-\beta_0'' A_2)=0,\\
&\beta_0 A''(-\beta_0 A+\beta_0' A_1+\beta_0'' A_2)+\beta_0' A_1''(\beta_0 A-\beta_0' A_1+\beta_0'' A_2)\\
&\qquad+\beta_0'' A_2''(\beta_0 A+\beta_0' A_1-\beta_0'' A_2)=0,\\
&\beta_0 A''(-\beta_0 A'+\beta_0' A_1'+\beta_0'' A_2')+\beta_0' A_1''(\beta_0 A'-\beta_0' A_1'+\beta_0'' A_2')\\
&\qquad+\beta_0'' A_2''(\beta_0 A'+\beta_0' A_1'-\beta_0'' A_2')=0.
\end{aligned}\right.
$$

Multiplicirt man ferner die Gleichungen der ersten Gruppe ihrer Ordnung nach mit $\beta_0 A$, $\beta'_0 A_1$, $\beta''_0 A_2$, die der zweiten Gruppe mit $\beta_0 A'$, $\beta'_0 A'_1$, $\beta''_0 A'_2$, die der dritten Gruppe mit $\beta_0 A''$, $\beta'_0 A''_1$, $\beta''_0 A''_2$ und addirt jedesmal die drei resultirenden Gleichungen zu einander, so findet man:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{\beta_0}{\beta'_0\beta''_0}A^2-\frac{\beta'_0}{\beta_0\beta''_0}A_1^2-\frac{\beta''_0}{\beta_0\beta'_0}A_2^2+\frac{2}{\beta''_0}A\,A_1+\frac{2}{\beta'_0}A\,A_2+\frac{2}{\beta_0}A_1A_2&=\frac{2}{\alpha_0}\,,\\
-\frac{\beta_0}{\beta'_0\beta''_0}A'^2-\frac{\beta'_0}{\beta_0\beta''_0}A_1'^2-\frac{\beta''_0}{\beta_0\beta'_0}A_2'^2+\frac{2}{\beta''_0}A'A'_1+\frac{2}{\beta'_0}A'A'_2+\frac{2}{\beta_0}A'_1A'_2&=\frac{2}{\alpha'_0}\,,\\
-\frac{\beta_0}{\beta'_0\beta''_0}A''^2-\frac{\beta'_0}{\beta_0\beta''_0}A_1''^2-\frac{\beta''_0}{\beta_0\beta'_0}A_2''^2+\frac{2}{\beta''_0}A''A''_1+\frac{2}{\beta'_0}A''A''_2+\frac{2}{\beta_0}A''_1A''_2&=\frac{2}{\alpha''_0}\,;
\end{aligned}\right\}\;\cdots\cdots\quad \textbf{(106. ι.)}$$

addirt man aber diese letzten drei Gleichungen zu einander, nachdem man die erste mit α_0, die zweite mit α'_0, die dritte mit α''_0 multiplicirt hat, und nimmt man Rücksicht auf die Bedingungen (102. b. und d.), so stösst man auf eine identische Gleichung. Die letzten sechs Gleichungen sind für die Ableitung einer Asymptotengleichung aus einer Diametralgleichung das, was die (76. a. und c.) für zwei Diametralgleichungen sind. Man kann diese Analogien noch weiter fortsetzen und mehrere Eigenschaften der Asymptotengleichungen aus ihnen ableiten, wovon wir später bei Gelegenheit der einfachsten Asymptotengleichungen ein Beispiel zum Besten geben werden; ohne aber hier in diesen Gegenstand, für den sich wohl noch ein besserer Weg wird auffinden lassen, weiter einzugehen, eilen wir zum Schlusse, indem wir, wie schon bei den Curven zweiter Ordnung geschehen ist, die einfachsten Gleichungen aufsuchen, durch welche sich Flächen zweiter Ordnung stets darstellen lassen, wozu wir einen neuen Paragraphen nehmen werden. Wir haben darin eine, von der bisherigen verschiedene Behandlung solcher Gleichungen skizzirt, da eine Mehrzahl von Behandlungsweisen in einem Felde, das ohne Zweifel noch ferner bebaut zu werden verdient, wünschenswerth sein dürfte.

Aber auch ohne eine ins Einzelne weit eingehende Auflösung der vordern Gleichungen (102. b. und d.), von denen die Entstehung der Asymptotengleichungen abhängig ist, und in Bezug auf welche die in dieser Nummer gegebenen blose Umformungen sind, hier unternehmen zu wollen, werden wir doch so viel davon zur Anzeige bringen, als nöthig ist, um einsehen zu können, wodurch sich diese Auflösung von der bei den Diametralgleichungen mitgetheilten unterscheidet und worin beide mit einander übereinstimmen. Setzt man zur Abkürzung der in dieser Nummer enthaltenen Gleichungen

$$\beta_0 A+\beta'_0 A_1+\beta''_0 A_2=S\,,\quad \beta_0 A'+\beta'_0 A'_1+\beta''_0 A'_2=S'\,,\quad \beta_0 A''+\beta'_0 A''_1+\beta''_0 A''_2=S''\,,\qquad \textbf{(106. α.)}$$

so gehen mittelst dieser Bezeichnungen die Gleichungen (106. h.) über in:

$$\left.\begin{aligned}
2\beta_0^2 A\,A'+2\beta_0'^2 A_1A'_1+2\beta_0''^2 A_2A'_2=S\,S'\,,\quad 2\beta_0^2 A\,A''+2\beta_0'^2 A_1A''_1+2\beta_0''^2 A_2A''_2=S\,S''\,,\\
2\beta_0^2 A'A''+2\beta_0'^2 A'_1A''_1+2\beta_0''^2 A'_2A''_2=S'S''\,,
\end{aligned}\right\}\cdots\quad \textbf{(106. β.)}$$

und die Gleichungen (106. i.) lassen sich mittelst derselben Bezeichnungen in die nachstehende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
2\beta_0\beta'_0\beta''_0+2\alpha_0\,\beta_0^2 A^2+2\alpha_0\,\beta_0'^2 A_1^2+2\alpha_0\,\beta_0''^2 A_2^2&=\alpha_0\,S^2\,,\\
2\beta_0\beta'_0\beta''_0+2\alpha'_0\,\beta_0^2 A'^2+2\alpha'_0\,\beta_0'^2 A_1'^2+2\alpha'_0\,\beta_0''^2 A_2'^2&=\alpha'_0\,S'^2\,,\\
2\beta_0\beta'_0\beta''_0+2\alpha''_0\,\beta_0^2 A''^2+2\alpha''_0\,\beta_0'^2 A_1''^2+2\alpha''_0\,\beta_0''^2 A_2''^2&=\alpha''_0\,S''^2\,.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\quad \textbf{(106. γ.)}$$

Setzen wir nun noch zur weiteren Vereinfachung für einen Augenblick

(106. δ.) $\begin{cases} \alpha_0\beta_0 A = z\ ,\quad \alpha_0'\beta_0 A' = z'\ ,\quad \alpha_0''\beta_0 A'' = z''\ ;\quad \alpha_0\beta_0' A_1 = z_1\ ,\quad \alpha_0'\beta_0' A_1' = z_1'\ ,\quad \alpha_0''\beta_0' A_1'' = z_1''\ , \\ \alpha_0\beta_0'' A_2 = z_2\ ,\quad \alpha_0'\beta_0'' A_2' = z_2'\ ,\quad \alpha_0''\beta_0'' A_2'' = z_2''\ , \end{cases}$

so kann man den Gleichungen (106. α.) die andere Gestalt geben:

(106. ε.) $$z + z_1 + z_2 = \alpha_0 S\ ,\quad z' + z_1' + z_2' = \alpha_0' S'\ ,\quad z'' + z_1'' + z_2'' = \alpha_0'' S''\ ;$$

die vordern Bedingungen (102. b.), so wie die Gleichungen (106. γ.) verwandeln sich mittelst der Bezeichnungen (106. δ.) in:

(106. ζ.) $$\begin{cases} \frac{z^2}{\alpha_0} + \frac{z'^2}{\alpha_0'} + \frac{z''^2}{\alpha_0''} = 0\ ,\quad \frac{z_1^2}{\alpha_0} + \frac{z_1'^2}{\alpha_0'} + \frac{z_1''^2}{\alpha_0''} = 0\ ,\quad \frac{z_2^2}{\alpha_0} + \frac{z_2'^2}{\alpha_0'} + \frac{z_2''^2}{\alpha_0''} = 0\ , \\ \text{sowie in:} \\ 2\alpha_0\beta_0\beta_0'\beta_0'' + 2z^2 + 2z_1^2 + 2z_2^2 = \alpha_0^2 S^2,\quad 2\alpha_0'\beta_0\beta_0'\beta_0'' + 2z'^2 + 2z_1'^2 + 2z_2'^2 = \alpha_0'^2 S'^2, \\ 2\alpha_0''\beta_0\beta_0'\beta_0'' + 2z''^2 + 2z_1''^2 + 2z_2''^2 = \alpha_0''^2 S''^2, \end{cases}$$

und die vordern Gleichungen (102. d.), so wie die Gleichungen (106. β.) gehen mittelst derselben Bezeichnungen über in:

(106. η.) $$\begin{cases} \frac{z z_1}{\alpha_0} + \frac{z' z_1'}{\alpha_0'} + \frac{z'' z_1''}{\alpha_0''} = \beta_0\beta_0'\beta_0''\ ,\quad \frac{z z_2}{\alpha_0} + \frac{z' z_2'}{\alpha_0'} + \frac{z'' z_2''}{\alpha_0''} = \beta_0\beta_0'\beta_0''\ ,\quad \frac{z_1 z_2}{\alpha_0} + \frac{z_1' z_2'}{\alpha_0'} + \frac{z_1'' z_2''}{\alpha_0''} = \beta_0\beta_0'\beta_0'', \\ \text{sowie in:} \\ 2zz' + 2z_1z_1' + 2z_2z_2' = \alpha_0\alpha_0' SS',\quad 2zz'' + 2z_1z_1'' + 2z_2z_2'' = \alpha_0\alpha_0'' SS'', \\ 2z'z'' + 2z_1'z_1'' + 2z_2'z_2'' = \alpha_0'\alpha_0'' S'S'', \end{cases}$$

von welchen die (106. ζ.) denen (97. a.), die (106. η.) denen (97. c.) bei den Diametralgleichungen gegebenen analog sind. Hierbei hat man sich stets in Erinnerung zu bringen, dass die untern in (106. ζ.) und (106. η.) enthaltenen Gleichungen, welche den in dieser Nummer aufgestellten entsprechen, aus den obern abgeleitet worden sind, so dass die Grössen, deren Grundzeichen z und S sind, schon aus den dreien in (106. ε.) und aus den drei obern sowohl in (106. ζ.) wie in (106. η.) gegebenen alle die Bestimmungen schöpfen können, welche die sämmtlichen vorstehenden Gleichungen ihnen überhaupt beizulegen im Stande sind. Die obern Gleichungen (106. η.) gehen aber, wenn man in sie für z_1, z_1', z_1'' und z_2, z_2', z_2'' deren aus den Gleichungen (106. ε.) sich ergebenden Werthe einsetzt, mit Zuziehung der obern Gleichungen (106. ζ.) über in:

(106. ϑ.) $$zS + z'S' + z''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0''\ ,\quad z_1S + z_1'S' + z_1''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0''\ ,\quad z_2S + z_2'S' + z_2''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0''\ ,$$

so dass diese statt der obern (106. η.) genommen werden können, und man also aus ihnen in Verbinduug mit denen (106. ε.) und den obern (106. ζ.) alle Bestimmungen erhält, wozu die sämmtlichen bisher angezeigten Gleichungen Anlass geben können. Aus den Gleichungen (106. ε.) geht hervor, dass

(106. ι.) $$z_2 = \alpha_0 S - z - z_1\ ,\quad z_2' = \alpha_0' S' - z' - z_1'\ ,\quad z_2'' = \alpha_0'' S'' - z'' - z_1''$$

ist, während die (106. ϑ.) zu erkennen geben, dass

(106. κ.) $$z''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - zS - z'S'\ ,\quad z_1''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - z_1S - z_1'S'\ ,\quad z_2''S'' = 2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - z_2S - z_2'S'$$

ist. Eliminirt man aus den letzten Gleichungen (106. ι. und κ.) die Grösse z''_2, so erhält man:

$$\alpha''_0 S''^2 - S''z'' - S''z''_1 = 2\beta_0\beta'_0\beta''_0 - z_2 S - z'_2 S',$$

und setzt man in diese Gleichung für z'', z''_1 und z_2, z'_2 die dafür aus den zwei vordern Gleichungen (106. ι. und κ.) sich ergebenden Ausdrücke so kommt:

$$\alpha_0 S^2 + \alpha'_0 S'^2 + \alpha''_0 S''^2 = 6\beta_0\beta'_0\beta''_0, \qquad \text{(106. } \lambda.)$$

eine Gleichung, aus welcher alle Grössen, deren Grundzeichen z ist, verschwunden sind. Diese in Verbindung mit den zwei vordern in (106 ι. und κ.) enthaltenen und einer der letzten in (106. ι.) oder (106. κ.) stehenden Gleichungen geben den ganzen Inhalt der Gleichungen (106. ε.) und (106. ϑ.) wieder, und setzt man in die dritte (106. ι.) für z'' und z''_1 oder in die dritte (106. κ.) für z_2 und z'_2 deren aus den zwei vordern (106. κ.) oder (106. ι.) entnommenen Ausdrücke ein, so erhält man:

$$z''_2 S'' = \alpha''_0 S''^2 + z S + z_1 S + z' S' + z'_1 S' - 4\beta_0\beta'_0\beta''_0, \qquad \text{(106. } \mu.)$$

welche in Verbindung mit der (106. λ.) und den zwei vordern in (106. ι.) und (106. κ.) enthaltenen den Inhalt der Gleichungen (106. ε.) und (106. ϑ.) ausmachen, und daher mit den drei obern (106. ζ.) alle Bestimmungen herzugeben im Stande sind, welche die sämmtlichen bisherigen Gleichungen liefern können. Durch die hier erwähnten sechs Gleichungen werden nicht nur alle Grössen, deren Grundzeichen z ist, in den vieren z, z', z_1, z'_1 von ihnen und in den dreien neu hinzugefügten Unbekannten S, S', S'' ausgedrückt, sondern es wird durch sie auch noch zwischen den drei letzten Unbekannten die Bestimmungsgleichung (106. λ.) aufgestellt. Um nun diese Zurückführung noch weiter fortzusetzen, setzen wir in die zwei ersten obern Gleichungen (106. ζ.) für z'' und z''_1 deren aus den zwei vordern Gleichungen (106. κ.) sich ergebenden Stellvertreter ein, wodurch sie werden:

$$\frac{z^2}{\alpha_0} + \frac{z'^2}{\alpha'_0} + \frac{(2\beta_0\beta'_0\beta''_0 - zS - z'S')^2}{\alpha''_0 S''^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{z_1^2}{\alpha_0} + \frac{z_1'^2}{\alpha'_0} + \frac{(2\beta_0\beta'_0\beta''_0 - z_1 S - z'_1 S')^2}{\alpha''_0 S''^2} = 0, \qquad \text{(106. } \nu.)$$

und es bleibt nur noch die dritte obere Gleichung (106. ζ.) zu berücksichtigen übrig; setzt man aber in diese für z_2, z'_2 deren durch die zwei vordern Gleichungen (106. ι.) gegebene Ausdrücke, so wie für z''_2 dessen durch die Gleichung (106. μ.) gegebenen ein, so geht sie in die schon zuvor erhaltene Gleichung (106. λ.) über, worin sich der sehr merkwürdige Umstand ausspricht, dass die drei Gleichungen (106. ε.) in Verbindung mit den sechsen, welche die obern in (106. ζ.) und (106. η.) enthaltenen ausmachen, also neun Gleichungen auf blos acht zurückführbar sind, ohne dass, wie bei den Diametralgleichungen, eine Relation zwischen den Coeffizienten der gegebenen und denen der gesuchten Gleichung einzutreten Noth thäte. Es giebt dieser Umstand eine wesentliche Verschiedenheit zwischen der Natur der gegenwärtigen und der obigen Gleichungen zu erkennen.

Ziehen wir jetzt, um die angefangene Auflösung noch weiter fortzuführen, die drei Richtungsgleichungen zu Rathe, welche die drei gesuchten Axen AY, AY′, AY″ an dem ursprünglich gegebenen, aus den Axen AX, AX′, AX″ zusammengesetzten Coordinatensysteme liefern, und im Allgemeinen sind:

$$1 = A^2 + A'^2 + A''^2 + 2A\,A'\cos W + 2A\,A''\cos W' + 2A'\,A''\cos W'',$$

$$1 = A_1^2 + A_1'^2 + A_1''^2 + 2A_1\,A'_1\cos W + 2A_1\,A''_1\cos W' + 2A'_1\,A''_1\cos W'',$$

$$1 = A_2^2 + A_2'^2 + A_2''^2 + 2A_2\,A'_2\cos W + 2A_2\,A''_2\cos W' + 2A'_2\,A''_2\cos W'', \ .$$

und, wenn wir statt der Projectionszahlen ihre aus den Bezeichnungen (106. δ.) herzuholenden neuen Formen nehmen, werden:

(106. ξ.)
$$\begin{cases} \beta_0^2 = \frac{z^2}{\alpha_0^2} + \frac{z'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{z''^2}{\alpha_0''^2} + 2\frac{z\,z'}{\alpha_0\alpha_0'}\cos W + 2\frac{z\,z''}{\alpha_0\alpha_0''}\cos W' + 2\frac{z'\,z''}{\alpha_0'\alpha_0''}\cos W'', \\ \beta_0'^2 = \frac{z_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{z_1'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{z_1''^2}{\alpha_0''^2} + 2\frac{z_1\,z_1'}{\alpha_0\alpha_0'}\cos W + 2\frac{z_1\,z_1''}{\alpha_0\alpha_0''}\cos W' + 2\frac{z_1'\,z_1''}{\alpha_0'\alpha_0''}\cos W'', \\ \beta_0''^2 = \frac{z_2^2}{\alpha_0^2} + \frac{z_2'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{z_2''^2}{\alpha_0''^2} + 2\frac{z_2\,z_2'}{\alpha_0\alpha_0'}\cos W + 2\frac{z_2\,z_2''}{\alpha_0\alpha_0''}\cos W' + 2\frac{z_2'\,z_2''}{\alpha_0'\alpha_0''}\cos W'', \end{cases}$$

so geben diese, wenn man sie alle drei zu einander addirt, mit Zuziehung der untern in (106. ζ.) und (106. η.) enthaltenen Gleichungen:

$$2[\beta_0^2 + \beta_0'^2 + \beta_0''^2 + \beta_0\beta_0'\beta_0''(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})] = S^2 + S'^2 + S''^2 + 2SS'\cos W + 2SS''\cos W' + 2S'S''\cos W''$$

oder, wenn man

(106. o.)
$$\begin{cases} 2[\beta_0^2 + \beta_0'^2 + \beta_0''^2 + \beta_0\beta_0'\beta_0''(\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})] = R^2 \\ \text{setzt:} \\ R^2 = S^2 + S'^2 + S''^2 + 2SS'\cos W + 2SS''\cos W' + 2S'S''\cos W'', \end{cases}$$

womit noch eine zweite Gleichung gegeben ist, in welcher alle Grössen, deren Grundzeichen z ist, verschwunden sind. Nachdem diese Gleichung aufgefunden worden ist, hat man von denen (106. ξ.) nur noch zwei zu den zuvor erhaltenen hinzuzufügen, wozu wir die zwei ersten nehmen wollen. Setzt man in diese für z'' und z_1'' ihre durch die zwei ersten Gleichungen (106. $\varkappa$.) gegebenen Ausdrücke ein, so werden sie:

(106. π.)
$$\begin{cases} \beta_0^2 = \frac{z^2}{\alpha_0^2} + \frac{z'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{(2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - zS - z'S')^2}{\alpha_0''^2 S''^2} + 2\frac{z\,z'}{\alpha_0\alpha_0'}\cos W \\ \qquad + 2(\frac{z}{\alpha_0}\cos W' + \frac{z'}{\alpha_0'}\cos W'')\frac{2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - zS - z'S'}{\alpha_0'' S''} \\ \text{und} \\ \beta_0'^2 = \frac{z_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{z_1'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{(2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - z_1S - z_1'S')^2}{\alpha_0''^2 S''^2} + 2\frac{z_1\,z_1'}{\alpha_0\alpha_0'}\cos W \\ \qquad + 2(\frac{z_1}{\alpha_0}\cos W' + \frac{z_1'}{\alpha_0'}\cos W'')\frac{2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - z_1S - z_1'S'}{\alpha_0'' S''}, \end{cases}$$

und nun sieht man sogleich ein, dass sich die Grössen z und z' aus den ersten Gleichungen (106. ν.) und (106. π.) ganz eben so wie die Grössen z_1 und z_1' aus denselben zweiten Gleichungen in S, S', S'' ausgedrückt erhalten lassen; weil aber zwischen den Grössen S, S', S'' nur die zwei Gleichungen (106. λ.) und (106. o.) gegeben sind, so bleibt eine von ihnen oder eine Verbindung von mehrern noch der freien Wahl überlassen, so dass auch hier wieder eine unendlich grosse Anzahl von Auflösungen innerhalb gewisser Schranken, die in diesen Gleichungen selber sich kennbar machen, erhalten wird. Man kann sich die endliche Lösung der bisher behandelten Gleichungen dadurch erleichtern, dass man das Hyperboloid ursprünglich

durch eine Diametralgleichung am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben voraussetzt, wo dann $\cos W = \cos W' = \cos W'' = 0$ wird und die Gleichungen (106. π.) die einfachere Gestalt annehmen:

$$\beta_0^2 = \frac{z^2}{\alpha_0^2} + \frac{z'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{(2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - zS - z'S')^2}{\alpha_0''^2 S''^2} \quad \text{und} \quad \beta_0'^2 = \frac{z_1^2}{\alpha_0^2} + \frac{z_1'^2}{\alpha_0'^2} + \frac{(2\beta_0\beta_0'\beta_0'' - z_1 S - z_1' S')^2}{\alpha_0''^2 S''^2}, \quad (106.\ \varrho.)$$

und gleichzeitig nimmt unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung (106. o.) die nachstehende Form an:

$$R^2 = S^2 + S'^2 + S''^2. \quad (106.\ \sigma.)$$

Sowohl die Gleichungen (106. ϱ.) wie auch schon die (106. π.) lassen erkennen, dass in dem Falle, wo man $\beta_0^2 = \beta_0''^2$ sein lässt, die vier Grössen z, z' und z_1, z_1' schon aus einem einzigen Paare der Gleichungen (106. ν.) und (106. π.) oder (106. ϱ.) hervorgehen müssen. Ich unterlasse es, aus den hier erhaltenen Resultaten weitere Folgerungen zu ziehen, weil ich nicht anders glauben kann, als dass man für die zuletzt vorgelegte Aufgabe sowohl als für die in Nr. 224. angeregte bald zweckmässigere Behandlungsweisen auffinden werde, die ein bequemeres Ablesen ihres Inhalts gestatten; aber darauf dürfte noch aufmerksam zu machen sein, dass sich mittelst der Grössen S, S', S'' die Axen AY, AY', AY'' einzeln und in völlig symmetrischer Weise angeben lassen, wie man sogleich einsieht, wenn man in die Gleichungen (106. ϑ.) statt der Zeichen z, z', z''; z_1, z_1', z_1''; z_2, z_2', z_2'' wieder das setzt, was sie den Gleichungen (106. δ.) zur Folge zu bedeuten haben, wodurch sie werden:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 S A + \alpha_0' S'A' + \alpha_0'' S''A'' = 2\beta_0'\beta_0'', \quad \alpha_0 S A_1 + \alpha_0' S' A_1' + \alpha_0'' S'' A_1'' = 2\beta_0\beta_0'', \\ &\alpha_0 S A_2 + \alpha_0' S'A_2' + \alpha_0'' S''A_2'' = 2\beta_0\beta_0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (106.\ \tau.)$$

und jede dieser Gleichungen für sich lässt in Verbindung mit der gleichvielten vordern Bedingung (102. b.) und mit der gleichvielten von den vor (106. ξ.) stehenden Richtungsgleichungen die drei, auf eine der gesuchten neuen Axen sich beziehenden Projectionszahlen ermitteln. Hieraus kann man leicht entnehmen, dass von jeder der gesuchten Axen AY, AY', AY'' ein ausserhalb ihrer gemeinschaftlichen Spitze A liegender Punct gefunden wird, wenn man die Curve, in welcher der Asymptotenkegel von einer um A mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel geschnitten wird, von drei einander parallelen Ebenen durchscheiden lässt, deren Gleichungen

$$\alpha_0 S x + \alpha_0' S'x' + \alpha_0'' S''x'' = 2\beta_0'\beta_0'', \quad \alpha_0 S x + \alpha_0' S'x' + \alpha_0'' S''x'' = 2\beta_0\beta_0'',$$
$$\alpha_0 S x + \alpha_0' S'x' + \alpha_0'' S''x'' = 2\beta_0\beta_0'$$

sind und die in eine einzige zusammenfallen, da, wo $\beta_0 = \beta_0' = \beta_0''$ ist.

§. 18.

Von den einfachsten Gleichungen der Flächen zweiter Ordnung.

A. Diametralgleichungen.

231) Als wir oben (Nr. 213.) die möglichen Diametralgleichungen für eine Mittelpunctsfläche der zweiten Ordnung kennen zu lernen und die Coordinatensysteme, an welchen sie hervorgehen, zu bestimmen suchten, fanden wir, dass diese Coordinatensysteme blos drei der von

(70. a.) bis (73. a.) aufgestellten Bedingungen zu erfüllen brauchen, wozu in jedem Falle noch die drei, auf die in ihnen vorkommenden Axen des gesuchten Coordinatensystems sich beziehenden Richtungsgleichungen zu nehmen sind, wodurch man sechs Gleichungen für die neun zu bestimmenden Projectionszahlen erhält, also immer noch drei auf diese Axen sich beziehenden Bestimmungsstücke zur Disposition des Rechners übrig bleiben. Diese drei der Wahl anheim gegebenen Bestimmungsstücke wollen wir nun dazu benützen, um jene Gleichungen in möglichst einfacher Form zu erhalten, welches offenbar der Fall sein wird, wenn wir dadurch die absoluten Werthe der drei neuen Coeffizienten (α_0), (α'_0), (α''_0) oder (δ_0), (δ'_0), (δ''_0) einander gleich machen können, indem dann die neuen Gleichungen (70. c.) bis (73. c.) eine der Formen $y^2 \pm y'^2 \pm y''^2 = \mu$ oder $v^2 \pm v'^2 \pm v''^2 = \nu$ annehmen, wenn man bei jedem ihrer auf der linken Seite des Gleichheitszeichens stehenden Glieder für sich eben so gut das obere wie das untere Vorzeichen zu schreiben gestattet. Hierbei werde ich blos den einen, in den Gleichungen (70. a. bis c.) ausgesprochenen Fall berücksichtigen, und die Behandlung der übrigen Fälle dem Leser überlassen, der sich an zusammengesetzten Aufgaben zu üben Vergnügen findet.

Stellt die von der ersten Form (64. a.) gegebene Gleichung, aus welcher eine andere von derselben Form (70. a.) hervorgeholt werden soll, ein Ellipsoid dar, so werden, dem oben (Nr. 215.) Gefundenen gemäss, die drei neuen Coeffizienten (α_0), (α'_0), (α''_0) nothwendig Zahlen mit einerlei Vorzeichen; stellt aber jene Gleichung ein Hyperboloid dar, so nehmen, dem daselbst Gefundenen gemäss, zwei von den diese Coeffizienten hergebenden Zahlen nothwendig einerlei, die den dritten Coeffizienten bestimmende Zahl hingegen das entgegengesetzte Vorzeichen in sich auf. Im ersten Falle kann man es nur dahin bringen wollen, dass

(107. a.) $$(\alpha_0) = (\alpha'_0) = (\alpha''_0) = \lambda$$

werde, im andern Falle nur dahin, dass

(107. b.) $$(\alpha_0) = (\alpha'_0) = -(\alpha''_0) = \lambda$$

werde, wenn (α_0), (α'_0) die zwei Coeffizienten werden sollen, welche Zahlen mit einerlei Vorzeichen sind, eine Voraussetzung, welche zu machen man unter allen Umständen befugt ist, und λ in jedem Falle einen von den mehrern Coeffizienten der neuen Gleichung vorstellt, die bei gleichen Zahlen auch einerlei Vorzeichen besitzen. Es verwandeln sich die in dem von uns betrachteten Falle gültigen Gleichungen (76. a.) durch die Bestimmung (107. a.) in:

$$AA' + A_1 A'_1 + A_2 A'_2 = 0\ ;\quad AA'' + A_1 A''_1 + A_2 A''_2 = 0\ ,\quad A'A'' + A'_1 A''_1 + A'_2 A''_2 = 0\ ,$$

hingegen durch die Bestimmung (107. b.) in:

$$AA' + A'_1 A''_1 - A_2 A'_2 = 0\ ,\quad AA'' + A_1 A''_1 - A_2 A''_2 = 0\ ,\quad A'A'' + A'_1 A''_1 - A'_2 A''_2 = 0\ ,$$

so dass also, je nachdem man es mit einem Ellipsoid oder mit einem Hyperboloid zu thun hat, ist:

(107. c.) $$AA' + A_1 A'_1 \pm A_2 A'_2 = 0\ ,\quad AA'' + A_1 A''_1 \pm A_2 A''_2 = 0\ ,\quad A'A'' + A'_1 A''_1 \pm A'_2 A''_2 = 0\ ,$$

wo von den doppelten Vorzeichen beim Ellipsoid das obere, beim Hyperboloid das untere genommen werden muss. Die Gleichungen (107. c.) in Verbindung mit den drei Bedingungen (70. a.) und mit den drei Richtungsgleichungen, welche in Nr. 215. im Eingange zu Ziffer III) aufgestellt worden sind, enthalten alles in sich, was zur Bestimmung des neuen Coordinatensystems gegeben ist; weil aber diese Gleichungen dieselben sind, wie die, woraus in Nr. 215. die Relation (80. a.) hervorgeholt worden ist, nur mit dem Unterschiede, dass jetzt zwischen

den Coeffizienten der neuen Gleichung das Verhalten (107. a. oder b.) festgestellt worden ist, so ist die Relation (80. a.) unter Berücksichtigung dieses Verhaltens auch hier wieder anwendbar, und giebt entweder

$$3\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}, \qquad \textbf{(107. d.)}$$

je nachdem man es mit einem Ellipsoide oder Hyperboloide zu thun hat. Das Enthaltensein dieser letzten Gleichung, es mag die vordere oder hintere werden, in den neun zuvor erwähnten ist Ursache, dass diese neun Gleichungen in Bezug auf die neun zu suchenden Projectionszahlen nur achten gleich zu achten sind, was zur Folge hat, dass immer noch ein Bestimmungsstück, anlangend das zu findende Coordinatensystem, willkührlich bleibt, so dass unsere Aufgabe selbst in ihrer jetzigen Besonderheit noch eine unbestimmte bleibt, und wir im Allgemeinen unzählig viele Coordinatensysteme erwarten dürfen, an welchen die Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung von der Form $y^2+y'^2\pm y''^2=\mu$ darstellbar ist, wo von den bei y''^2 stehenden doppelten Vorzeichen das obere beim Ellipsoid, das untere beim Hyperboloid genommen werden muss.

232) Führt man die folgenden neuen Bezeichnungen ein:

$$\frac{A'}{A}=m', \quad \frac{A''}{A}=m''; \quad \frac{A'_1}{A_1}=m'_1, \quad \frac{A''_1}{A_1}=m''_1; \quad \frac{A'_2}{A_2}=m'_2, \quad \frac{A''_2}{A_2}=m''_2, \qquad \textbf{(108. a.)}$$

so kann man die drei Bedingungen (70. a.) so schreiben:

$$\alpha_0+\alpha'_0 m'm'_1+\alpha''_0 m''m''_1=0, \quad \alpha_0+\alpha'_0 m'm'_2+\alpha''_0 m''m''_2=0, \quad \alpha_0+\alpha'_0 m'_1 m'_2+\alpha''_0 m''_1 m''_2=0, \qquad \textbf{(108. b.)}$$

und den zwei ersten Bedingungen (107. c.) kann man die nachstehende Form geben:

$$A^2 m'+A_1^2 m'_1\pm A_2^2 m'_2=0 \quad \text{und} \quad A^2 m''+A_1^2 m''_1\pm A_2^2 m''_2=0, \qquad \textbf{(108. c.)}$$

wo von den doppelten Vorzeichen das obere dem Ellipsoid, das untere dem Hyperboloid entspricht. Setzt man für m'_2 und m''_2 ihre aus den letzten zwei Gleichungen zu erhaltenden Werthe in die zwei letzten Gleichungen (108. b.) ein, und ordnet man die zwei daraus hervorgehenden neuen Gleichungen nach den Grössen A^2, A_1^2, A_2^2, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} &A^2(\alpha'_0 m'^2+\alpha''_0 m''^2)+A_1^2(\alpha'_0 m'm'_1+\alpha''_0 m''m''_1)\mp A_2^2\alpha_0=0 \\ \text{und}\quad & \\ &A^2(\alpha'_0 m'm'_1+\alpha''_0 m''m''_1)+A_1^2(\alpha'_0 m_1'^2+\alpha''_0 m_1''^2)\mp A_2^2\alpha_0=0, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(108. d.)}$$

wo hinsichtlich der doppelten Vorzeichen wieder die vorige Regel zu beobachten ist. Führt man jetzt zwei neue Grössen Δ'_0 und Δ''_0 von solcher Beschaffenheit ein, dass

$$m'_1-m'=\Delta'_0 \quad \text{und} \quad m''_1-m''=\Delta''_0 \qquad \textbf{(108. e.)}$$

ist und setzt man die hieraus für m'_1 und m''_1 sich ergebenden Werthe in die erste Gleichung (108. b.) und in die beiden (108. d.) ein, so erhält man:

$$\alpha_0+\alpha'_0 m'^2+\alpha''_0 m''^2+\alpha'_0 m'\Delta'_0+\alpha''_0 m''\Delta''_0=0,$$

$$(A^2+A_1^2)(\alpha'_0 m'^2+\alpha''_0 m''^2)+A_1^2(\alpha'_0 m'\Delta'_0+\alpha''_0 m''\Delta''_0)\mp A_2^2\alpha_0=0,$$

$$(A^2+A_1^2)(\alpha'_0 m'^2+\alpha''_0 m''^2)+(A^2+2A_1^2)(\alpha'_0 m'\Delta'_0+\alpha''_0 m''\Delta''_0)+A_1^2(\alpha'_0\Delta_0'^2+\alpha''_0\Delta_0''^2)\mp A_2^2\alpha_0=0.$$

Aus den zwei ersten dieser drei letzten Gleichungen findet man:

(108. f.)
$$\begin{cases} \alpha'_0\, m'^2 + \alpha''_0\, m''^2 = \alpha_0\, \dfrac{A_1^2 \pm A_2^2}{A^2} \quad \text{und} \quad \alpha'_0\, m' \Delta'_0 + \alpha''_0\, m'' \Delta''_0 = -\,\alpha_0\, \dfrac{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}{A^2}, \\ \text{wodurch die dritte sich verwandelt in:} \\ \alpha'_0\, \Delta'^2_0 + \alpha''_0\, \Delta''^2_0 = \alpha_0\, \dfrac{(A^2 + A_1^2)(A^2 + A_1^2 \pm A_2^2)}{A^2 A_1^2}, \end{cases}$$

welche drei Gleichungen die einzigen sind, woraus die Bestimmung von m', m'' und Δ'_0, Δ''_0 geschehen kann, so dass von diesen vier Grössen eine, oder eine Verbindung mehrerer durch Wahl festgestellt werden kann. Trägt man diese Unbestimmtheit auf eine der beiden Grössen Δ'_0 und Δ''_0 oder auf eine Verbindung der beiden über, indem man diese einer als gegeben anzusehenden Zahl gleich setzt, so kann man aus dieser Gleichung und der dritten in (108. f.) enthaltenen die Grössen Δ'_0 und Δ''_0 einzeln durch die A^2, A_1^2, A_2^2 in völlig bestimmter Weise ausdrücken, und dann auch noch mittelst der zwei ersten Gleichungen (108. f.) die m' und m'' durch A^2, A_1^2, A_2^2; man findet nämlich durch Auflösung dieser zwei letzten Gleichungen in Bezug auf m' und m'', wenn man für $\alpha'_0 \Delta'^2_0 + \alpha''_0 \Delta''^2_0$, der dritten Gleichung (108. f.) gemäss, $\alpha_0 \dfrac{(A^2 + A_1^2)(A^2 + A_1^2 \pm A_2^2)}{A^2 A_1^2}$ setzt:

(108. g.)
$$\begin{cases} m' \sqrt{\alpha'_0} = -A_1^2 \dfrac{\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0}}{A^2 + A_1^2} + \dfrac{\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0}}{A^2 + A_1^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ m'' \sqrt{\alpha''_0} = -A_1^2 \dfrac{\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0}}{A^2 + A_1^2} - \dfrac{\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0}}{A^2 + A_1^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}; \\ \text{hieraus aber erhält man kraft der Gleichungen (108. e.):} \\ m'_1 \sqrt{\alpha'_0} = A^2 \dfrac{\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0}}{A^2 + A_1^2} + \dfrac{\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0}}{A^2 + A_1^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ m''_1 \sqrt{\alpha''_0} = A^2 \dfrac{\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0}}{A^2 + A_1^2} - \dfrac{\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0}}{A^2 + A_1^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}; \\ \text{und vermittelst dieser vier Gleichungen geben nun noch die (108. c.):} \\ m'_2 \sqrt{\alpha'_0} = -\dfrac{\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0}}{\pm A_2^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad m''_2 \sqrt{\alpha''_0} = \dfrac{\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0}}{\pm A_2^2} \left(\dfrac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

In allen diesen Gleichungen müssen von den doppelten Vorzeichen die obern oder untern genommen werden, je nachdem man es mit einem Ellipsoid oder Hyperboloid zu thun hat, und dabei kann von den Quadratwurzeln

$$\sqrt{\alpha'_0}, \quad \sqrt{\alpha''_0}, \quad \left(\frac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

zwar jede ihrer beiden Formen genommen werden, jedoch muss jeder Quadratwurzel einzeln genommen gleichzeitig in allen sechs Gleichungen (108. g.) stets dieselbe Form beigelegt werden. Die in diesen Gleichungen für m', m''; m'_1, m''_1; m'_2, m''_2 mitgetheilten Werthe erfül-

len, wovon man sich unter Zuziehung der dritten Gleichung (108. f.) leicht überzeugen kann, die Bedingungen (108. b. und c.), und machen, dass die aus den Gleichungen (70. b.) zu schöpfenden Coefficienten der neuen Gleichung (70. c.) ihrem absoluten Werthe nach einander gleich werden; schreibt man nämlich die Gleichungen (70. b.), den in (108. a.) eingeführten Bezeichnungen gemäss, so:

$$A^2(\alpha_0+\alpha'_0 m'^2+\alpha''_0 m''^2)=(\alpha_0),\ A_1^2(\alpha_0+\alpha'_0 m_1'^2+\alpha''_0 m_1''^2)=(\alpha'_0),\ A_2^2(\alpha_0+\alpha'_0 m_2'^2+\alpha''_0 m_2''^2)=(\alpha''_0),$$

und setzt in diese für m', m''; m'_1, m''_1; m'_2, m''_2 ihre in (108. g.) gegebenen Werthe ein, so findet man nach einigen einfachen Reductionen:

$$(\alpha_0)=(\alpha'_0)=\pm(\alpha''_0)=\lambda=\alpha_0(A^2+A_1^2\pm A_2^2), \qquad \textbf{(108. h.)}$$

wo durch λ derjenige der neuen Coefficienten bezeichnet worden ist, der unter den übrigen seiner Zahl und seinem Vorzeichen nach wenigstens noch einmal zu finden ist, und man beim Ellipsoid durchweg die obern, beim Hyperboloid durchweg die untern Vorzeichen in den Gleichungen (108. h.) zu nehmen hat. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{1}{A^2+A_1^2}=n \quad\text{und}\quad \frac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2+A_1^2\pm A_2^2}=P, \qquad \textbf{(108. i.)}$$

was

$$nP\pm\frac{P}{A_2^2}=A^2 A_1^2 n$$

zur Folge hat, so wird die dritte Gleichung (108. f.):

$$\alpha'_0 \Delta_0'^2+\alpha''_0 \Delta_0''^2=\pm\alpha_0\frac{A_2^2}{nP}, \qquad \textbf{(108. k.)}$$

und die Gleichungen (108. g.) nehmen die nachstehende einfachere Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned}
m'\sqrt{\alpha'_0}&=n(-A_1^2\Delta'_0\sqrt{\alpha'_0}+\sqrt{P}\,\Delta''_0\sqrt{\alpha''_0}), & m''\sqrt{\alpha''_0}&=n(-A_1^2\Delta''_0\sqrt{\alpha''_0}-\sqrt{P}\,\Delta'_0\sqrt{\alpha'_0});\\
m'_1\sqrt{\alpha'_0}&=n(A^2\Delta'_0\sqrt{\alpha'_0}+\sqrt{P}\,\Delta''_0\sqrt{\alpha''_0}), & m''_1\sqrt{\alpha''_0}&=n(A^2\Delta''_0\sqrt{\alpha''_0}-\sqrt{P}\,\Delta'_0\sqrt{\alpha'_0});\\
m'_2\sqrt{\alpha'_0}&=\mp\Delta''_0\sqrt{\alpha''_0}\,\frac{\sqrt{P}}{A_2^2}, & m''_2\sqrt{\alpha''_0}&=\pm\Delta'_0\sqrt{\alpha'_0}\,\frac{\sqrt{P}}{A_2^2},
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(108. l.)}$$

wo in Betreff der doppelten Vorzeichen und der Quadratwurzeln immer die alten Regeln bestehen bleiben.

233) Giebt man nun den dreien, in Nr. 215. an der Spitze der Ziffer III. aufgestellten, auf die drei neuen Axen AY, AY', AY'' sich beziehenden Richtungsgleichungen an den drei Axen des ursprünglichen Systems mittelst der in (108. a.) eingeführten Bezeichnungen die nachstehende Form:

$$\left.\begin{aligned}
1&=A^2+A^2m'^2+A^2m''^2+2A^2m'\cos W+2A^2m''\cos W'+2A^2m'm''\cos W'',\\
1&=A_1^2+A_1^2m_1'^2+A_1^2m_1''^2+2A_1^2m'_1\cos W+2A_1^2m''_1\cos W'+2A_1^2m'_1m''_1\cos W'',\\
1&=A_2^2+A_2^2m_2'^2+A_2^2m_2''^2+2A_2^2m'_2\cos W+2A_2^2m''_2\cos W'+2A_2^2m'_2m''_2\cos W'',
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots \quad \textbf{(109. a.)}$$

so erhält man durch Addition und Subtraction der zwei ersten dieser letzten drei Gleichungen mit Berücksichtigung derer (108. c.):

$$\left.\begin{aligned} &2 = A^2 + A_1^2 + A^2(m'^2 + m''^2) + A_1^2(m_1'^2 + m_1''^2) \mp 2A_2^2 m_2' \cos W \\ &\qquad \mp 2A_2^2 m_2'' \cos W' + 2(A^2 m'm'' + A_1^2 m_1' m_1'') \cos W'' \\ &\text{und} \\ &0 = A^2 - A_1^2 + A^2(m'^2 + m''^2) - A_1^2(m_1'^2 + m_1''^2) + 2(A^2 m' - A_1^2 m_1') \cos W \\ &\qquad + 2(A^2 m'' - A_1^2 m_1'') \cos W' + 2(A^2 m'm'' - A_1^2 m_1' m_1'') \cos W'', \end{aligned}\right\} \quad (109.\ \text{b.})$$

und diese gehen mittelst der in (108. l.) gegebenen Werthe von m', m''; m_1', m_1''; m_2', m_2'' unter Zuziehung der Gleichungen (108. i.) über in:

$$\left.\begin{aligned} &2 = A^2 + A_1^2 + A^2 A_1^2 n(\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2) + nP\left(\Delta_0'^2 \frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2 \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\right) \\ &\qquad + 2\Delta_0'' \frac{\sqrt{\alpha_0''}}{\sqrt{\alpha_0'}} \sqrt{P} \cos W - 2\Delta_0' \frac{\sqrt{\alpha_0'}}{\sqrt{\alpha_0''}} \sqrt{P} \cos W' + 2n\Delta_0' \Delta_0'' (A^2 A_1^2 - P) \cos W'' \\ &\text{und} \\ &0 = (A^2 - A_1^2)\left[1 - A^2 A_1^2 n^2 (\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2) + n^2 P \left(\Delta_0'^2 \frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2 \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\right)\right. \\ &\qquad \left. + 2n\sqrt{P}\left(\Delta_0'' \frac{\sqrt{\alpha_0''}}{\sqrt{\alpha_0'}} \cos W - \Delta_0' \frac{\sqrt{\alpha_0'}}{\sqrt{\alpha_0''}} \cos W'\right) - 2n^2 \Delta_0' \Delta_0'' (A^2 A_1^2 + P) \cos W''\right] \\ &\qquad + 2A^2 A_1^2 \left[2n^2 \Delta_0' \Delta_0'' \sqrt{P} \left(\frac{\sqrt{\alpha_0'}}{\sqrt{\alpha_0''}} - \frac{\sqrt{\alpha_0''}}{\sqrt{\alpha_0'}}\right) - 2n(\Delta_0' \cos W + \Delta_0'' \cos W')\right. \\ &\qquad \left. + 2n^2 \sqrt{P} \left(\Delta_0'^2 \frac{\sqrt{\alpha_0'}}{\sqrt{\alpha_0''}} - \Delta_0'' \frac{\sqrt{\alpha_0''}}{\sqrt{\alpha_0'}}\right) \cos W''\right]; \end{aligned}\right\} \quad (109.\ \text{c.})$$

ferner wird die dritte Gleichung (109. a.), wenn man in sie für m_2' und m_2'' ihre in (108. l.) gegebenen Werthe einsetzt:

$$\begin{aligned} 1 = A_2^2 + \left(\Delta_0'^2 \frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2 \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\right) \frac{P}{A_2^2} \mp 2\Delta_0'' \frac{\sqrt{\alpha_0''}}{\sqrt{\alpha_0'}} \sqrt{P} \cos W \pm 2\Delta_0' \frac{\sqrt{\alpha_0'}}{\sqrt{\alpha_0''}} \sqrt{P} \cos W' \\ - 2\Delta_0' \Delta_0'' \frac{P}{A_2^2} \cos W''. \end{aligned} \quad (109.\ \text{d.})$$

Wir wollen, ehe wir weiter gehen, eine Folgerung aus diesen Gleichungen ziehen, die als eine Probe für die Richtigkeit derselben angesehen werden kann. Addirt man in dem Falle, wo man es mit einem Ellipsoid zu thun hat, und eben desswegen in den vorstehenden Gleichungen nur die obern Vorzeichen genommen werden dürfen, die Gleichung (109. d.) zu der ersten in (109. c.) enthaltenen, so kommt:

$$3 = A^2 + A_1^2 + A_2^2 + A^2 A_1^2 n(\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2) + \left(nP + \frac{P}{A_2^2}\right)\left(\Delta_0'^2 \frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2 \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\right); \quad (109.\ \text{e.})$$

subtrahirt man aber in dem Falle, wo man es mit einem Hyperboloid zu thun hat und eben desswegen in den vorstehenden Gleichungen nur die untern Vorzeichen genommen werden dürfen, die Gleichung (109. d.) von der ersten in (109. c.) enthaltenen, so kommt:

$$1 = A^2 + A_1^2 - A_2^2 + A^2 A_1^2 n(\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2) + \left(nP - \frac{P}{A_2^2}\right)\left(\Delta_0'^2 \frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2 \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'}\right). \quad (109.\ \text{f.})$$

Nun ist der untern Gleichung (108. i.) zur Folge beim Ellipsoid $nP + \frac{P}{A_2^2} = nA^2A_1^2$, beim Hyperboloid $nP - \frac{P}{A_2^2} = nA^2A_1^2$, daher geht die dem Ellipsoid angehörige Gleichung (109. e.) über in:

$$3 = A^2 + A_1^2 + A_2^2 + nA^2A_1^2(\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2 + \Delta_0'^2\frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'})$$

oder für n seinen Werth aus (108. i.) und $\Delta_0'\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}$, $\Delta_0''\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ für Δ_0' und Δ_0'' setzend:

$$3 = A^2 + A_1^2 + A_2^2 + \frac{A^2 A_1^2}{A^2 + A_1^2}(\frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})(\Delta_0'^2\alpha_0' + \Delta_0''^2\alpha_0''), \qquad \textbf{(109. g.)}$$

und die dem Hyperboloid angehörige Gleichung (109. f.) wird auf die gleiche Weise:

$$1 = A^2 + A_1^2 - A_2^2 + A^2A_1^2 n(\Delta_0'^2 + \Delta_0''^2 + \Delta_0'^2\frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} + \Delta_0''^2\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'})$$

oder

$$1 = A^2 + A_1^2 - A_2^2 + \frac{A^2 A_1^2}{A^2 + A_1^2}(\frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})(\Delta_0'^2\alpha_0' + \Delta_0''^2\alpha_0'') \qquad \textbf{(109. h.)}$$

und diese letzteren Gleichungen (109. g. und h.) verwandeln sich, wenn man für $\Delta_0'^2\alpha_0' + \Delta_0''^2\alpha_0''$ seinen aus der letzten Gleichung (108. f.) entnommenen Werth setzt, wo bei der Gleichung (109. g.) das obere, bei der Gleichung (109. h.) das untere Vorzeichen genommen werden muss, in:

$$3 = (A^2 + A_1^2 + A_2^2)[1 + \alpha_0(\frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})]$$

und

$$1 = (A^2 + A_1^2 - A_2^2)[1 + \alpha_0(\frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''})],$$

welche sich auch so schreiben lassen:

$$\frac{3}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''}} = \alpha_0(A^2 + A_1^2 + A_2^2) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{\alpha_0'} + \frac{1}{\alpha_0''}} = \alpha_0(A^2 + A_1^2 - A_2^2),$$

oder mit Rücksichtsnahme auf die dem Ellipsoid oder Hyperboloid angehörigen Gleichungen (107. d.):

$$\lambda = \alpha_0(A^2 + A_1^2 + A_2^2) \quad \text{und} \quad \lambda = \alpha_0(A^2 + A_1^2 - A_2^2), \qquad \textbf{(109. i.)}$$

von welchen die erstere beim Ellipsoid, die letztere beim Hyperboloid gültig ist, und in der That stimmen diese mit den unter den gleichen Voraussetzungen erhaltenen (108. h.) vollkommen überein. Durch die Gleichungen (109. i.) geht die letzte in (108. f.) erhaltene über in

$$\alpha_0'\Delta'^2 + \alpha_0''\Delta''^2 = \lambda\frac{A^2 + A_1^2}{A^2 A_1^2} \qquad \textbf{(109. k.)}$$

und ist gleichmässig beim Ellipsoid wie beim Hyperboloid anwendbar.

234) Da man λ aus den Coeffizienten der gegebenen Gleichung, je nachdem diese Coeffizienten Zahlen mit einerlei oder mit verschiedenen Vorzeichen sind, mittelst der vordern oder hintern Gleichung (107. d.) finden kann, also λ einer gegebenen Grösse gleich zu achten ist, so giebt in dem einen oder andern Falle die vordere oder hintere Gleichung (109. i.) oder

(108. h.) eine Bestimmungsgleichung zwischen den drei Grössen A^2, A_1^2, und A_2^2 her; sie ist daher im Stande eine der Gleichungen (109. c. und d.), welche zur Auffindung dieser Grössen vorhanden sind, zu vertreten, wie wir denn so eben gesehen haben, dass sie sich aus den letztgenannten Gleichungen herleiten lässt. Indem wir jetzt an die endliche Bestimmung der gedachten drei Grössen durch die Δ'_0 und Δ''_0 mittelst der Gleichungen (109. c. und d.) verbunden mit der (109. i.) gehen, wollen wir, weil zwischen Δ'_0 und Δ''_0 nur die eine an dritter Stelle stehende Gleichung (108. f.) gegeben ist, um beide durch eine einzige der Wahl überlassene Grösse darstellen zu können, zwischen ihnen die folgende Relation feststellen:

(110. a.) $$\Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0} = \Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0} \operatorname{cotg} \omega,$$

worin ω die nach Gefallen zu wählende Grösse vorzustellen hat, die in der hier beliebten Form nur einen beliebig gegebenen reellen Winkel anzeigen soll. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der dritten (108. f.), statt deren wir die (108. k.), in welche jene zufolge der (108. i.) eingeführten Bezeichnungen übergeht, nehmen werden, lassen sich deren Bestandtheile $\alpha'_0 \Delta'^2$ und $\alpha''_0 \Delta''^2$ einzeln wie folgt finden:

(110. b.)

$$\alpha'_0 \Delta'^2_0 = \pm \alpha_0 \frac{A_2^2}{nP} \sin^2 \omega \quad \text{und} \quad \alpha''_0 \Delta''^2_0 = \pm \alpha_0 \frac{A_2^2}{nP} \cos^2 \omega$$

und mittelst ihrer erhält man nun noch weiter:

$$\Delta'_0 \sqrt{\alpha'_0} = \sqrt{\frac{\pm \alpha_0}{nP}} A_2 \sin \omega, \quad \Delta''_0 \sqrt{\alpha''_0} = \sqrt{\frac{\pm \alpha_0}{nP}} A_2 \cos \omega$$

$$\text{und} \quad \Delta'_0 \Delta''_0 \sqrt{\alpha'_0} \sqrt{\alpha''_0} = \pm \frac{\alpha_0 A_2^2}{nP} \sin \omega \cos \omega$$

so wie

$$\Delta'^2_0 + \Delta''^2_0 = \pm \frac{A_2^2}{nP} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha'_0} \sin^2 \omega + \frac{\alpha_0}{\alpha''_0} \cos^2 \omega\right), \quad \Delta'^2_0 \frac{\alpha'_0}{\alpha''_0} + \Delta''^2_0 \frac{\alpha''_0}{\alpha'_0} = \pm \frac{A_2^2}{nP} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha''_0} \sin^2 \omega + \frac{\alpha_0}{\alpha'_0} \cos^2 \omega\right),$$

$$\Delta'^2_0 \frac{\sqrt{\alpha'_0}}{\sqrt{\alpha''_0}} - \Delta''^2_0 \frac{\sqrt{\alpha''_0}}{\sqrt{\alpha'_0}} = \pm \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha'_0} \sqrt{\alpha''_0}} \frac{A_2^2}{nP} (\sin^2 \omega - \cos^2 \omega),$$

worin immer noch von den doppelten Vorzeichen das obere dem Ellipsoid, das untere dem Hyperboloid entspricht, und statt der Quadratwurzeln jede ihrer beiden Formen, jedoch in allen Gleichungen dieselbe, genommen werden darf. In Folge dieser auf die Grössen Δ'_0 und Δ''_0 sich beziehenden Auswerthungen in ω nehmen die Gleichungen (109. c. und d.), wenn man beachtet, dass die obern und untern von den doppelten Vorzeichen in ihnen den obern und untern Vorzeichen in den Gleichungen (110. b.) entsprechen, die nachstehenden Formen an, auf deren Bildung die Bezeichnungen (108. i.) Einfluss haben und wobei man insbesondere zu erwägen hat, dass die zweite dieser Bezeichnungen in Verbindung mit den Gleichungen (109. i.) $\frac{\pm A^2 A_1^2 A_2^2}{P} = A^2 + A_1^2 \pm A_2^2 = \frac{\lambda}{\alpha_0}$ giebt:

$$2 = \frac{1}{n} + \lambda \left(\frac{\sin^2 \omega}{\alpha'_0} + \frac{\cos^2 \omega}{\alpha''_0}\right) \pm \alpha_0 A_2^2 \left(\frac{\sin^2 \omega}{\alpha''_0} + \frac{\cos^2 \omega}{\alpha'_0}\right) + 2 \frac{A_2}{\sqrt{n}} \sqrt{\pm \frac{\alpha_0}{\alpha'_0}} \cos \alpha \cos W$$

$$- 2 \frac{A_2}{\sqrt{n}} \sqrt{\pm \frac{\alpha_0}{\alpha''_0}} \sin \omega \cos W' + \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha'_0 \alpha''_0}} \sin 2\omega \cos W'' \mp \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha'_0 \alpha''_0}} A_2^2 \sin 2\omega \cos W''$$

und

$$0=(A^2-A_1^2)[1-n\lambda(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0'}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0''})\pm n\alpha_0 A_2^2(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'})\mp n\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}A_2^2\sin 2\omega\cos W''$$

$$+2A_2\sqrt{n}(\sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\cos\omega\cos W-\sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sin\omega\cos W')-n\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\sin 2\omega\cos W'']$$

$$+2AA_1[n\sqrt{\mp\alpha_0\lambda}A_2[(\frac{1}{\alpha_0''}-\frac{1}{\alpha_0'})\sin 2\omega-\frac{2}{\sqrt{\alpha_0'}\sqrt{\alpha_0''}}\cos 2\omega\cos W'']$$

$$-2\sqrt{n}(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha_0'}}\sin\omega\cos W+\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha_0''}}\cos\omega\cos W')]$$

an, und diese lassen sich, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0'}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0''}=\Omega_1,\quad \frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}=\Omega_2 \\ \text{und} \\ \sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\cos\omega\cos W-\sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sin\omega\cos W'=W_1,\ \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha_0'}}\sin\omega\cos W+\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha_0''}}\cos\omega\cos W'=W_2\end{array}\right\}\quad (110.\ c.)$$

setzt, einfacher so schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}2=\frac{1}{n}+\lambda\Omega_1\pm\alpha_0A_2^2\Omega_2\mp\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}A_2^2\sin 2\omega\cos W''+2\frac{A_2}{\sqrt{n}}W_1+\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\sin 2\omega\cos W'' \\ \text{und} \\ 0=(A^2-A_1^2)[1-n\lambda\Omega_1\pm n\alpha_0A_2^2\Omega_2\mp n\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}A_2^2\sin 2\omega\cos W'' \\ \qquad +2\sqrt{n}A_2W_1-n\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\sin 2\omega\cos W''] \\ +2AA_1[nA_2\sqrt{\mp\alpha_0\lambda}[(\frac{1}{\alpha_0''}-\frac{1}{\alpha_0'})\sin 2\omega-\frac{2}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\cos 2\omega\cos W'']-2\sqrt{n}W_2];\end{array}\right\}\quad (110.\ d.)$$

ferner nimmt die Gleichung (109. d.) mittelst der Auswerthungen (110. b.) die folgende Gestalt an:

$$1=A_2^2\pm\frac{\alpha_0}{n}(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'})\mp 2\frac{A_2}{\sqrt{n}}(\sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\cos\omega\cos W-\sqrt{\pm\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sin\omega\cos W')$$

$$\mp\frac{1}{n}\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\sin 2\omega\cos W''$$

und wird mit Zuziehung der Bezeichnungen (110. c.)

$$1=A_2^2\pm\frac{\alpha_0}{n}\Omega_2\mp 2\frac{A_2}{\sqrt{n}}W_1\mp\frac{1}{n}\frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0'\alpha_0''}}\sin 2\omega\cos W''.\quad (110.\ e.)$$

235) Aus den Gleichungen (110. d. und e.), wozu man auch die (108. h.) nehmen kann, welche wie jene aus denselben Gleichungen (109. a.) hervorgegangen ist, lassen sich die Grössen A^2, A_1^2, A_2^2 auf die folgende Art herholen. Giebt man nämlich der Gleichung (108. h.) unter Berücksichtigung der ersten in (108. i.) eingeführten Bezeichnung die andere Gestalt:

(111. a.) $$\frac{\lambda}{\alpha_0} = \frac{1}{n} \pm A_2^2 \quad \text{oder} \quad \pm \frac{\lambda}{\alpha_0} = \pm \frac{1}{n} + A_2^2,$$

worin wieder das obere Vorzeichen dem Ellipsoid, das untere dem Hyperboloid entspricht, und addirt oder subtrahirt man $\frac{1}{n}$ zu oder von den beiden Seiten der Gleichung (110. e.), je nachdem man es mit einem Ellipsoid oder Hyperboloid zu thun hat, so erhält man:

$$1 \pm \frac{1}{n} = \pm \frac{1}{n} + A_2^2 \pm \frac{\alpha_0}{n} \Omega_2 \mp 2 \frac{A_2}{\sqrt{n}} W_1 \mp \frac{1}{n} \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'',$$

in welcher noch immer alle obern Vorzeichen das Ellipsoid alle untern das Hyperboloid angehen. Diese letzte Gleichung geht aber, die (111. a.) berücksichtigend, über in:

(111. b.) $$1 \pm \frac{1}{n} = \pm \frac{\lambda}{\alpha_0} \pm \frac{\alpha_0}{n} \Omega_2 \mp 2 \frac{A_2}{\sqrt{n}} W_1 \mp \frac{1}{n} \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'',$$

und giebt, wenn man sie quadrirt, nachdem mit Ausnahme des einen $\mp 2 \frac{A_2}{\sqrt{n}} W_1$ alle übrigen Glieder von der rechten auf die linke Seite des Gleichheitszeichens gebracht worden sind:

$$(1 \mp \frac{\lambda}{\alpha_0})^2 \pm 2 \frac{1}{n} (1 \mp \frac{\lambda}{\alpha_0}) (1 - \alpha_0 \Omega_2 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'')$$
$$+ \frac{1}{n^2} (1 - \alpha_0 \Omega_2 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'')^2 = 4 \frac{A_2^2}{n} W_1^2,$$

oder, wenn man für A_2^2 seinen Werth aus der Gleichung (111. a.) einsetzt:

(111. c.) $$\begin{cases} (1 \mp \frac{\lambda}{\alpha_0})^2 \pm 2 \frac{1}{n} (1 \mp \frac{\lambda}{\alpha_0}) (1 - \alpha_0 \Omega_2 \pm \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'') \\ \qquad + \frac{1}{n^2} (1 - \alpha_0 \Omega_2 + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W'')^2 = \pm 4 \frac{1}{n} \frac{\lambda}{\alpha_0} W_1^2 \mp 4 \frac{1}{n^2} W_1^2, \end{cases}$$

und da in der so erhaltenen Gleichung (111. c.), nachdem man hinsichtlich der Grösse ω eine Wahl getroffen hat, ausser n lauter bekannte Zahlen vorkommen, während sie in Bezug auf $\frac{1}{n}$ quadratisch ist, so findet man aus ihr für $\frac{1}{n}$ oder $A^2 + A_1^2$ einen doppelten Werth, wozu die Gleichung (111. a) den entsprechenden Werth von A_2^2 liefert. Hat man so A_2^2 und $\frac{1}{n}$ oder $A^2 + A_1^2$ gefunden, so kann man noch die Grössen A^2 und A_1^2 einzeln wie folgt erhalten. Multiplicirt man nämlich die erste Gleichung (110. d.) mit n, so zeigt sie, dass

$$\pm n \alpha_0 A_2^2 \Omega_2 \mp n \frac{\alpha_0}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} A_2^2 \sin 2\omega \cos W'' + 2\sqrt{n} A_2 W_1 =$$
$$2n - 1 - n\lambda \Omega_1 - n \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_0' \alpha_0''}} \sin 2\omega \cos W''$$

ist, wodurch die zweite Gleichung (110. d.) die folgende Form annimmt:

$$0 = (A^2 - A_1^2)\left(1 - \lambda\Omega_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\alpha'_0\,\alpha''_0}}\sin 2\omega\cos W''\right)$$

$$+ A\,A_1\left[A_2\sqrt{\pm\alpha_0\lambda}\left[\left(\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha'_0}\right)\sin 2\omega - \frac{2}{\sqrt{\alpha'_0\,\alpha''_0}}\cos 2\omega\cos W''\right] - 2\frac{1}{\sqrt{n}}W_2\right],$$

welche, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A_2\sqrt{\pm\alpha_0\lambda}\left[\left(\dfrac{1}{\alpha''_0} - \dfrac{1}{\alpha'_0}\right)\sin 2\omega - \dfrac{2}{\sqrt{\alpha'_0\,\alpha''_0}}\cos 2\omega\cos W''\right] - 2\dfrac{1}{\sqrt{n}}W_2}{1 - \lambda\Omega_1 - \dfrac{\lambda}{\sqrt{\alpha'_0\,\alpha''_0}}\sin 2\omega\cos W''} = k \\ \text{setzt, übergeht in:} \\ 0 = A^2 - A_1^2 + k\,A\,A_1, \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad \mathbf{(111.\ d.)}$$

und es enthält k, nachdem bezüglich der Grösse ω eine Wahl getroffen worden ist, und $\frac{1}{n}$ nebst A_2 auf die eben bezeichnete Weise gefunden worden sind, lauter bekannte Zahlen in sich; bringt man aber in der zweiten Gleichung (111. d.) deren beide Glieder auf entgegengesetzte Seiten des Gleichheitszeichens und quadrirt sie sodann, so kommt

$$(A^2 - A_1^2)^2 = k^2 A^2 A_1^2,$$

und setzt man jetzt für $A^2 A_1^2$ den ihm identisch gleichen Werth $\frac{1}{4}(A^2 + A_1^2)^2 - \frac{1}{4}(A^2 - A_1^2)^2$, so wird die letzte Gleichung

$$(A^2 - A_1^2)^2\left(1 + \frac{1}{4}k^2\right) = \frac{1}{4}k^2(A^2 + A_1^2)^2$$

und giebt:

$$A^2 - A_1^2 = \frac{\frac{1}{2}k}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2}}(A^2 + A_1^2), \qquad \mathbf{(111.\ e.)}$$

so dass $A^2 - A_1^2$ als durch $A^2 + A_1^2$ oder $\frac{1}{n}$ gegeben angesehen werden darf, und nun lassen sich die Grössen A^2 und A_1^2 einzeln aus den nachstehenden identischen Gleichungen erhalten:

$$A^2 = \frac{1}{2}(A^2 + A_1^2) + \frac{1}{2}(A^2 - A_1^2), \quad A_1^2 = \frac{1}{2}(A^2 + A_1^2) - \frac{1}{2}(A^2 - A_1^2). \qquad \mathbf{(111.\ f.)}$$

Wir haben bisher in der Absicht, die grossen obschon nicht unbesiegbaren Schwierigkeiten recht anschaulich werden zu lassen, welche Gleichungsformen mit blos schiefen oder mit blos senkrechten Coordinaten mit sich bringen, wenn man sich die Fläche an einem ganz beliebigen Coordinatensysteme gegeben vorstellt, die Rechnungen in allgemeinster Weise durchgeführt, welche Schwierigkeiten sich noch vermehren würden, wenn man aus den erhaltenen Resultaten entnehmen wollte, unter welchen Umständen alle Projectionszahlen der neuen Axen an den ursprünglichen reelle Werthe annehmen, d. h. in welchen Fällen das neue Coordinatensystem wirklich existirt, und in welchen es unmöglich wird; daher verlassen wir jetzt, nachdem unser Hauptzweck erreicht ist, den bisherigen Weg und schlagen einen Seitenweg ein, der

bequemer zum Ziele führt und noch überdiess den Vortheil hat, dass er allen Vorstellungen eine grössere Bestimmtheit verleiht.

236) Da wir weiter oben (Nr. 216. bis 220.) erwiesen haben, dass jede Mittelpunctsfläche der zweiten Ordnung an einem rechtwinkligen Coordinatensysteme durch eine Gleichung, von der Form $\alpha x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 = \mu$, welche jetzt mit der $\delta u^2 + \delta' u'^2 + \delta'' u''^2 = \nu$ zusammen fällt, dargestellt werden kann, und dort auch die Mittel, dieses rechtwinklige Coordinatensystem zu erhalten, angegeben haben, so sind wir befugt, die Mittelpunctsfläche immer an diesem rechtwinkligen Systeme gegeben vorauszusetzen, oder, was dasselbe ist, die am ursprünglichen Coordinatensysteme vorhandenen Axenwinkel W, W', W'' als rechte anzunehmen, was $\cos W = 0$, $\cos W' = 0$, $\cos W'' = 0$ zur Folge hat. Dadurch werden dann auch den Bezeichnungen (110. c.) zur Folge die Grössen W_1 und W_2 beide null, und in Folge dessen vereinfacht sich die Gleichung (111. b.) in:

(112. a.)
$$1 \pm \frac{1}{n} = \pm \frac{\lambda}{\alpha_0} \pm \frac{\alpha_0}{n} \Omega_2 ,$$

während sich der in (111. d.) durch k bezeichnete Ausdruck jetzt in

$$\frac{A_2 \sqrt{\pm \alpha_0 \lambda} \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0'}\right) \sin 2\omega}{1 - \lambda \Omega_1}$$

verwandelt, welchen wir zum Unterschiede vom vorigen durch $2 \operatorname{cotg} \varkappa$ bezeichnen werden, so dass $\varkappa$ durch folgende Gleichung gegeben wird:

(112. b.)
$$\frac{A_2 \sqrt{\pm \alpha_0 \lambda} \left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0'}\right) \sin 2\omega}{1 - \lambda \Omega_1} = 2 \operatorname{cotg} \varkappa ,$$

und die Gleichnng (111. e.) geht jetzt, wenn man $2 \operatorname{cotg} \varkappa$ an die Stelle von k setzt über in:

(112. c.)
$$A^2 - A_1^2 = (A^2 + A_1^2) \cos \varkappa = \frac{1}{n} \cos \varkappa ,$$

während die Gleichungen (111. a. und f.) völlig die gleichen bleiben, und in allen unausgesetzt das obere Vorzeichen dem Ellipsoid, das untere dem Hyperboloid entspricht. Aus der Gleichung (112. a.) findet man:

(112. d.)
$$\frac{1}{n} = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} \quad \text{oder} \quad A^2 + A_1^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2}$$

mit ungeänderter Auffassung des doppelten Vorzeichens, und dadurch geht die (112. c.) über in:

(112. e.)
$$A^2 - A_1^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} \cos \varkappa ,$$

wodurch man mittelst der Gleichungen (111. f.) findet

$$A^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} (1 + \cos \varkappa) \quad \text{und} \quad A_1^2 = \frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} (1 - \cos \varkappa)$$

oder

$$A^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} \cos^2 \frac{1}{2} \varkappa \quad \text{und} \quad A_1^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2} \sin^2 \frac{1}{2} \varkappa . \qquad \text{(112. f.)}$$

Endlich giebt die Gleichung (111. a.), wenn man in sie für $\frac{1}{n}$ seinen Werth aus (112. d.) einsetzt:

$$A_2^2 = \frac{1 \mp \lambda \Omega_2}{1 - \alpha_0 \Omega_2} . \qquad \text{(112. g.)}$$

Die grosse Vereinfachung der Gleichungen, wodurch die Projectionszahlen A, A_1, A_2 an die Hand gegeben werden, in dem Falle, wo man die Mittelpunctsfläche ursprünglich an dem rechtwinkligen Systeme gegeben voraussetzt, hat ihren Grund hauptsächlich in dem Umstande, dass durch diese Voraussetzung die Gleichung (111. b.), aus welcher $\frac{1}{n}$ oder $A^2 + A_1^2$ gefunden wird, und die im Allgemeinen vom zweiten Grade ist, in eine Gleichung vom ersten Grade übergeführt wird, wodurch die Auffindung jener drei Projectionszahlen ungemein erleichtert wird.

237) Aus den einfachern Gleichungen der vorigen Nummer lassen sich ohne grosse Mühe die Bedingungen herholen, unter welchen eine Mittelpunctsfläche an einem wahrhaft existirenden Coordinatensysteme durch eine Gleichung darstellbar ist, deren bei den Quadraten der Coordinaten vorhandene Coefficienten einerlei absolute Grösse besitzen. Die Gleichungen (112. f. und g.) geben nämlich auf den ersten Blick zu erkennen, dass man für A, A_1, A_2 lauter reelle Werthe nur dann erhält, wenn $\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1 - \alpha_0 \Omega_2}$ und $\frac{1 \mp \lambda \Omega_2}{1 - \alpha_0 \Omega_2}$ positive Zahlen oder null werden, und für $\varkappa$ ein reeller Winkel sich angeben lässt; ferner geht aus der blosen Ansicht der Gleichungen (108. l.) hervor, dass die Grössen m', m''; m_1', m_1''; m_2', m_2'' sämmtlich reelle Werthe annehmen, wenn A, A_1, A_2 reelle Zahlen sind und keine der Grössen $\sqrt{\frac{\alpha_0'}{\alpha_0''} P}$ und $\sqrt{\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'} P}$ eine imaginäre Form annimmt, welches letztere verlangt, dass $\alpha_0' \alpha_0'' P$ oder $\frac{\pm \alpha_0' \alpha_0'' A^2 A_1^2 A_2^2}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}$ eine positive Zahl oder null sei. Diese letztere Bedingung ist, wenn bereits A, A_1, A_2 reelle und dann A^2, A_1^2, A_2^2 positive Zahlen sind eins mit der, dass $\frac{\pm \alpha_0' \alpha_0''}{A^2 + A_1^2 \pm A_2^2}$, oder mit Rücksicht auf die dem obern oder untern Vorzeichen im Nenner entsprechende vordere oder hintere Gleichung (109. i.) $\frac{\pm \alpha_0 \alpha_0' \alpha_0''}{\lambda}$ eine positive Zahl sei. Erwägt man nun, dass den Gleichungen (108. a.) zur Folge A', A''; A_1', A_1''; A_2', A_2'' sämmtlich reelle Werthe annehmen, so wie für A, A_1, A_2 und zugleich für m', m''; m_1', m_1''; m_2', m_2'' lauter reelle Zahlen gefunden werden, so überzeugt man sich dass alle Projectionszahlen der Axen AY, AY', AY'' an den ursprünglichen, rechtwinklig vorausgesetzten Coordinatenaxen reell werden, sonach ein wahrhaft existirendes Coordinatensystem angegeben werden kann, an welchem eine Gleichung mit lauter Coefficienten von einerlei absoluten Werth entsteht, wenn gleichzeitig

(113. a.) $$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}\mp 1}{1-\alpha_0\Omega_2} \overset{=}{>} 0 \;,\quad \frac{1\mp\lambda\,\Omega_2}{1-\alpha_0\Omega_2} \overset{=}{>} 0 \quad\text{und}\quad \frac{\pm\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0}{\lambda} > 0$$

ist, und $\varkappa$ durch die Gleichung (112. b.) als ein reeller Winkel aufgefunden wird, wobei noch immer von den doppelten Vorzeichen die obern dem Ellipsoid, die untern dem Hyperboloid entsprechen. Die dritte Bedingung (113. a.), welche beim Ellipsoid $\frac{\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0}{\lambda} > 0$ ist, und hier stets schon von selber erfüllt ist, (weil beim Ellipsoid α_0, α'_0, α''_0 alle drei einerlei Vorzeichen haben und dann λ der vordern Gleichung (107. d.) gemäss nothwendig das gleiche Vorzeichen annimmt), wird beim Hyperboloid $-\frac{\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0}{\lambda} > 0$ und da bei ihm $\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0$ immer dasselbe Vorzeichen annimmt, welches der eine von diesen drei Coefficienten besitzt, dessen Vorzeichen von dem der beiden andern verschieden ist, so sieht man ein, dass diese dritte Bedingung beim Hyperboloid verlangt, dass λ das entgegengesetzte Vorzeichen von dem annehme, welches nur bei einem der drei Coefficienten gefunden wird. Nehmen wir jetzt an, wozu man stets das Recht hat, weil diess durch die blose Bezeichnung der ursprünglichen Axen bewirkt werden kann, dass α_0 derjenige Coefficient in der ursprünglichen Gleichung sei, dessen Vorzeichen das entgegengesetzte von dem in α'_0 und α''_0 enthaltenen ist, so sagt die dritte Bedingung (113. a.) aus, dass sie beim Ellipsoid unter allen Umständen schon von selber, beim Hyperboloid aber nur dann erfüllt wird, wenn $-\alpha_0\lambda$ eine positive Zahl ist; dann aber liefert die Gleichung (112. b.) für $\varkappa$ stets einen reellen Winkel, weil cotg $\varkappa$ ihr gemäss stets eine reelle, positive oder negative Zahl wird, indem statt $\sqrt{\pm\alpha_0\lambda}$ beim Ellipsoid $\sqrt{\alpha_0\lambda}$, beim Hyperboloid $\sqrt{-\alpha_0\lambda}$ zu nehmen ist, und keine von diesen Wurzeln eine imaginäre Form annimmt, wenn die dritte Bedingung (113. a.) beim Hyperboloid, dessen Gleichung man von vorn herein so anzuordnen hat, dass das in α_0 enthaltene Vorzeichen in keinem der andern beiden Coefficienten mehr vorkommt, statt hat, d. h. wenn bei ihm λ das entgegengesetzte Vorzeichen von α_0, oder, der hintern Gleichung (107. d.) gemäss, wenn der absolute Werth von $\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}$ grösser als der von $\frac{1}{\alpha_0}$, also $-\alpha_0\lambda$ eine positive Zahl ist. Hieraus folgt, dass das Ellipsoid stets eine Gleichung von der verlangten Form an einem im Raume nachweisbaren Coordinatensysteme giebt, das Hyperboloid hingegen nur unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von $\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}$ grösser als der von $\frac{1}{\alpha_0}$ sei und α'_0, α''_0 die beiden Coefficienten vorstellen, welche einerlei Vorzeichen haben, wenn gleichzeitig

(113. b.) $$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}\mp 1}{1-\alpha_0\Omega_2} \overset{=}{>} 0 \quad\text{und}\quad \frac{1\mp\lambda\,\Omega_2}{1-\alpha_0\Omega_2} \overset{=}{>} 0$$

ist.

Um nun die beiden Bedingungen (113. b.) auf ihre Grundbedeutung zurückführen zu können, müssen wir statt des Zeichens Ω_2 wieder das einführen, was es der zweiten Gleichung (110. c.) gemäss zu bedeuten hat, wodurch sie werden:

$$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} \mp 1}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 \mp \lambda\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0,$$

welche beim Ellipsoid die:

$$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} - 1}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 - \lambda\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0, \qquad \textbf{(113. c.)}$$

beim Hyperboloid die:

$$\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} + 1}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 + \lambda\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)}{1-\alpha_0\left(\frac{\sin^2\omega}{\alpha_0''}+\frac{\cos^2\omega}{\alpha_0'}\right)} \geqq 0 \qquad \textbf{(113. d.)}$$

geben, und die wir nun einzeln weiter zerlegen werden.

238) Aus den Untersuchungen der vorigen Nummer hat sich ergeben, dass man beim Ellipsoid unzweifelhaft zu einem reellen Coordinatensysteme, an welchem eine Gleichung mit drei gleichen Coeffizienten entsteht, hingeführt wird, so wie man dafür Sorge trägt, dass die Bedingungen (113. c.) eingehalten werden. Um, was dazu gehört, besser einzusehen, schreiben wir sie zuvörderst so:

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}\right)}{\alpha_0\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}\sin^2\omega-\frac{1}{\alpha_0'}\cos^2\omega\right)} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0''}\sin^2\omega-\frac{1}{\alpha_0'}\cos^2\omega\right)}{\alpha_0\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}\sin^2\omega-\frac{1}{\alpha_0'}\cos^2\omega\right)} \geqq 0$$

und setzen in den Nennern dieser beiden Bedingungen, so wie im Zähler der hintern $\frac{1}{\alpha_0}\sin^2\omega+\frac{1}{\alpha_0}\cos^2\omega$ und $\frac{1}{\lambda}\sin^2\omega+\frac{1}{\lambda}\cos^2\omega$ für $\frac{1}{\alpha_0}$ und $\frac{1}{\lambda}$, wodurch die werden:

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}\right)}{\alpha_0\left[\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}\right)\sin^2\omega+\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\cos^2\omega\right]} \geqq 0, \quad \frac{\lambda\left[\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0''}\right)\sin^2\omega+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\cos^2\omega\right]}{\alpha_0\left[\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}\right)\sin^2\omega+\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\cos^2\omega\right]} \geqq 0,$$

oder wenn man den Factor $\sin^2\omega$ ausscheidet:

$$\frac{\lambda\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}\right)}{\alpha_0\sin^2\omega\left[\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}+\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\operatorname{cotg}^2\alpha\right]} \geqq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda\left[\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0''}+\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\operatorname{cotg}^2\omega\right]}{\alpha_0\left[\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}+\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}\right)\operatorname{cotg}^2\omega\right]} \geqq 0;$$

weil aber beim Ellipsoid die drei Coeffizienten sämmtlich einerlei Vorzeichen haben, und dann nothwendig auch λ, der vordern Gleichung (107. d.) gemäss, dasselbe Vorzeichen annimmt, so sind $\frac{\lambda}{\alpha_0}$ und $\frac{\lambda}{\alpha_0 \sin^2\omega}$ stets positive Zahlen, daher lassen sich die beiden vorstehenden Bedingungen auch so geben:

(113. c.*) $$\frac{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}+(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0})\operatorname{cotg}^2\omega} \gtreqless 0 \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha''_0}+(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0})\operatorname{cotg}^2\omega}{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}+(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0})\operatorname{cotg}^2\omega} \gtreqless 0.$$

Nun kann einer der drei folgenden Fälle eintreten:

I) Es ist entweder $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$, dann ist $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}$ eine positive Zahl und es wird der vordere in (113. c.*) stehende Ausdruck eine positive Zahl, so oft sein Nenner eine ist; so wie aber $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ ist, muss nothwendiger Weise eine von den beiden Grössen $\frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha''_0}$, wenn nicht beide, kleiner als $\frac{1}{\lambda}$, und um so mehr kleiner als $\frac{1}{\alpha_0}$ sein, somit sind in diesem Falle entweder beide oder doch einer von den im gedachten Nenner befindlichen Theilen $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}$ positive Zahlen.

a) Sind beide Theile positive Zahlen, so wird der vordere in (113. c.*) stehende Ausdruck positiv, und die aus ihm gebildete Bedingung erfüllt sich schon von selber, welchen reellen Winkel man auch für ω nehmen mag;

b) ist aber $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}$ zwar positiv, $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}$ dagegen negativ, so geht die erwähnte Bedingung nur unter der Voraussetzung in Erfüllung, dass für ω ein Winkel genommen wird, welcher macht, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter $\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}}$ hinabfällt;

c) ist endlich $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}$ negativ, dafür aber $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}$ positiv, so wird jene Bedingung nur dann erfüllt, wenn für ω ein solcher Winkel genommen wird, welcher macht, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht über $\frac{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}}{\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}}$ hinaufsteigt.

II) Oder es ist $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$, dann ist $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}$ eine negative Zahl, und es wird der vordere in (113. c.*) stehende Ausdruck nur dann eine positive Zahl, wenn auch sein Nenner eine negative Zahl wird; so wie aber $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ ist, muss nothwendiger Weise eine von den

beiden Grössen $\frac{1}{\alpha_0'}$ und $\frac{1}{\alpha_0''}$, wenn nicht beide, grösser als $\frac{1}{\lambda}$ und um so mehr grösser als $\frac{1}{\alpha_0}$ sein, somit sind in diesem Falle entweder beide oder doch einer von den im gedachten Nenner befindlichen Theilen $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}$ und $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}$ negative Zahlen.

a) Sind beide Theile negative Zahlen, so wird der gedachte Nenner negativ, und es erfüllt sich die vordere Bedingung (113. c.*) schon von selber, welchen reellen Winkel man auch für ω nehmen mag;

b) ist aber $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}$ zwar negativ, dagegen $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}$ positiv, so geht die genannte Bedingung durch jeden Winkel ω in Erfüllung, welcher macht, dass $\cotg^2\omega$ nicht unter $\dfrac{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'}-\frac{1}{\alpha_0}}$ hinabsinkt;

c) ist endlich $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}$ positiv, dafür aber $\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}$ negativ, so wird die genannte Bedingung durch jeden Winkel ω erfüllt, welcher macht, dass $\cotg^2\omega$ nicht über $\dfrac{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha_0'}}$ hinaufsteigt.

III) Findet weder der Fall I. noch der Fall II. statt, so wäre $\frac{1}{\alpha_0}=\frac{1}{\lambda}$, und diess zieht nach sich, dass die erste Bedingung (113. c.*) unabhängig von der Wahl des Winkel ω erfüllt wird, weil der in ihr erhaltene Ausdruck null wird.

Nachdem wir jetzt die Einsicht uns verschafft haben, wie die Winkel ω beim Ellipsoid in jedem vorkommenden Falle gewählt werden müssen, damit durch sie die erste Bedingung (113. c.*) in Erfüllung geht, und zugleich uns überzeugt haben, dass dazu unzählig viele reelle Winkel ω dienen können, haben wir nun noch zuzusehen, welche von diesen unzählig vielen Winkeln zugleich auch die zweite Bedingung (113. c.*) zu befriedigen im Stande sind, wobei wir wieder die vorigen drei Fälle von einander unterscheiden werden:

I) Ist $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\lambda}$ wie im vorigen Fall I. so wird die erste Bedingung (113. c.*), wie wir dort gesehen haben, nur dann erfüllt, wenn der in ihr auftretende Nenner positiv wird; da aber die zweite Bedingung (113. c.*) denselben Nenner hat, so wird ihr in diesem Falle nur dann, dann aber immer gleichzeitig mit der vordern Genüge gethan werden, wenn ihr Zähler nicht negativ wird. Weil nun da, wo $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\lambda}$ ist, jede der Grössen $\frac{1}{\alpha_0'}$ und $\frac{1}{\alpha_0''}$ oder doch wenigstens eine von ihnen kleiner als $\frac{1}{\lambda}$ sein muss, so sind hierbei drei Unterfälle zu betrachten:

a) Ist nämlich $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$ und zugleich auch $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha''_0}$, so wird der Zähler in der zweiten Bedingung (113. c.*) positiv, wodurch diese Bedingung befriedigt wird, welchen Werth man auch dem Winkel ω geben mag, und weil da wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ ist, die Bestimmungen $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha''_0}$ um so mehr auch die $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha''_0}$, welche unter dem vorigen I. a. vorgekommen sind, nach sich ziehen, wo, wie dort gezeigt worden ist, die erste Bedingung (113. c.*) in Erfüllung geht, was man auch für ω nehmen mag, so sieht man, dass da, wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ und zugleich $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$ so wie auch $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha''_0}$ ist, beide Bedingungen (113. c.*) gleichzeitig durch jeden Winkel ω befriedigt werden;

b) ist aber zwar $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$, dagegen aber $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha''_0}$, so wird der in der zweiten Bedingung (113. c.*) auftretende Zähler nur so lange nicht negativ, als $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ hinabfällt, und weil da, wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ ist, die Bestimmung $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$ um so mehr die $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha'_0}$ nach sich zieht, und also im gegenwärtigen Falle I. b. entweder der vorige I. a. oder I. b. vorhanden sein muss, je nachdem $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha''_0}$ oder $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha''_0}$ ist, so werden die beiden Bedingungen (113. c.*) gleichzeitig, da wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha'_0}$ ist, erfüllt α) wenn $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha''_0}$ ist und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ hinabfällt, β) wenn $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha''_0}$ ist und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter den grössten der beiden Werthe $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ und $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ hinabfällt;

c) ist endlich $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha'_0}$, dafür aber $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha''_0}$, so wird der zur zweiten Bedingung (113. c.*) gehörige Zähler nur so lange nicht negativ, als ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht über $\dfrac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha''_0}}{\frac{1}{\alpha'_0} - \frac{1}{\lambda}}$ hinaufsteigt, und weil da, wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ ist, die Bestimmung $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha''_0}$

um so mehr die $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha_0''}$ nach sich zieht, also im gegenwärtigen Falle I. c. nur entweder der vorige I. a. oder I. c. vorhanden sein kann, je nachdem $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha_0'}$ oder $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha_0'}$ ist, so werden die beiden Bedingungen (113. c.*) gleichzeitig, da wo $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha_0''}$ ist, erfüllt, α) wenn $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha_0'}$ ist und ω so gewählt wird, dass $\cot g^2 \omega$ nicht über $\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\lambda}}$ hinaufsteigt, β) wenn $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha_0'}$ ist, und ω so gewählt wird, dass $\cot g^2 \omega$ nicht über die kleinste der beiden Grössen $\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\lambda}}$ und $\frac{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0}}$ hinaufsteigt.

II) Ist $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ wie im vorigen Fall II., wo die erste Bedingung (113. c.*) nur dann befriedigt wird, wenn der in ihr auftretende Nenner negativ wird, so wird gleichzeitig mit dieser ersten Bedingung auch noch die zweite, welche mit der ersten einerlei Nenner hat, nur dann befriedigt werden, wenn ihr Zähler nicht positiv wird, und weil da, wo $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ ist, nothwendig entweder jede der Grössen $\frac{1}{\alpha_0'}$ und $\frac{1}{\alpha_0''}$ oder doch eine von ihnen grösser als $\frac{1}{\lambda}$ sein muss, so sind wieder drei Unterfälle zu unterscheiden:

a) Ist nämlich $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0'}$ und zugleich auch $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0''}$, so wird der Zähler der zweiten Bedingung für keinen Werth von ω positiv, und weil dann hier, wo $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ ist, um so mehr auch $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha_0'}$ und $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha_0''}$ wird, also der vorige Fall II. a. eintritt, in welchem die erste Bedingung ebenfalls für jeden Werth ω in Erfüllung geht, so sieht man, dass da wo $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ und zugleich auch $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0}$ und $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0''}$ ist, die beiden Bedingungen (113. c.*) gleichzeitig in Erfüllung gehen, welchen Werth man auch dem Winkel ω beilegen mag;

b) ist aber zwar $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0}$, dagegen $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{\alpha_0''}$, so wird der zur zweiten Bedingung gehörige Zähler nur so lange nicht positiv, als man ω so wählt, dass $\cot g^2 \omega$ nicht unter $\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0''}}{\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\lambda}}$ hinabfällt, und weil da, wo $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ ist, die Bestimmung $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0}$ um so mehr

die andere $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha'_0}$ nach sich zieht, also im gegenwärtigen Falle II. b. nur entweder der vorige II. a. oder II. b. vorhanden sein kann, je nachdem $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha''_0}$ oder $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\alpha''_0}$ ist, so werden die Bedingungen (113. c.*) gleichzeitig, da wo $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\alpha'_0}$ ist, erfüllt α) wenn $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha''_0}$ ist, und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter $\dfrac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha''_0}}{\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\lambda}}$ hinabfällt, β) wenn $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\alpha''_0}$ ist, und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht unter den grössten der beiden Werthe $\dfrac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha''_0}}{\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\lambda}}$ und $\dfrac{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha''_0}}{\frac{1}{\alpha'_0}-\frac{1}{\alpha_0}}$ hinabsinkt;

c) ist endlich $\frac{1}{\lambda}>\frac{1}{\alpha'_0}$, dafür aber $\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\alpha''_0}$, so wird der zur zweiten Bedingung gehörige Zähler nur so lange nicht positiv, als man ω so wählt, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht über $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0}}$ hinaufsteigt, und weil da, wo $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\lambda}$ ist, die Bestimmung $\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\alpha''_0}$ um so mehr die andere $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha''_0}$ nach sich zieht, also mit dem gegenwärtigen Falle II. c. gleichzeitig nur entweder der vorige II. a. oder II. c. bestehen kann, je nachdem $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha'_0}$ oder $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\alpha'_0}$ ist, so werden die Bedingungen (113. c.*) beide gleichzeitig, da wo $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{\alpha''_0}$ ist, erfüllt α) wenn $\frac{1}{\alpha_0}<\frac{1}{\alpha'_0}$ ist, und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht über $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0}}$ hinaufsteigt, β) wenn $\frac{1}{\alpha_0}>\frac{1}{\alpha'_0}$ ist, und ω so gewählt wird, dass $\operatorname{cotg}^2\omega$ nicht über den kleinsten der beiden Werthe $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0}}$ und $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}}$ hinaufsteigt.

III) Findet weder der Fall I. noch der II. statt, so ist $\frac{1}{\alpha_0}=\frac{1}{\lambda}$ wie im vorigen Fall III; dann aber wird der in der zweiten Bedingung (113. c.*) enthaltene Zähler ihrem Nenner gleich,

und es nimmt der ganze die rechte Seite dieser Bedingung bildende Ausdruck den Werth 1 an, wodurch diese Bedingung immer schon von selber erfüllt wird.

Man kann die vorstehenden vielerlei Fälle dadurch sehr zusammenziehen, dass man unter den Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 hinsichtlich ihrer Grösse eine bestimmte Rangordnung festsetzt, was stets geschehen darf. Ordnet man z. B. die gegebene Gleichung von vorn herein so an, dass $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\alpha''_0}$ ist, so wird auch $\frac{1}{\alpha_0} > \frac{1}{\lambda}$, so dass die Fälle I. a., I. b. α. und I. c. α. als die einzigen zu berücksichtigenden übrig bleiben. Ordnete man aber die ursprünglich gegebene Gleichung so an, dass $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha''_0}$ wäre, so blieben blos die Fälle II. a., II. b. α. und II. c. α. zu berücksichtigen übrig. Ja selbst die beiden Unterfälle b. α. und c. α. zögen sich in einen einzigen zusammen, wenn man auch noch zwischen den zwei Grössen $\frac{1}{\alpha'_0}$ und $\frac{1}{\alpha''_0}$ eine Rangordnung feststellte.

Wir haben bei den vorstehenden Betrachtungen eine Ausnahme von der Regel unberücksichtigt gelassen, welche besonders untersucht zu werden verlangt, und da eintritt, wo der in beiden Bedingungen (113. c.) oder (113. c.*) gleichzeitig auftretende Nenner null wird. In diesem Falle nehmen nämlich die in jenen Bedingungen auftretenden Quotienten, da wo $\frac{1}{\alpha_0} \gtrless \frac{1}{\lambda}$ ist, die Form $\frac{1}{0}$, und da wo $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\lambda}$ ist, die Form $\frac{0}{0}$ an, welche beide Formen in der Rechnung unzulässig sind, und eine Wiederholung derselben unter steter Berücksichtigung der diese Ausnahme herbeiführenden Umstände verlangen. Nun wird aber jener Nenner nur unter zweierlei Umständen null, entweder wenn $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha'_0} = \frac{1}{\alpha''_0}$ ist, und dann unabhängig von dem Werthe, welchen man dem Winkel ω beilegen mag, oder wenn für ω der Winkel genommen wird, welcher $\cot g^2\omega = \frac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ werden lässt. Erinnern wir uns, dass alle von Nr. 236. an erhaltenen Resultate an die Voraussetzung gebunden sind, dass das Ellipsoid ursprünglich an einem rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben ist, so werden wir gewahr, dass die Besonderheit $\frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha'_0} = \frac{1}{\alpha''_0}$ im Grunde nichts anders sagt, als dass das in Untersuchung genommene Ellipsoid eine Kugel sei. Die vordere Gleichung (107. d.) giebt in diesem Falle $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha'_0} = \frac{1}{\alpha''_0}$, und nun zeigt die Gleichung (107. a.), dass unter solchen Umständen nur $(\alpha_0) = (\alpha'_0) = (\alpha''_0) = \alpha_0 = \alpha'_0 = \alpha''_0$ sein kann, da wo die neue Gleichung der Kugel wieder Coeffizienten von einerlei Grösse annehmen soll; dadurch aber verwandeln sich die allgemeinen Gleichungen (70. a. und b.) unter den jetzigen Umständen in

$$AA_1 + A'A'_1 + A''A''_1 = 0\ ,\quad AA_2 + A'A'_2 + A''A''_2 = 0\ ,\quad A_1A_2 + A'_1A'_2 + A''_1A''_2 = 0$$

und

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = 1\ ,\quad A_1^2 + A_1'^2 + A_1''^2 = 1\ ,\quad A_2^2 + A_2'^2 + A_2''^2 = 1\ ,$$

und da wir bei unsern gegenwärtigen Betrachtungen voraussetzen, dass die Kugel ursprünglich an einem rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben sei, so sind die letzten drei der vorstehenden Gleichungen nichts anders als die Richtungsgleichungen der gesuchten neuen Axen AY, AY′, AY″ an den ursprünglichen Axen AX, AX′, AX″; man hat daher zur Bestimmung aller Projectionszahlen, welche jene Axen an diesen geben, ausser den vorstehenden Gleichungen keine anderen, woraus folgt, dass die drei neuen Axen blos die in den vorstehenden Gleichungen ausgesprochenen drei ersten Bedingungen einzuhalten brauchen, welche, da sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen werden müssen, nichts anders aussagen, als dass die drei neuen Axen paarweise mit einander rechte Winkel bilden müssen. Hieraus lässt sich der Schluss ziehen, dass eine Kugel an jedem beliebigen rechtwinklichen Coordinatensysteme, dessen Spitze in ihrem Mittelpunct liegt, wieder eine Gleichung mit lauter gleichen Coeffizienten liefert, dagegen nie an einem schiefwinkligen Coordinatensysteme.

Es bleibt nun noch der zweite Umstand, wo der Nenner in den beiden Bedingungen (113. c.) null wird, zu betrachten übrig, welcher da eintritt, wo für ω einer von den Winkeln genommen wird, welche machen, dass $\operatorname{cotg}^2\omega = \frac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ wird. Da indessen solcher Werthe von ω, welche diese Relation einhalten, doch immer nur unendlich weniger vorhanden sind, als solcher die den vorstehenden Ergebnissen gemäss die beiden Bedingungen (113. c.) erfüllen können, so sieht man, dass wenn auch die jetzigen unter den vorigen vorkommen, und von ihnen weggenommen werden müssten, doch immer noch unzählig viele übrig bleiben, durch welche jene beiden Bedingungen, die den zwei ersten auf das Ellipsoid sich beziehenden (113. a.) entsprechen, unzweifelhaft befriedigt werden, wesshalb man ohne alle Furcht vor Irrthum behaupten kann, dass beim Ellipsoid unendlich viele reelle Coordinatensysteme angegeben werden können, an welchen dasselbe eine Gleichung mit lauter Coeffizienten von einerlei Grösse liefert, wobei keine Art von Ellipsoid, und selbst die Kugel nicht, eine Ausnahme macht, da alle die dritte Bedingung (113. a.) stets schon von selber erfüllen.

239) Es bleiben nun noch die ähnlichen Bestimmungen in Betreff des Hyperboloids durchzuführen übrig, in Bezug auf welches wir Nr. 237. gefunden haben, dass es die dritte Bedingung (113. a.), welche bei ihm $-\frac{\alpha_0\alpha'_0\alpha''_0}{\lambda} > 0$ ist, nur dann befriedigt, wenn λ das entgegengesetzte Vorzeichen von demjenigen der drei gegebenen Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 hat, dessen Vorzeichen von dem der beiden andern Coeffizienten verschieden ist, oder, wenn wir die ursprüngliche Gleichung des Hyperboloids am rechtwinkligen Coordinatensysteme so angeordnet voraussetzen, dass α_0 der Coeffizient wird, dessen Vorzeichen von dem der beiden andern Coeffizienten verschieden ist, wenn $-\alpha_0\lambda$ eine positive Zahl liefert, unter welcher Voraussetzung dann auch $\varkappa$ immer schon von selber ein reeller Winkel wird, und Gleichungen des Hyperboloids von der verlangten Art an reellen Coordinatensystemen so oft vorhanden sind, als dessen ursprünglich gegebene Gleichung noch ausserdem die beiden Bedingungen (113. d.) zu befriedigen im Stande ist. Ein bloser Blick auf diese Bedingungen giebt aber zu

erkennen, dass unter der gemachten Voraussetzung sowohl der Zähler, welcher in der zweiten Bedingung (113. d.) auftritt, wie der in beiden erscheinende gleiche Nenner von selber stets positiv wird, so wie man für ω irgend einen reellen Winkel nimmt; denn wenn $-\alpha_0\lambda$ eine positive Zahl ist, also λ das entgegengesetzte Vorzeichen von α_0 hat, so hat nothwendig λ mit α'_0 sowohl als α''_0 einerlei Vorzeichen, da diese letztern unserer Voraussetzung gemäss das entgegengesetzte Vorzeichen von α_0 haben. Es erfüllt sich demnach unter solchen Umständen die hintere Bedingung (113. d.) stets von selber, und die vordere wird nur dann befriedigt, wenn ihr Zähler $\frac{\lambda}{\alpha_0}+1$ eine positive Zahl oder null wird, welches hier, wo α_0 das entgegengesetzte Vorzeichen von λ hat, zur Bedingung macht, dass der absolute Werth von α_0 nicht unter dem von λ liege. Diese Bedingung in Verbindung mit der vorigen giebt die eine folgende:

$$-\alpha_0\lambda \overline{\overline{>}} \lambda^2, \qquad (114.\ a.)$$

vorausgesetzt, dass α_0 denjenigen Coeffizienten der gegebenen Gleichung vorstellt, dessen Vorzeichen sowohl dem in α'_0 als dem in α''_0 enthaltenen entgegengesetzt ist. Hieraus folgt, dass jedes Hyperboloid, an welchem die Eigenschaft (114. a.) getroffen wird, und ausserdem keines, an unendlich vielen reellen Coordinatensystemen Diametralgleichungen liefert, deren drei Coeffizienten von derselben absoluten Grösse sind, und es kann hierbei für ω jeder beliebige reelle Winkel genommen werden.

Aus dieser und der vorigen Nummer geht sonach hervor, dass da wo eine Mittelpunctsfläche durch eine Diametralgleichung am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben ist, man mittelst der Gleichungen (112. g.) und (112. b. und f.), so wie der zweiten auf erster Reihe stehenden (110. b.) in Verbindung mit denen (108. l.) unendlich viele reelle Coordinatensysteme auffinden könne, an welchem die gegebene Mittelpunctsfläche durch eine Gleichung mit Coeffizienten von einerlei absoluter Grösse sich darstellen lässt, und zwar: a) wenn die Mittelpunctsfläche ein Ellipsoid ist, nur in so lange als man den Winkel ω innerhalb des in voriger Nummer angegebenen Umfangs wählt, hingegen b) wenn die Mittelpunctsfläche ein Hyperboloid ist, nur in so ferne als dieses die Bedingung $-\alpha_0\lambda \overline{\overline{>}} \lambda^2$ wahr macht, dann aber immer, welchen reellen Werth man auch dem Winkel ω beilegen mag. Diese Bedingung geht da wo λ positiv ist in $-\alpha_0 \overline{\overline{>}} \lambda$, und wenn λ negativ ist in $-\alpha_0 \overline{\overline{<}} \lambda$ über, welche beide Bedingungen man auch so:

$$\frac{1}{-\alpha_0} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \frac{1}{-\alpha_0} \overline{\overline{>}} \frac{1}{\lambda}$$

oder mit Berücksichtigung der hintern Gleichung (107. d.) so:

$$-2\frac{1}{\alpha_0} \overline{\overline{<}} \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0} \quad \text{und} \quad -2\frac{1}{\alpha_0} \overline{\overline{>}} \frac{1}{\alpha'_0} + \frac{1}{\alpha''_0} \qquad (114.\ b.)$$

schreiben kann, von welchen die vordere die Bedingung (114. a.) ersetzt, so lange

$\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha''_0}$ positiv ist, ist aber diese Summe negativ, so muss die hintere Bedingung (114. b.) die (114. a.) ersetzen.

240) Wir wollen noch einige besondere Fälle von der bisher behandelten Aufgabe für sich betrachten, da die allgemeine Lösung dieser Aufgabe eine so sehr eigenthümliche Form angenommen hat, wobei wir wieder voraussetzen werden, dass die Mittelpunctsfläche ursprünglich an einem rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben sei.

Legen wir uns zuerst den besondern Fall vor, wo die Coeffizienten α'_0 und α''_0 der gegebenen Gleichung, wodurch die Mittelpunctsfläche an einem rechtwinkligen Systeme dargestellt wird, Zahlen von einerlei Grösse und von demselben Vorzeichen sind, und eben desswegen die gegebene Mittelpunctsfläche eine Umwälzungsfläche wird, so hat, wenn diese Umwälzungsfläche ein Ellipsoid ist, α_0 mit α'_0 und α''_0 einerlei Vorzeichen, hingegen hat α_0 das entgegengesetzte Vorzeichen von α'_0 und α''_0, wenn die Umwälzungsfläche ein Hyperboloid ist; wir werden indessen von diesen beiden Fällen hier blos den einen weiter verfolgen, wo die gegebene Umwälzungsfläche ein Ellipsoid ist, in welchem α_0 mit α'_0 und α''_0 einerlei Vorzeichen hat, und stets Gleichungen mit lauter Coeffizienten von derselben Grösse möglich sind. Weil jetzt $\alpha'_0=\alpha''_0$ ist, so fällt aus dem in der zweiten Geichung (110. c.) gegebenen Ausdruck Ω_2 die Grösse ω von selber weg und es wird jetzt:

(115. a.) $$\Omega_2=\frac{1}{\alpha'_0}.$$

Dadurch werden die Gleichungen (112. f. und g.), von denen hier blos die obern Vorzeichen genommen werden dürfen:

(115. b.) $$A^2=\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}-1}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}\cos^2\tfrac{1}{2}\varkappa\,,\quad A_1^2=\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}-1}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}\sin^2\tfrac{1}{2}\varkappa \quad\text{und}\quad A_2^2=\frac{1-\frac{\lambda}{\alpha'_0}}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}\,,$$

in welchen $\varkappa$ durch die Gleichung (112. b.) zu bestimmen bleibt, die hier, wo $\alpha'_0=\alpha''_0$ ist, $\operatorname{cotg}\varkappa=0$ liefert, woraus sich schliessen lässt, dass $\cos^2\frac{1}{2}\varkappa=\frac{1}{2}$ und $\sin^2\frac{1}{2}\varkappa=\frac{1}{2}$ ist, so dass die Gleichungen (115. b.) übergehen in:

(115. c.) $$A^2=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}-1}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}\,,\quad A_1^2=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{\lambda}{\alpha_0}-1}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}} \quad\text{und}\quad A_2^2=\frac{1-\frac{\lambda}{\alpha'_0}}{1-\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}}\,;$$

weil aber in dem gegenwärtigen Falle, wo $\alpha'_0=\alpha''_0$ ist, der auf das Ellipsoid anwendbaren Gleichung (107. d.) zur Folge

$$3\frac{1}{\lambda}=2\frac{1}{\alpha'_0}+\frac{1}{\alpha_0}$$

und desswegen

$$\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\lambda}=2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0}\right),\quad \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha'_0}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_0}-\frac{1}{\alpha'_0}\right)$$

ist, so werden die Gleichungen (115. c.)

$$A^2 = A_1^2 = A_2^2 = \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\alpha_0}. \qquad \textbf{(115. d.)}$$

Setzt man diese Werthe von A^2, A_1^2 und A_2^2 in die (108. i.) gegebenen Ausdrücke von n und P, und in die Gleichung (108. k.) ein, wobei man immer nur die dem Ellipsoid entsprechenden Vorzeichen nehmen darf, so findet man, dass jetzt

$$n = \frac{3}{2}\frac{\alpha_0}{\lambda}, \quad P = \frac{1}{27}\frac{\lambda^2}{\alpha_0^2} \quad \text{und} \quad \Delta_0'^2 + \Delta_0''^2 = 6\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} \qquad \textbf{(115. e.)}$$

wird, und die hier erhaltenen Werthe von n und P ändern die Gleichungen (108. l.) um in:

$$\left.\begin{aligned} m' &= -\tfrac{1}{2}\Delta_0' + \frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta_0'', \quad & m'' &= -\tfrac{1}{2}\Delta_0'' - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta_0'; \\ m_1' &= \tfrac{1}{2}\Delta_0' + \frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta_0'', \quad & m_1'' &= \tfrac{1}{2}\Delta_0'' - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Delta_0'; \\ m_2' &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_0'', \quad & m_2'' &= +\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta_0'. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \qquad \textbf{(115. f.)}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich mit Zuziehung der dritten Gleichung (115. e.), dass

$$m'm_1' + m''m_1'' = m'm_2' + m''m_2'' = m_1'm_2' + m_1''m_2'' = -\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} \qquad \textbf{(115. g.)}$$

ist. Es ist aber, weil wir das Umwälzungsellipsoid am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben voraussetzen, an welchem schiefe und senkrechte Projectionszahlen in einander übergehen, nach Anleitung der im ersten Abschnitte mitgetheilten Gleichung (9. b.):

$$\cos YAY' = AA_1 + A'A_1' + A''A_1'', \quad \cos YAY'' = AA_2 + A'A_2' + A''A_2'',$$
$$\cos Y'AY'' = A_1A_2 + A_1'A_2' + A_1''A_2'',$$

welche Gleichungen man mit Zuziehung der in (108. a.) eingeführten Bezeichnungen auch so schreiben kann:

$$\cos YAY' = AA_1(1 + m'm_1' + m_1''m_1''), \quad \cos YAY'' = AA_2(1 + m'm_2' + m''m_2''),$$
$$\cos Y'AY'' = A_1A_2(1 + m_1'm_2' + m_1''m_2'),$$

und setzt man in diese für A, A_1, A_2 ihre Werthe aus den Gleichungen (115. d.), so wie für $m'm_1' + m''m_1''$, $m'm_2' + m''m_2''$, $m_1'm_2' + m_1''m_2''$ ihre Werthe aus den Gleichungen (115. g.) ein, so geben sie:

$$\pm\cos YAY' = \pm\cos YAY'' = \pm\cos Y'AY'' = \frac{1}{3}\lambda\left(\frac{1}{\alpha_0} - \frac{1}{\alpha_0'}\right), \qquad \textbf{(115. h.)}$$

wo bei jedem dieser Cosinuse unabhängig von dem andern das obere oder untere Vorzeichen genommen werden kann. Hieraus folgt, dass man aus einem Coordinatensysteme, an welchem das Umwälzungs-Ellipsoid eine Gleichung mit gleichen Coeffizienten annimmt, alle übrigen dadurch erhält, dass man die drei Geraden, in welchen die Axen von jenem einen Systeme lie-

gen, fest unter sich verbunden um den Mittelpunct des Ellipsoids so dreht, dass sie stets auf den zwei Kreisen liegen bleiben, in welchen das Ellipsoid von der Kugel geschnitten wird, die um seinen Mittelpunct mit dem Halbmesser beschrieben wird, dessen Quadrat das arithmetische Mittel von den Quadraten irgend dreier conjugirter Halbmesser des Ellipsoids ist. Lässt man in dem bisher betrachteten Umwälzungsellipsoid auch noch $\alpha_0 = \alpha'_0$ werden, wodurch es sich in eine Kugel verwandelt, so werden in diesem besondern Falle die Gleichungen (115. h.):

(115. i.) $$\cos YAY' = \cos YAY'' = \cos Y'AY'' = 0\ ,$$

und zeigen so, dass alle Coordinatensysteme, an welchen die Kugel eine Gleichung mit Coefficienten von derselben Grösse liefert, rechtwinklige sind, was schon in Nr. 238. erwiesen worden ist.

Nachdem wir den besondern Fall besprochen haben, wo von einem particularen Ellipsoide alle möglichen Systeme angegeben werden, an denen dieses particulare Ellipsoid eine Gleichung mit Coefficienten von derselben Grösse liefert, wollen wir noch den besondern Fall vor Augen legen, wo für jedes beliebige Ellipsoid ein particulares von denjenigen Coordinatensystemen angegeben wird, an welchen es eine Gleichung mit Coefficienten von derselben Grösse liefert. Um zu diesem zu gelangen, verbinden wir mit der Voraussetzung, dass das Ellipsoid ursprünglich durch eine Diametralgleichung an einem rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben sei, noch die zweite, dass die positiven Coefficienten dieser Gleichung α_0, α'_0, α''_0 in der Ordnung, wie sie hier geschrieben stehen, die Eigenschaft besitzen, dass kein folgender grösser als der ihm vorstehende, nämlich dass $\alpha_0 \overline{\gtrsim} \alpha'_0 \overline{\gtrsim} \alpha''_0$ ist. Man ist zu dieser zweiten Voraussetzung unter allen Umständen befugt, da sie immer durch die blose Bezeichnung der ursprünglichen Axen herbeigeführt werden kann, und man erlangt durch sie die Vortheile, von welchen Nr. 238. unmittelbar nach der letzten III. die Rede war. Unter dieser Voraussetzung, und wenn man den Fall gleicher Coefficienten ausser Augen lässt, hat man nicht nur stets $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\alpha'_0} < \frac{1}{\alpha''_0}$, sondern es ist auch beim Ellipsoid, der vordern Gleichung (107. d.) gemäss, nothwendigerweise $\frac{1}{\alpha_0} < \frac{1}{\lambda}$ und $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha''_0}$; daher kann jetzt von den vielerlei in Nr. 238. aufgeführten Fällen nur entweder der II. a. oder der II. c. α. eintreten, und man darf den in der erwähnten Nummer angestellten Betrachtungen zur Folge, um zu einem reellen Coordinatensysteme zu gelangen, an welchem das Ellipsoid eine Gleichung mit lauter gleichen Coefficienten liefert, für ω jeden Werth nehmen, da wo der Fall II. a. eintritt und $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha'_0}$ ist, hingegen muss da wo der Fall II. c. α. auftaucht, welches geschieht, wenn $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha_0}$ ist, für ω ein solcher Werth genommen werden, welcher macht, dass $\cotg^2\omega$ nicht über $\dfrac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ hinaufsteigt. Da nun diese letztgenannte Grenze stets positiv ist, — weil, da wo sie zur Sprache kommt, $\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{\alpha'_0}$, und ausserdem bei der hier

getroffenen Anordnung der Coeffizienten immer $\frac{1}{\alpha''_0} > \frac{1}{\lambda}$ ist, — und jeder für $\cotg^2\omega$ gesetzte positive Werth so wie Null zu reellen Werthen ω hinführt, so sieht man ein, dass sich brauchbare reelle Werthe für ω ergeben, es mag $\frac{1}{\lambda}$ kleiner oder grösser als $\frac{1}{\alpha'_0}$ sein, wenn man für $\cotg^2\omega$ irgend einen der von 0 bis $\frac{\frac{1}{\alpha''_0} - \lambda}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ fortlaufenden Werthe nimmt, wobei die Grenzwerthe 0 und $\frac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha'_0}}$ selbst nicht ausgeschlossen sind. Da aber dieser letztgenannte Grenzwerth je nach der Abstufungsweise der Coeffizienten α_0, α'_0, α''_0 von veränderlicher Grösse ist, und obwohl stets positiv doch der 0 so nahe rücken kann, als man will, so überzeugt man sich, dass der in allen Fällen brauchbare Werth von ω blos aus der Gleichung

$$\cotg^2\omega = 0 \tag{116. a.}$$

aufgefunden werden könne, da ein negativer Werth für $\cotg^2\omega$ gesetzt, einen unmöglichen Werth für ω liefern würde. Aus $\cotg^2\omega = 0$ ergiebt sich $\cos^2\omega = 0$ und $\sin^2\omega = 1$ und diesem gemäss wird $\Omega_2 = \frac{1}{\alpha''_0}$, wodurch die Gleichungen (112. f. und g.) geben:

$$A^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} - 1}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha''_0}} \cos^2\frac{1}{2}\varkappa\,, \quad A_1^2 = \frac{\frac{\lambda}{\alpha_0} - 1}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha''_0}} \sin^2\frac{1}{2}\varkappa\,; \quad A_2^2 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha''_0}}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha''_0}}\,, \tag{116. b.}$$

wenn dem Ellipsoid entsprechend von den doppelten Vorzeichen blos die obern genommen werden, und der Winkel $\varkappa$ ergiebt sich auf die gleiche Weise aus der Gleichung (112. b.); bedenkt man aber, dass hier, wo $\cos\omega = 0$ ist, auch $\sin 2\omega = 0$ wird, so sieht man auf der Stelle ein, dass hier, wenn nicht etwa $1 - \lambda\Omega_1 = 0$ d. h. $\alpha'_0 = \lambda$ ist,

$$\cotg\varkappa = 0 \tag{116. c.}$$

genommen werden müsse, welches $\cos^2\frac{1}{2}\varkappa = \sin^2\frac{1}{2}\varkappa = \frac{1}{2}$ zur Folge hat, wodurch die Gleichungen (116. b.) jetzt werden:

$$A^2 = A_1^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\alpha_0}\,\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha_0}} \quad \text{und} \quad A_2^2 = \frac{\lambda}{\alpha_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha''_0} - \frac{1}{\alpha_0}}\,. \tag{116. d.}$$

Da hier $\cotg^2\omega = 0$ ist, so giebt die Gleichung (110. a.) $\Delta''_0 = 0$, und hierauf findet man aus der letzten Gleichung (108. f.):

$$\Delta'_0 = 2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wenn man sich erinnert, dass beim Ellipsoid immer, $A^2+A_1^2+A_2^2=\frac{\lambda}{\alpha_0}$ und den Gleichungen (116. d.) gemäss $\frac{A^2+A_1^2}{A^2A_1^2}=4\frac{\alpha_0}{\lambda}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}$ ist; mittelst dieser für Δ''_0 und Δ'_0 erhaltenen Werthe aber, und weil beim Ellipsoid allgemein $\sqrt{P}=AA_1A_2\sqrt{\frac{\alpha_0}{\lambda}}$, also hier wo $A^2=A_1^2$ ist $\sqrt{P}=A^2A_2\sqrt{\frac{\alpha_0}{\lambda}}$ und $n=\frac{1}{2A^2}$, so wie $nA^2=nA_1^2=\frac{1}{2}$ und $n\sqrt{P}=\frac{1}{2}A_2\sqrt{\frac{\alpha_0}{\lambda}}$, oder der letzten Gleichung (116. d.) zur Folge $n\sqrt{P}=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}$ wird, liefern die Gleichungen (108. l.):

(116. e.)

$$\left\{\begin{aligned}
m' &= -\left(\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}, & m'' &= -\left(\frac{\alpha_0}{\alpha''_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}};\\
m'_1 &= +\left(\frac{\alpha_0}{\alpha'_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}, & m''_1 &= -\left(\frac{\alpha_0}{\alpha''_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}};\\
m'_2 &= 0, & m''_2 &= +\left(\frac{\alpha_0}{\alpha''_0}\,\frac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen nun lassen sich, die Bezeichnungen (108. a.) und die aus (116. d.) für A, A_1, A_2 sich ergebenden Werthe berücksichtigend, alle einzelnen Projectionszahlen wie folgt finden:

(116. f.)

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha_0}\,\frac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}, & A' &= -\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha'_0}\right)^{\frac{1}{2}}, & A'' &= -\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha''_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}};\\
A_1 &= \left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha_0}\,\frac{\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}}, & A'_1 &= +\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha'_0}\right)^{\frac{1}{2}}, & A''_1 &= -\left(\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\alpha''_0}\,\frac{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha''_0}-\frac{1}{\alpha_0}}\right)^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}\right.$$

$$A_2 = \left(\frac{\lambda}{\alpha_0} \frac{\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad A_2' = 0, \quad A_2'' = \left(\frac{\lambda}{\alpha_0''} \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0}}{\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Man überzeugt sich leicht, dass bei den auf einer Zeile stehenden Gleichungen (116. f.) nach Belieben durchweg die positiven oder negativen Wurzelwerthe mit Beibehaltung ihrer Vorzeichen genommen werden können, und zwar bei jeder Zeile unabhängig von den zwei andern Zeilen, welche Veränderungen die drei neuen Axen indessen doch stets in denselben drei Geraden liegen lassen. Da diese Gleichungen das ursprüngliche Coordinatensystem als ein rechtwinkliges voraussetzen, und desswegen die Projectionszahlen A, A', A''; A_1, A_1', A_1''; A_2, A_2', A_2'' in ihnen nichts anders bedeuten als die Cosinuse der Winkel, welche die Axen des neuen Systems mit den ursprünglichen Axen bilden, diese aber am Ellipsoid die drei auf einander senkrechten conjugirten Halbmesser abschneiden, so geben die Gleichungen (116. f.) beim blosen Hinblick auf sie zu erkennen:

1) dass die neue Axe AY'' in der Ebene liegt, die durch den grössten und kleinsten von den drei auf einander senkrechten conjugirten Durchmessern des Ellipsoids geht;

2) dass die zwei andern Axen AY und AY' sowohl mit dem grössten als kleinsten der drei auf einander senkrechten conjugirten Durchmesser Winkel bilden, die entweder unter sich gleich sind, oder einander zu zwei Rechten ergänzen;

3) dass dieselben zwei Axen AY und AY' mit dem mittlern der drei auf einander senkrechten conjugirten Halbmesser Winkel bilden, die sich zu zwei Rechten ergänzen, wenn die sub 2. genannten einander gleich sind, und die einander gleich sind, wenn sich die sub 2. genannten zu zwei Rechten ergänzen.

Alle diese einzelnen Bestimmungen sagen indessen nichts weiter aus, als dass das gesuchte Coordinatensystem symmetrisch gegen die Ebene, worin der grösste und kleinste von den drei auf einander senkrechten conjugirten Durchmessern liegt, gestellt ist. Eine Folge davon ist, dass die Axen AY und AY' mit der AY'' entweder gleiche Winkel oder solche bilden, die sich zu zwei Rechten ergänzen. In der That da bei einem rechtwinkligen ursprünglichen Coordinatensysteme

$$\cos YAY' = AA_1 + A'A_1' + A''A_1'', \quad \cos YAY'' = AA_2 + A'A_2' + A''A_2'',$$
$$\cos Y'AY'' = A_1A_2 + A_1'A_2' + A_1''A_2''$$

ist, so wird in Gemässheit der Gleichungen (116. f.):

$$\pm \cos YAY' = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0'}\right) - \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0}\right)\left(\frac{1}{\alpha_0'} - \frac{1}{\alpha_0}\right)}{\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\alpha_0}\right)}$$

und

$$\pm \cos YAY'' = \pm \cos Y'AY'' = \lambda \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_0''} - \frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_0}\right)}, \qquad \text{(116. g.)}$$

worin sich die eben ausgesprochene Eigenschaft des von uns aufgestellten, jedem Ellipsoid sich anbequemenden particularen Systems ausspricht, weil in jedem einzelnen Falle nach Belieben das obere oder untere Vorzeichen genommen werden darf.

Ist das Ellipsoid von der besondern Art, dass in ihm $\lambda = \alpha'_0$ ist, so müsste, wie bei der Gleichung (116. c.) bemerkt worden ist, jetzt nicht nothwendigerweise $\text{cotg}^2 \varkappa = 0$ genommen werden; weil aber in diesem Falle $\varkappa$ jeden Werth und darum auch den, der $\text{cotg}^2 \varkappa = 0$ macht, annehmen kann, so sind die Gleichungen (116. f.) auch noch auf ihn anwendbar.

B) Asymptotengleichungen.

241) Nachdem wir gesehen haben, dass alle Ellipsoide, so wie elliptische Paraboloide an allen ihren Puncten, stets durch Diametralgleichungen darstellbar sind, deren bei den Quadraten der Coordinaten stehende Coeffizienten sämmtlich 1 werden, dass hingegen nur gewisse Hyperboloide, so wie hyperbolische Paraboloide nur an gewissen ihrer Stellen, Diametralgleichungen liefern können, deren bei den Quadraten der Coordinaten stehende Coeffizienten theils +1 und theils —1 werden, wollen wir jetzt noch untersuchen, ob nicht das Hyperboloid, ähnlich wie es schon bei der Hyperbel nachgewiesen worden ist, durchweg durch Asymptotengleichungen darstellbar sei, deren bei den Producten von je zwei Coordinaten stehende Coeffizienten der positiv oder negativ genommenen Einheit gleich sind. Dabei werden wir die Fläche der zweiten Ordnung durch eine Diametralgleichung in schiefen Coordinaten gegeben voraussetzen, und annehmen, dass aus dieser eine Asymptotengleichung wieder in schiefen Coordinaten hergeholt werden soll, womit man ausreicht, da alle andern Uebertragungen von Diametralgleichungen in Asymptotengleichungen auf jene eine durch die in Nr. 213. angezeigten Mittel zurückgeführt werden können. Man könnte auch noch das Ableiten von Asymptotengleichungen aus Asymptotengleichungen zur Sprache bringen, und so noch zu andern Formen gelangen, was wir jedoch hier unterlassen werden. Eben so lassen wir uns bei diesen, das Hyperboloid angehenden Betrachtungen nicht auf die Ausführlichkeit ein, die wir der Aufsuchung der einfachsten Gleichungen beim Ellipsoid zugewandt haben, wie wir denn überhaupt die Asymptotengleichungen mit weniger Sorgfalt als die Diametralgleichungen in Untersuchung genommen haben. Wir werden uns hier damit begnügen, das Dasein von Asymptotengleichungen von der Form $x x' + x x'' + x' x'' = \mu$ bei jedem Hyperboloid ausser Zweifel zu setzen und zugleich die Mittel an die Hand zu geben, eines von den vielen Coordinatensystemen, an welchen das Hyperboloid eine Gleichung von der hier angezeigten Form annimmt, vollkommen zu bestimmen.

Wir denken uns demnach das Hyperboloid durch eine Gleichung von der Form

(117. a.) $$\alpha_0 x^2 + \alpha'_0 x'^2 + \alpha''_0 x''^2 = (\mu_0)$$

in schiefen Coordinaten gegeben, suchen aus dieser Diametralgleichung eine Asymptotengleichung in schiefen Coordinaten für dieselbe Fläche auf die in Nr. 228. beschriebene Art auf, woselbst wir gesehen haben, dass die vordere Gleichung (102. c.), nämlich:

(117. b.) $$2\beta_0 y' y'' + 2\beta'_0 y y'' + 2\beta''_0 y y' = (\mu_0)$$

entsteht, in welcher y, y', y'' die schiefen Coordinaten der Puncte des Hyperboloids an den Axen eines neuen Coordinatensystems vorstellen, wenn die vordern Bedingungen (102. b.), nämlich:

$$\alpha_0 A^2 + \alpha'_0 A'^2 + \alpha''_0 A''^2 = 0 \ , \quad \alpha_0 A_1^2 + \alpha'_0 A_1'^2 + \alpha''_0 A_1''^2 = 0 \ , \quad \alpha_0 A_2^2 + \alpha'_0 A_2'^2 + \alpha''_0 A_2''^2 = 0 \qquad \text{(117. c.)}$$

erfüllt werden, worin die mit dem Grundzeichen A, A_1, A_2 behafteten Grössen die schiefen Projectionszahlen der neuen Axen an den Axen des ursprünglichen Systems bezeichnen, und man den vordern Gleichungen (102. d.) gemäss nimmt:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_0 A A_1 + \alpha'_0 A'A'_1 + \alpha''_0 A''A''_1 = \beta''_0 \ , \quad \alpha_0 A A_2 + \alpha'_0 A'A'_2 + \alpha''_0 A''A''_2 = \beta'_0 \ , \\ \alpha_0 A_1 A_2 + \alpha'_0 A'_1 A'_2 + \alpha''_0 A''_1 A''_2 = \beta_0 \ , \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots \text{(117. d.)}$$

und überlegen, ob während dieses Uebergangs stets solche Maassregeln getroffen werden können, dass die durch die zuletzt angegebenen Gleichungen zu erhaltenden Coeffizienten β''_0, β'_0, β_0 in der zuletzt sich ergebenden Asymptotengleichung (117. b.) einerlei absolute Grösse annehmen, worauf sodann die Gleichung (117. b.) durch Division mit dieser Grösse die verlangte Form annähme. Bei dieser Untersuchung ist es vortheilhaft zur Bedingung zu machen, dass alle drei Grössen β_0, β'_0, β''_0 Zahlen mit einem und demselben Vorzeichen werden, wozu man stets berechtigt ist. Denn trügen diese drei Grössen Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen in sich, so müssten doch zwei von ihnen dasselbe Vorzeichen haben und die dritte das entgegengesetzte; angenommen nun β_0 und β'_0 hätten einerlei Vorzeichen und β''_0 das entgegengesetzte von diesem, dann kann man der neben β_0 und β'_0 in den beiden Gliedern der Gleichung (117. b.) gemeinschaftlichen Coordinate y″, die in dem Gliede, welches β''_0 in sich enthält, nicht vorkommt, die Eigenschaft verleihen, dass $-y''$ gesetzt werden muss, wo zuvor y″ stand, dadurch dass man statt der Axe AY″, worauf sich diese Coordinate bezieht, die nimmt, welche mit ihr in derselben Geraden liegt, aber nach der entgegengesetzten Seite des Raumes hinzielt, worauf man die Gleichung (117. b.) schreiben kann

$$2(-\beta_0) y'y'' + 2(-\beta'_0) y y'' + 2\beta''_0 y y' = (\mu_0) \ ,$$

und diese trägt nun statt der Grössen β_0 und β'_0 dieselben Zahlen aber mit entgegengesetzten Vorzeichen in sich, während die dritte Grösse β''_0 völlig die gleiche geblieben ist, so dass in dieser neuen Gleichung alle drei Coeffizienten Zahlen mit einerlei Vorzeichen in sich tragen. Es folgt hieraus, dass sich unter allen Umständen immer drei solche neue Axen AY, AY′, AY″ angeben lassen, an denen die in der Gleichung (117. b.) auftretenden Coeffizienten β_0, β'_0, β''_0 Zahlen mit einerlei Vorzeichen werden, dass man sonach schon während der Aufsuchung des Coordinatensystems, an welchem eine Asymptotengleichung entsteht, die Forderung an dasselbe stellen darf, dass es das sei, an welchem die Coeffizienten β_0, β'_0, β''_0 Zahlen mit einerlei Vorzeichen werden.

242) Erwägt man, dass bei unserer jetzigen Aufgabe, wo die drei durch die Gleichungen (117. d.) bestimmten Grössen β_0, β'_0, β''_0 einander gleich werden sollen, zur Bestimmung der neun Projectionszahlen, deren Grundzeichen A, A_1, A_2 sind, ausser den drei Bedingungen (117. c.) nur noch die zwei Gleichungen vorhanden sind, welche aus der Gleichsetzung der auf der linken Seite der Gleichungen (117. d.) stehenden Ausdrücke hervorgehen, wenn der Werth, den diese Ausdrücke annehmen sollen, nicht etwa vorgeschrieben wird, und dass diese fünf Gleichungen in Verbindung mit den drei Richtungsgleichungen der gesuchten neuen Axen an dem ursprünglichen Coordinatensysteme nur acht Gleichungen für die neun unbekannten Grössen hergeben, so sieht man, dass selbst unsere jetzige Aufgabe noch eine unbestimmte bleibt, dass es also unzählig viele Coordinatensysteme geben werde, an welchen die drei

Grössen β_0, β'_0, β''_0 einander gleich werden, und dass neben den erwähnten drei Richtungsgleichungen fünf andere unter sich und von diesen dreien unabhängige Gleichungen zwischen obigen neun Projectionszahlen die vollständige Lösung unserer jetzigen Aufgabe in sich tragen. Nun haben wir aber oben in Nr. 230. den sechs Gleichungen (117. c. und d.), andere in (106. c. und d.) niedergelegte Gestalten gegeben, und aus diesen sechs neue Gleichungen abgeleitet, welche in (106. h. und i.) stehen, von welchen die zwei ersten in (106. h.) enthaltenen hier, wo $\beta_0 = \beta'_0 = \beta''_0$ angenommen wird, auf folgende Art sich schreiben lassen:

$$A'(-A + A_1 + A_2) + A'_1(A - A_1 + A_2) + A'_2(A + A_1 - A_2) = 0$$

und

$$A''(-A + A_1 + A_2) + A''_1(A - A_1 + A_2) + A''_2(A + A_1 - A_2) = 0 \; *).$$

Diese zwei Gleichungen nun in Verbindung mit den drei Bedingungen (117. c.) und mit den drei Richtungsgleichungen werden wir zur Lösung unserer gegenwärtigen Aufgabe in Bewegung setzen, zu welchem Ende wir

(118. a.) $$A' = m'A\,,\quad A'' = m''A\,;\quad A'_1 = m'_1 A_1\,,\quad A''_1 = m''_1 A_1\,;\quad A'_2 = m'_2 A_2\,,\quad A''_2 = m''_2 A_2$$

setzen werden, wie schon früher von uns geschehen ist, wodurch sich die drei Bedingungen (117. c.) in

(118. b.) $$\alpha_0 + \alpha'_0 m'^2 + \alpha''_0 m''^2 = 0\,,\quad \alpha_0 + \alpha'_0 m'^2_1 + \alpha''_0 m''^2_1 = 0\,,\quad \alpha_0 + \alpha'_0 m'^2_2 + \alpha''_0 m''^2_2 = 0\,,$$

so wie die zwei vorstehenden stellvertretenden Gleichungen in

(118. c.) $$\left\{\begin{array}{l} m'A(-A + A_1 + A_2) + m'_1 A_1(A - A_1 + A_2) + m'_2 A_2(A + A_1 - A_2) = 0 \\ \text{und} \\ m''A(-A + A_1 + A_2) + m''_1 A_1(A - A_1 + A_2) + m''_2 A_2(A + A_1 - A_2) = 0 \end{array}\right.$$

verwandeln. Setzt man in die letzte der drei Bedingungen (118. b.) für m'_2 und m''_2 ihre aus den Gleichungen (118. c.) entnommenen Werthe ein, so erhält man:

$$\alpha_0 + \alpha'_0 \frac{[m'A(-A + A_1 + A_2) + m'_1 A_1(A - A_1 + A_2)]^2}{A_2^2(A + A_1 - A_2)^2}$$
$$+ \alpha''_0 \frac{[m''A(-A + A_1 + A_2) + m''_1 A_1(A - A_1 + A_2)]^2}{A_2^2(A + A_1 - A_2)^2} = 0\,,$$

welche Gleichung sich mit Berücksichtigung der zwei ersten in (118. b.) enthaltenen Bedingungen so umbilden lässt:

$$\alpha_0 \frac{A^2(-A + A_1 + A_2)^2 + A_1^2(A - A_1 + A_2)^2 - A_2^2(A + A_1 - A_2)^2}{A(-A + A_1 + A_2)A_1(A - A_1 + A_2)} = 2\alpha'_0 m' m'_1 + 2\alpha''_0 m'' m''_1$$

oder, wenn man zur Abkürzung

*) Die folgende Untersuchung lässt sich auch noch auf eine andere, von der hier gegebenen sehr verschiedene Art durchführen, wenn man statt dieser Gleichungen weiter oben mitgetheilte zur Hülfe nimmt, welche denen bei den Diametralgleichungen gebrauchten ähnlicher sind.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A^2(-A+A_1+A_2)^2+A_1^2(A-A_1+A_2)^2-A_2^2(A+A_1-A_2)^2}{A(-A+A_1+A_2)A_1(A-A_1+A_2)}=2\mathit{\Delta}_0 \\ \text{setzt:} \\ \alpha_0\mathit{\Delta}_0=\alpha_0'\,m'm_1'+\alpha_0''\,m''m_1''. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(118. d.)}$$

Die Summe der zwei ersten Gleichungen (118. b.) giebt

$$-2\alpha_0=\alpha_0'(m'^2+m_1'^2)+\alpha_0''(m''^2+m_1''^2)\,,$$

und zieht man von dieser Gleichung die untere in (118. d.) enthaltene doppelt genommen ab, so findet man:

$$-2\alpha_0(\mathit{\Delta}_0+1)=\alpha_0'(m'-m_1')^2+\alpha_0''(m''-m_1'')^2\,,$$

welche letztere Gleichung, wenn man

$$\left.\begin{array}{l} m'-m_1'=\mathit{\Delta}_0' \quad \text{und} \quad m''-m_1''=\mathit{\Delta}_0'' \\ \text{setzt, sich verwandelt in:} \\ -2\alpha_0(\mathit{\Delta}_0+1)=\alpha_0'\mathit{\Delta}_0'^2+\alpha_0''\mathit{\Delta}_0''^2\,. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(118. e.)}$$

Es lassen sich die Verhältnisszahlen m', m'' und m_1', m_1'' durch die Grössen $\mathit{\Delta}_0'$ und $\mathit{\Delta}_0''$ hier auf ähnliche Weise ausdrücken, wie schon oben bei den Diametralgleichungen bezüglich derselben Zeichen geschehen ist. Führt man nämlich in die zweite Gleichung (118. b.) für m_1' und m_1'', so wie in die erste Gleichung (118. b.) für m' und m'' ihre aus den obern Gleichungen (118. e.) zu schöpfenden Werthe ein, so werden sie mit Zuziehung ihrer selbst und der untern in (118. e.) enthaltenen Gleichungen:

$$-\alpha_0(\mathit{\Delta}_0+1)=\alpha_0'\,m'\mathit{\Delta}_0'+\alpha_0''\,m''\mathit{\Delta}_0'' \quad \text{und} \quad \alpha_0(\mathit{\Delta}_0+1)=\alpha_0'\,m_1'\mathit{\Delta}_0'+\alpha_0''\,m_1''\mathit{\Delta}_0''\,.$$

Aus der ersten dieser Gleichnngen und der ersten in (118. b.) enthaltenen lässt sich m' und m'', so wie aus den zweiten der hier angezeigten Gleichungen m_1' und m_1'' in $\mathit{\Delta}_0'$ und $\mathit{\Delta}_0''$ ausgedrückt darstellen; man findet so nach einigen ganz leichten Umformungen:

$$\left.\begin{array}{rl} m'\sqrt{\alpha_0'}= & \frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0'\sqrt{\alpha_0'}+\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0''\sqrt{\alpha_0''}\left(\dfrac{1-\mathit{\Delta}_0}{1+\mathit{\Delta}_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ m''\sqrt{\alpha_0''}= & \frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0''\sqrt{\alpha_0''}-\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0'\sqrt{\alpha_0'}\left(\dfrac{1-\mathit{\Delta}_0}{1+\mathit{\Delta}_0}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{und} & \\ m_1'\sqrt{\alpha_0'}= & -\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0'\sqrt{\alpha'}+\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0''\sqrt{\alpha_0''}\left(\dfrac{1-\mathit{\Delta}_0}{1+\mathit{\Delta}_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ m_1''\sqrt{\alpha_0''}= & -\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0''\sqrt{\alpha_0''}-\frac{1}{2}\mathit{\Delta}_0'\sqrt{\alpha_0'}\left(\dfrac{1-\mathit{\Delta}_0}{1+\mathit{\Delta}_0}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(118. f.)}$$

und es darf von den in diesen Gleichungen vorkommenden Quadratwurzeln jeder ihrer beiden Wurzelwerthe, jedoch in allen stets nur derselbe Wurzelwerth genommen werden. Dabei ergiebt sich aus der in (118. d.) festgesetzten Bedeutung von $\mathit{\Delta}_0$ ohne grosse Mühe, dass der in den vorstehenden Gleichungen auftretende Ausdruck $\dfrac{1-\mathit{\Delta}_0}{1+\mathit{\Delta}_0}$ nichts anders ist, als

$$\frac{[-A(-A+A_1+A_2)+A_1(A-A_1+A_2)+A_2(A+A_1-A_2)]\,[A(-A+A_1+A_2)-A_1(A-A_1+A_2)+A_2(A+A_1-A_2)]}{[A(-A+A_1+A_2)+A_1(A-A_1+A_2)-A_2(A+A_1-A_2)]\,[A(-A+A_1+A_2)+A_1(A-A_1+A_2)+A_2(A+A_1-A_2)]},$$

eine Form, welche, so wie auch die von Δ_0, $1+\Delta_0$ und $1-\Delta_0$, eine einfache geometrische Auslegung hindurch schimmern lässt.

243) Nachdem so die Grössen m′, m″ und m_1', m_1'' in Δ_0', Δ_0'' und $\frac{1-\Delta_0}{1+\Delta_0}$, welcher letztere Ausdruck blos von den drei Projectionszahlen A, A_1, A_2 abhängig ist, ausgewerthet sind, lassen sich auch m_2', m_2'' mittelst der Gleichungen (118. c.) durch dieselben drei Werthe ausdrücken. Zur Bestimmung der Werthe Δ_0' und Δ_0'' durch den Δ_0 hat man blos die eine, untere Gleichung (118. e.), wesshalb für diese beiden Werthe unzählig viele Paare zusammengehöriger genommen werden können. Setzt man fest, dass α_0' und α_0'' die zwei Coeffizienten der gegebenen Gleichung (117. a.) sind, welche Zahlen mit einerlei Vorzeichen in sich tragen, eine Annahme zu der man stets befugt ist, weil sie sich immer einfach durch die blose Bezeichnung der ursprünglichen Axen verwirklichen lässt, so kann man, wie auch bei den Diametralgleichungen geschehen ist

(119. a.) $$\Delta_0''\sqrt{\alpha_0''}=\Delta_0'\sqrt{\alpha_0'}\operatorname{cotg}\omega$$

setzen und unter ω einen völlig unbestimmt bleibenden reellen Winkel verstehen; dann lassen sich mittelst dieses beliebigen Winkels aus der vorstehenden und der untern in (118. e.) enthaltenen Gleichung die Grössen $\Delta_0'^2$ und $\Delta_0''^2$ wie folgt bestimmen:

$$\alpha_0'\Delta_0'^2=-2\alpha_0(1+\Delta_0)\sin^2\omega \quad\text{und}\quad \alpha_0''\Delta_0''^2=-2\alpha_0(1+\Delta_0)\cos^2\omega\,,$$

aus denen man sogleich findet:

(119. b.) $$\Delta_0'=\sin\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{2(1+\Delta_0)} \quad\text{und}\quad \Delta_0''=\cos\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{2(1+\Delta_0)}\,,$$

und zufolge dieser Werthe von Δ_0' und Δ_0'' verwandeln sich die Gleichungen (118. f.) in:

(119. c.) $$\left\{\begin{aligned} m' &= \sin\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\Delta_0)}+\cos\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\Delta_0)}\,,\\ m'' &= \cos\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0'}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\Delta_0)}-\sin\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\Delta_0)}\\ &\text{und}\\ m_1' &= -\sin\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\Delta_0)}+\cos\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\Delta_0)}\,,\\ m_1'' &= -\cos\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\Delta_0)}-\sin\omega\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\Delta_0)}\,,\end{aligned}\right.$$

so wie sich aus diesen Werthen von m′, m_1' und m″, m_1'' auch noch die von m_2' und m_2'' mittelst der Gleichungen (118. c.) durch den Winkel ω und die Grössen A, A_1, A_2 ausdrücken lassen. Aus den so erhaltenen Werthen von m′, m″; m_1', m_1''; m_2', m_2'' in Verbindung mit den drei Richtungsgleichungen der zu bestimmenden neuen Axen AY, AY′, AY″ an den Axen des ursprünglichen Systems wären nun alle neun Projectionszahlen durch den einen beliebig

bleibenden Winkel ω auszudrücken, und für diesen Winkel die Grenzen zu bestimmen, innerhalb der er genommen werden muss, wenn das gesuchte Coordinatensystem ein reelles werden soll; ähnlich wie es vorhin bei den Diametralgleichungen geschehen ist. Anstatt aber unsere Aufgabe in dieser Allgemeinheit weiter fortzuführen, beschränken wir uns darauf, von allen auf solche Weise zu erhaltenden Coordinatensystemen ein einziges, jedoch bei jedem Hyperboloide gleich brauchbares, hervorzuholen und vollständig zu bestimmen.

244) Zu diesem Ende lassen wir ω einem rechten Winkel gleich sein, dann wird $\cos\omega = 0$ und $\sin\omega = 1$, und es gehen für diese besondern Werthe die Gleichungen (119. c.) über in:

$$\left.\begin{aligned} m' &= \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\varLambda_0)}\,, \quad m'' = -\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\varLambda_0)}\,; \\ m_1' &= -\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0'}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\varLambda_0)}\,, \quad m_1'' = -\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\varLambda_0)}\,, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots \quad \textbf{(120. a.)}$$

wobei in diesen besondern Gleichungen, wie in den allgemeinen, von den Quadratwurzeln zwar die einen oder andern ihrer beiden Wurzelwerthe, jedoch in allen nur die gleichen genommen werden dürfen. Um nun die diesen besondern Werthen von m', m'' und m_1', m_1'' entsprechenden besondern Werthe von A, A_1, A_2 zu erhalten, nehmen wir die den Axen AY, AY', AY'' angehörigen Richtungsgleichungen an den Axen AX, AX', AX'' zur Hilfe, wobei wir, wie schon bei den Diametralgleichungen geschehen ist, und mit der gleichen Befugniss, voraussetzen werden, dass das Hyperboloid ursprünglich durch eine Gleichung am rechtwinkligen Coordinatensysteme gegeben worden sei. Weil unter dieser Voraussetzung $\cos W = \cos W' = \cos W'' = 0$ ist, so nehmen die erwähnten drei Richtungsgleichungen, mit Berücksichtigung der in (118. a.) eingeführten Bezeichnungen, die besondern Formen:

$$1 = A^2(1 + m'^2 + m''^2)\,, \quad 1 = A_1^2(1 + m_1'^2 + m_1''^2)\,, \quad 1 = A_2^2(1 + m_2'^2 + m_2''^2) \quad \textbf{(120. b.)}$$

an, von welchen die zwei ersten, wenn man in sie für m', m''; m_1', m_1'' ihre in (120. a.) angezeigten Werthe einsetzt, liefern:

$$1 = A^2\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) - \tfrac{1}{2}\varLambda_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right)\right] \text{ und } 1 = A_1^2\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) - \tfrac{1}{2}\varLambda_0\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right)\right] \quad \textbf{(120. c.)}$$

und so zeigen, dass $A^2 = A_1^2$ und in Folge $A = \pm A_1$ werden müsse. Nehmen wir von diesen beiden gleich zulässigen Bestimmungen die eine $A = A_1$, so wird in Gemässheit derselben:

$$A(-A + A_1 + A_2) = AA_2\,, \quad A_1(A - A_1 + A_2) = AA_2\,, \quad A_2(A + A_1 - A_2) = A_2(2A - A_2)\,, \quad \textbf{(120. d.)}$$

und diesen Auswerthungen gemäss verwandeln sich die Gleichungen (118. c.) in:

$$AA_2(m' + m_1') + A_2(2A - A_2)m_2' = 0 \quad \text{und} \quad AA_2(m'' + m_1'') + A_2(2A - A_2)m_2'' = 0\,,$$

oder mit Zuziehung der in (120. a.) erhaltenen Werthe von m', m'' und m_1', m_1'' in:

$$m_2' = 0 \quad \text{und} \quad m_2'' = \frac{A}{2A - A_2}\sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{2(1 - \varLambda_0)}\,, \quad \textbf{(120. e.)}$$

vorausgesetzt, dass weder A_2 noch $2A - A_2$ null ist. Ferner verwandelt sich zufolge der in (120. d.) angezeigten besondern Werthe die obere Gleichung (118. d.) in:

(120. f.) $$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{A}_0 = \dfrac{-2A^2 + 4AA_2 - A_2^2}{2A^2} = \dfrac{2A^2 - (2A - A_2)^2}{2A^2} \\ \text{und hieraus findet man:} \\ 1 - \mathcal{A}_0 = \dfrac{(2A - A_2)^2}{2A^2} \quad \text{und} \quad 1 + \mathcal{A}_0 = \dfrac{A_2(4A - A_2)}{2A^2}. \end{array}\right.$$

Setzt man den hieraus für $2(1 - \mathcal{A}_0)$ sich ergebenden Werth in die hintere Gleichung (120. e.), so liefert diese

(120. g.) $$m_2'' = \sqrt{-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}},$$

und in Folge dieses Werthes von m_2'' und des in der vordern Gleichung (120. e.) für m_2' erhaltenen giebt die dritte Gleichung (120. b.):

(120. h.) $$A_2^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}},$$

Besitzen nun, wie wir in der vorigen Nummer vorausgesetzt haben α_0' und α_0'' einerlei Vorzeichen, so hat α_0 das entgegengesetzte von diesem, wenn die Fläche ein Hyperboloid ist; es ist daher $\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ nothwendigerweise eine negative und in Folge $1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ eine positive Zahl, so wie schon $-\frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$. Desshalb findet man für A_2 jederzeit einen reellen, von Null verschiedenen Werth so wie auch für m_2'', und da den Bezeichnungen (118. a.) gemäss $A_2' = m_2' A_2$ und $A_2'' = m_2'' A_2$ ist, von denen die erste der vordern Gleichung (120. e.) zur Folge $A_2' = 0$ giebt, so nehmen die drei Projectionszahlen A_2, A_2', A_2'' lauter reelle Werthe an, d. h. man findet die Axe AY'' als eine wirklich im Raume vorhandene Richtung. Setzt man jetzt den in (120. f.) für $\mathcal{A}_0$ erhaltenen Werth in die erste Gleichung (120. c.) ein, so wird diese zunächst:

$$1 = A^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) + \frac{2A^2 - 4AA_2 + A_2^2}{4A^2}\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right)\right]$$

oder

$$1 = A^2\left(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) - AA_2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) + \frac{1}{4}A_2^2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right);$$

setzt man aber in diese Gleichung für $1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ seinen Werth aus (120. h.) ein, so wird sie

$$1 = \frac{A^2}{A_2^2} - AA_2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) + \frac{1}{4}A_2^2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right)$$

oder

$$1 = \frac{A^2}{A_2^2} - \frac{A}{A_2}\, A_2^2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right) + \frac{1}{4}A_2^2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}\right),$$

und dieser kann man dadurch, dass man mittelst der Gleichung (120. h.) für A_2^2 seinen Werth setzt, die nachstehende Form geben:

$$1 = \frac{A^2}{A_2^2} - \frac{A}{A_2}\frac{\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}} + \frac{1}{4}\frac{\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}},$$

welche in Bezug auf $\frac{A}{A_2}$ quadratisch ist und für diese Grösse durch Auflösung die zwei folgenden Werthe liefert:

$$\frac{A}{A_2} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}} \pm \frac{1}{1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}}\sqrt{(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})^2 - \frac{1}{4}(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})}\,. \tag{120. i.}$$

Nun haben wir zwar schon in der vorigen Nummer die Axe AX in so ferne bestimmt, als wir dort vorausgesetzt haben, dass es die sein soll, welche macht, dass α_0' und α_0'' Zahlen mit einerlei Vorzeichen sind; nichts desto weniger können wir aber doch noch in Betreff der Axen AX′ und AX″ eine solche Anordnung treffen, dass von den zwei Coefficienten α_0' und α_0'', falls sie nicht unter sich gleich sind, d. h. falls das Hyperboloid keine Umwälzungsfläche ist, nach Belieben der eine oder der andere die absolut grössere Zahl in sich trägt. Aus diesem Grunde können wir es immer durch die blose Bezeichnung der beiden Axen AX′ uud AX″ so einrichten, dass $\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ nach Belieben eine positive oder negative Zahl wird. Diess wohl erwogen, lässt sich darthun, dass man auch für die Axen AY und AY′ zwei wirklich im Raume vorhandene Richtungen anweisen kann; es lässt sich nämlich durch blose Umformung zeigen, dass

$$\sqrt{(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})^2 - \frac{1}{4}(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})} = \sqrt{[1 - \frac{1}{2}(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})]^2 + \frac{3}{4}(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})}$$

ist, so dass man

$$\pm\sqrt{(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})^2 - \frac{1}{4}(1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})} = \pm[1 - \frac{1}{2}(\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}) + (1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''})Z]$$

setzen und unter Z eine reelle positive Zahl verstehen darf, wenn man hinsichtlich der Axen AX′ und AX″ die Anordnung trifft, dass $\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''}$ eine positive Zahl wird, weil dann das zweite Glied des Ausdruckes, welcher unter dem auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in der vorletzten Gleichung vorkommenden Wurzelzeichen steht, nothwendig eine positive Zahl liefert. Hierdurch nimmt die Gleichung (120. i.), wenn man an die Stelle der in ihr auftretenden Wurzel ihren so eben angezeigten Werth setzt und dabei von den doppelten Vorzeichen dieses Werthes immer nur das obere nimmt, die folgende Gestalt an:

$$A = A_2(1 + Z)\,. \tag{120. k.}$$

In dem besondern Falle, wo $\frac{\alpha_0}{\alpha_0'} - \frac{\alpha_0}{\alpha_0''} = 0$, d. h. das Hyperboloid eine Umwälzungsfläche ist, wird $Z = 0$, so dass nicht einmal in diesem Falle Z eine negative Zahl werden kann.

Aus dem Umstande, dass Z nur null oder positiv sein kann, lassen sich nun die folgenden Schlüsse ziehen. Die Relation (120. k.) giebt $2A - A_2 = A_2(1+2Z)$ und $4A - A_2 = A_2(3+4Z)$, und hierdurch werden die zwei letzten Gleichungen (120. f.) umgeändert in:

$$1 - \varDelta_0 = \frac{(1+2Z)^2}{2(1+Z)^2} \quad \text{und} \quad 1 + \varDelta_0 = \frac{3+4Z}{2(1+Z)^2},$$

woraus hervorgeht, dass sowohl $1-\varDelta_0$ wie $1+\varDelta_0$ stets positive von Null verschiedene Zahlen, und daher auch m', m'' und m'_1, m''_1 den Gleichungen (120. a.) zur Folge stets reelle und von Null verschiedene Zahlen werden. Da nun auch die einander gleichen Werthe A und A_1 der Relation (120. k.) zur Folge stets reell und von Null verschieden sind, so ergeben sich auch mittelst der Gleichungen (118. a.) für A', A'' und A'_1, A''_1 lauter reelle und von Null verschiedene Werthe; man findet daher für die Axen AY und AY' zwei Richtungen, die unter sich verschieden sind, weil $A = A_1$, $A' = -A'_1$ und $A'' = A''_1$ ist und keine von diesen Projectionszahlen null wird, aber auch ausserhalb der dritten Axe AY'' liegen, da man in Bezug auf diese $A'_2 = 0$ findet. Man findet sonach unter allen Umständen auf obige Weise immer ein reelles Coordinatensystem, an welchem das Hyperboloid eine Gleichung von der Form $yy' + yy'' + y'y'' = \mu$ annimmt, wobei wir noch zum Ueberflusse darauf hindeuten wollen, dass den für A_2 und $2A - A_2$ erhaltenen Ausdrücken nach keine von diesen beiden Grössen je null werden kann, dass also die bei der Gleichung (120. e.) gemachten Voraussetzungen bei dieser Auflösung wirklich stets vorhanden sind.

Schluss.

Wir beschliessen unser langes Tagewerk mit der folgenden Betrachtung. Es hat sich aus den unter A) in diesem Paragraph gepflogenen Verhandlungen ergeben, dass jedes Ellipsoid an unzählig vielen Coordinatensystemen durch eine Gleichung von der Form

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = \mu$$

darstellbar ist, und aus den unter B) gepflogenen, dass eben so jedes Hyperboloid an unzählig vielen Coordinatensystemen durch eine Gleichung von der Form

$$xx' + xx'' + x'x'' = \mu$$

darstellbar ist; wir können daher diese zweierlei Gleichungsformen als die das Ellipsoid und Hyperboloid charakterisirenden aufstellen. Denn obgleich wir unter A) gefunden haben, dass auch das Hyperboloid zuweilen durch eine Gleichung von der Form $x^2 + x'^2 - x''^2 = \mu$, die der so eben dem Ellipsoid vindicirten ähnlich ist, dargestellt werden kann, so haben wir doch dort zugleich auch gesehen, dass diess nur unter grossen Beschränkungen geschehen kann, diese letztere Gleichung also nicht allgemein dem Hyperboloid beigeschrieben werden darf.

Ferner haben wir schon im vorigen Paragraphen (Nr. 223.) unter dem Buchstaben e) die Ueberzeugung erhalten, dass jedes elliptische Paraboloid durch eine Gleichung von der Form

$$x^2 + x'^2 + \gamma x'' = 0$$

an Coordinatensystemen, deren Spitze jeder Punct dieser Fläche sein kann, darstellbar ist, und daselbst (Nr. 229.) haben wir gefuuden, dass eben so jedes hyperbolische Paraboloid durch eine Gleichung von der Form

$$xx' + \gamma x'' = 0$$

darstellbar ist; man kann daher diese zweierlei Gleichungsformen als die das elliptische und das hyperbolische Paraboloid charakterisirenden aufstellen. Denn obgleich es sich in Nr. 223. lit. e. herausgestellt hat, dass auch das hyperbolische Paraboloid an gewissen seiner Puncte durch eine Gleichung von der Form $x^2 - x'^2 + \gamma x'' = 0$, die der so eben dem elliptischen Paraboloid vindicirten ähnlich ist, dargestellt werden kann, so hat doch diese Gleichung, weil sich dieselbe nicht an allen Puncten des Paraboloids herstellen lässt, mit der $xx' + \gamma'' x'' = 0$ nicht den gleichen Grad der Allgemeinheit.

Gehen wir von diesen die verschiedenen Arten der Flächen zweiter Ordnung charakterisirenden Gleichungen aus und setzen wir qx, qx', qx'' an die Stelle von x, x', x'', was nichts anders sagen will, als dass die Coordinaten an einem in dem Verhältnisse $q : 1$ abgeänderten Maassstabe gemessen werden sollen, so wird die Gleichung des Ellipsoids jetzt

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = \frac{\mu}{q^2} ,$$

die des Hyperboloids

$$xx' + xx'' + x'x'' = \frac{\mu}{q^2} ,$$

die des elliptischen Paraboloids

$$x^2 + x'^2 + \frac{\gamma}{q} x'' = 0 ,$$

die des hyperbolischen Paraboloids

$$xx' + \frac{\gamma}{q} x'' = 0 ,$$

und da wir in den zwei ersten Fällen q in reeller Weise stets so wählen können, dass $\frac{\mu}{q^2} = \pm 1$ wird, so wie in den zwei letzten Fällen immer so, dass $\frac{\gamma}{q} = \pm 1$ wird *), so können wir am beliebigen Parallel-Coordinatensysteme als allgemeinste Gleichung des Ellipsoids immer die:

$$x^2 + x'^2 + x''^2 = \pm 1 ,$$

als allgemeinste Gleichung des Hyperboloids immer die:

$$xx' + xx'' + x'x'' = \pm 1 ;$$

ferner als allgemeinste Gleichung des elliptischen Paraboloids immer die:

$$x^2 + x'^2 \pm x'' = 0 ,$$

*) Man wird sich bei einiger Aufmerksamkeit leicht überzeugen können, dass durch die vorstehenden an den Gleichungen vorgenommenen Veränderungen nichts anders geschehen ist, als dass der positiv genommene Parameter den Betrachtungen als Maasseinheit zu Grund gelegt worden ist, und zugleich zeigen sie, wie man blos durch Abänderung der Maasseinheit dem Parameter einen beliebig vorgeschriebenen Zahlenwerth ertheilen kann.

und als allgemeinste Gleichung des hyperbolischen Paraboloids immer die

$$x x' \pm x'' = 0$$

aufstellen, in welchen beim Ellipsoid nur das obere von den doppelten Vorzeichen zu einer reellen Fläche hinführt, während die doppelten Vorzeichen beim Hyperboloid seine beiden Arten verkündigen *), bei den Paraboloiden dagegen von den doppelten Vorzeichen eben sowohl das eine wie das andere genommen werden kann. Es lässt sich mithin die Veränderlichkeit der Parameter bei den Flächen zweiter Ordnung ganz und gar auf die Veränderlichkeit der Axenwinkel im beliebigen Coordinatensysteme übertragen. Auf diese Bemerkung lässt sich eine sehr eigenthümliche Behandlung solcher Flächen im schiefwinkligen Coordinatensysteme gründen, wobei der Umstand Bedeutung hat, dass man stets an das Coordinatensystem von welchem die Betrachtungen ausgehen, noch eine besondere Bedingung zu stellen berechtigt ist; entweder in Betreff der Stellung seiner Axen oder in Betreff der Natur seiner Spitze, das erstere bei der Mittelpunctsfläche, das letztere bei dem Paraboloide.

*) Dass die Gleichung $x x' + x x'' + x' x'' = +1$ dem zweimanteligen, die $x x' + x x'' + x' x'' = -1$ dem einmanteligen Hyperboloid angehöre, geht aus den in Nr. 211. unter a) und b) dafür angegebenen Kennzeichen sogleich hervor, wenn man sich erinnert, dass bei Gleichungen dieser Art, die in (67. h.) aufgeführte Relation, welche hier $\mathfrak{L} = \frac{1}{4} A^2$ wird, statt findet, sonach das den beiden vorstehenden Gleichungen angehörige $\mathfrak{L}$ an dem reell vorausgesetzten Coordinatensysteme stets eine positive Zahl vorstellt.

Druckfehler-Verzeichniss.

Seite 32 auf Zeile 1 von unten ist $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'' - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1'$ für $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1' - \mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1'$ zu setzen.

„ 35 ist auf der rechten Seite der Gleichungen (49. b.) u für x zu setzen.

„ 40 auf Zeile 3 v. u. ist (9. a. oder b.) für (17.) zu setzen.

„ 64 ist bei den Gleichungen (87.) am Ende der ersten Zeile (B_2) für (B), am Ende der zweiten (B_2') für (B_1') zu setzen.

„ 88 in der auf die Gleichungen (108. c.) folgenden Zeile ist a'' für c'' und c'' für c zu setzen.

„ 223 und 224 ist für die Gleichungsnummer (1.) und die darauf bezüglichen Citate (48.) zu setzen.

„ 352 auf Zeile 10 v. u. ist an einem für an einer zu setzen.

„ 390 ist bei Gleichung (7. d.) im Nenner des Coeffizienten von v^2 α' für α zu setzen.

„ 391 ist bei Gleichung (8. d.) im Nenner des Coeffizienten von y^2 δ' für δ zu setzen.

„ 440 auf Zeile 5 v. u. ist Polaraxe für Grundaxe zu setzen.

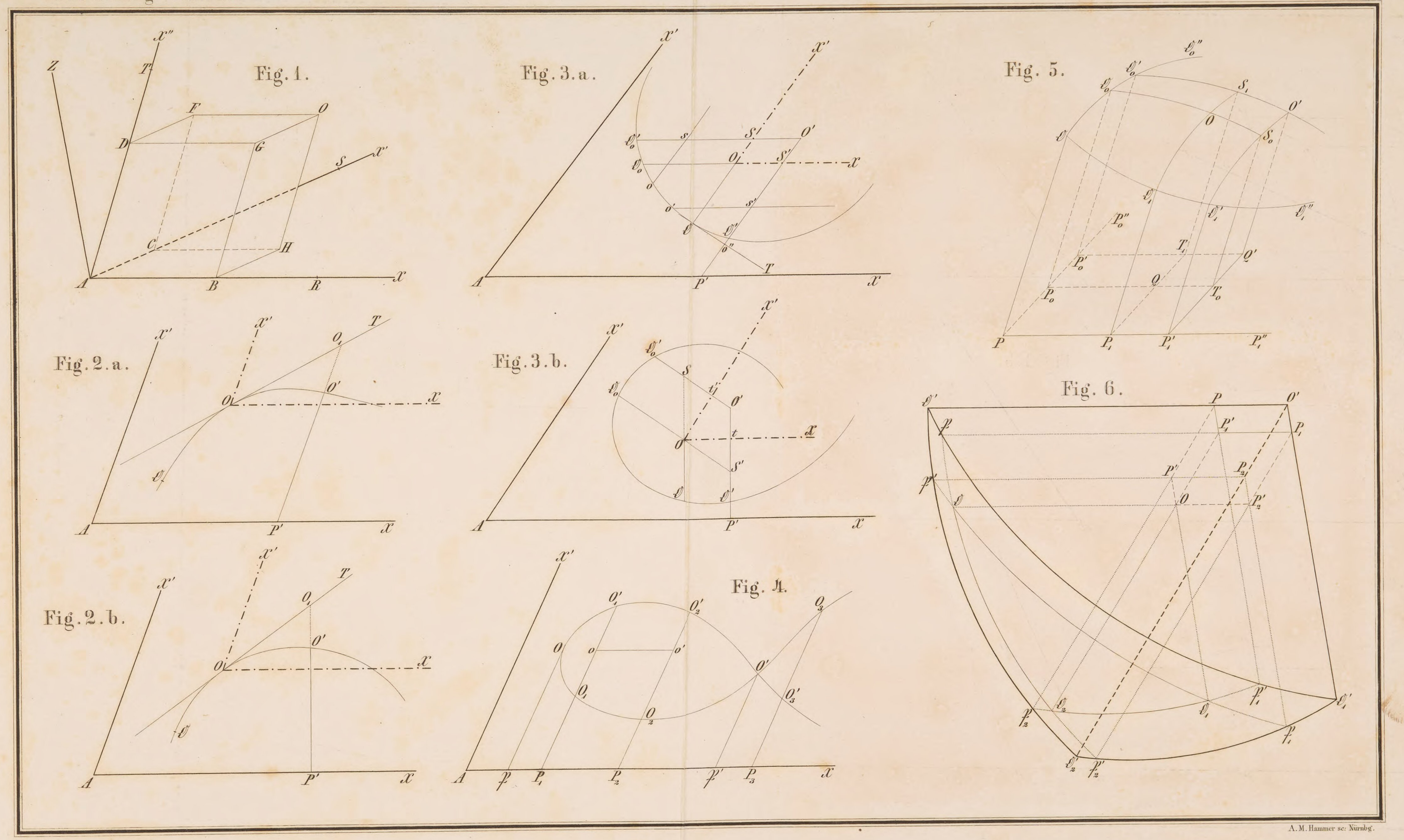
„ 543 auf Zeile 15 v. u. ist Nr. 224. für Nr. 214. zu setzen.

„ 560 ist auf Zeile 1 der Gleichung (111. e.) in der letzten Klammer $+$ für $\pm$ zu setzen.

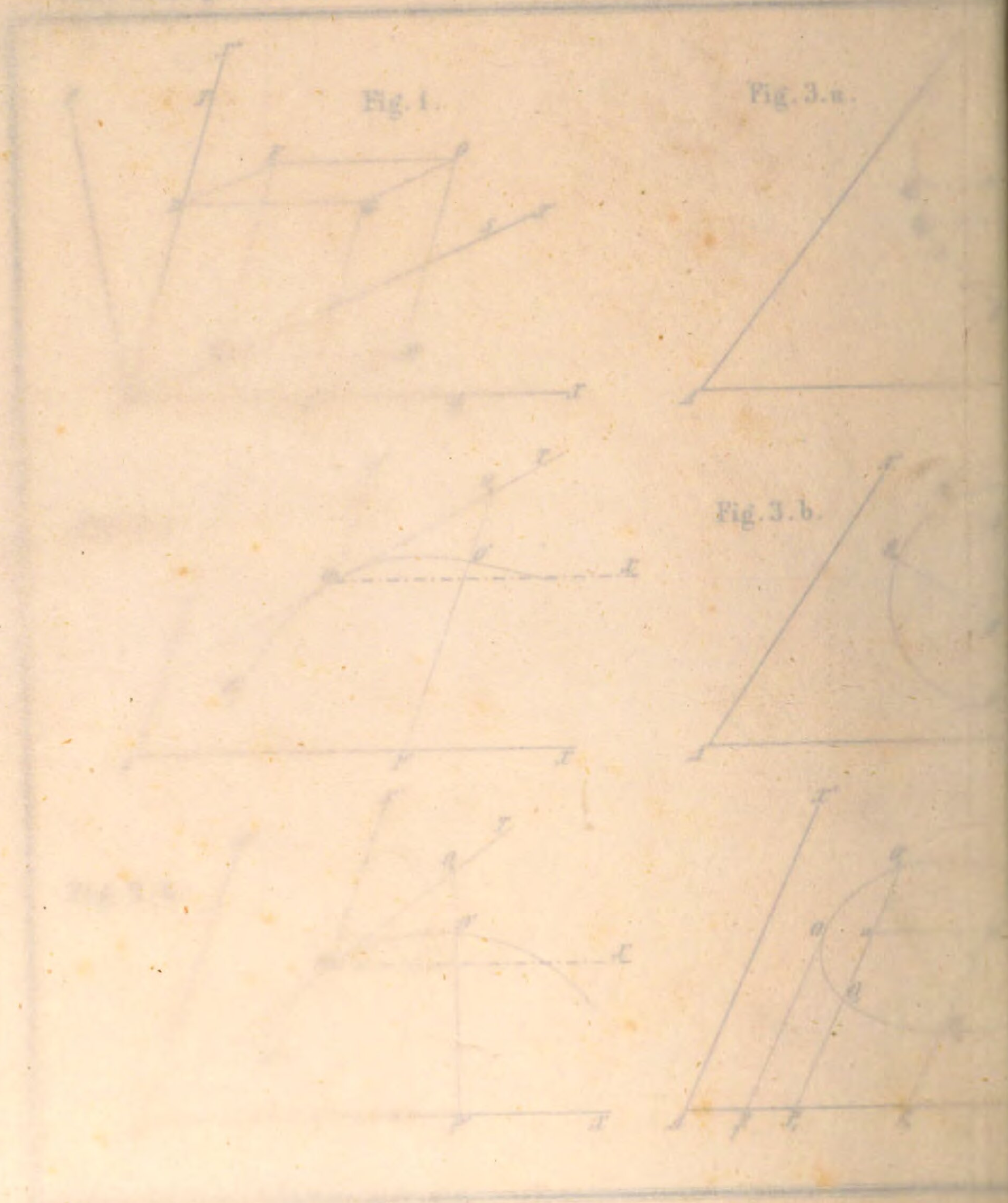
„ 567 ist im Zähler des in Absatz c) stehenden Quotienten α_0'' für α_0 und α_0 für α_0'' zu setzen.

„ 576 auf Zeile 1 und 3 v. u. ist das Zeichen $>$ für das $<$ zu setzen.

Druck der Campe'schen Officin.



A. M. Hammer sc: Nürnbg.


Fig. 1.
Fig. 3.a.
Fig. 3.b.

Förster Buchh.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Georg Simon,

Beiträge zur Molecular-Physik

Bd.: 1

Nürnberg 1849

4 Phys.sp. 183 x-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10058627-2